第 14 卷第 1 期
2011 年 1 月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 14 No. 1
Jan. 2011

可折旧设备在线租赁的随机性竞争策略①

张 永，张卫国，徐维军
(华南理工大学工商管理学院，广州 510640)

摘要： 应用在线算法与竞争分析研究在线租赁问题是近年来国内外的一个研究热点. 在一般设备在线租赁的基础上，提出了可折旧设备在线租赁问题. 针对离线人具有遗忘性竞争对手的特点分别给出了可折旧设备在线租赁在有无利率情形下的随机性竞争策略. 基于在线 – 离线成本比值矩阵分别证明了有无利率下随机性策略的竞争比，说明了折旧因素的引入使得可折旧设备随机性策略的竞争性能进一步得到改善并使得模型更适合于实际中大型设备投资问题，从而为投资者提供更好的理论决策依据. 另外，市场利率的引入使得可折旧设备随机性策略的竞争性能有所降低但模型更符合现实情况，即大型设备投资者若考虑到资金的收益及市场风险因素后将会采取更加谨慎稳健的投资策略.

关键词： 竞争分析； 可折旧设备； 随机性竞争策略； 竞争性能； 市场利率
中图分类号： F832 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007 – 9807(2011) 01 – 0069 – 09

0 引 言

现代租赁业，在发达国家被视为“朝阳产业”，它是与银行信贷、证券并驾齐驱的三大金融工具之一，又是商品流通的主要渠道，在国民经济和市场体系中扮演了重要角色. 由于我国的租赁渗透率很低，因此我国租赁市场有较大的潜力. 国内租赁业包括众多领域，而其中的房产和汽车以及航空设施等大型设备具有可折旧的特点，即购买使用一段时间后设备仍具有价值，因此对于要使用这种设备的投资者而言，在购买时不得不将折旧考虑其中. 而需要使用设备的时间长短是不确定的，因此可折旧设备是租赁还是购买对于投资者而言是一个在线决策问题，简称可折旧设备在线租赁，即可折旧设备在线投资者在不知道未来使用时间的情况下，决定是购买设备还是租赁，若购买则何时购买的问题. 随着租赁行业的发展和设备更新换代的速度日益加快，常租常新、先租后买的营销概念已被越来越多的投资者所接受. 因此，从投资者的角度研究可折旧设备在线租赁的竞争策略具有重要意义.

可折旧设备在线租赁问题显然是一种特殊的在线租赁问题. 应用在线算法和竞争分析[1-2]理论研究在线租赁问题始于 Karp 提出的“租雪橇”模型[3]，其假设在线人需要使用某种设备，但并不清楚自己到底会用多长时间，只有在每个阶段开始时才能决定是继续用还是不用. 因此在线人可以每期付较小的费用一直租赁也可以花更高的价钱将其买下来. 一旦在线人买下了设备，就不必再付租赁费用. 因为只有在每个阶段初才知道以后还需不需要这个设备，所以决定什么时候租用什么时候购买是问题的关键. 这类租赁问题显然具有非常强的动态特征，称之为在线租赁问题. 关于这个在线决策问题实质上就是寻求最佳停止时刻，即在线人一直采取租赁策略直到某一时刻点采取购买策略使该决策结束，Karp 给出了一个最

① 收稿日期： 2009 – 04 – 28； 修订日期： 2010 – 03 – 30.
基金项目： 国家杰出青年科学基金资助项目(70825005) ； 国家自然科学基金资助项目(70801027) ； 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(06 – 0749) .
作者简介： 张 永(1981—) ，女，河南人，博士生. Email： zhangyong8201@ gmail.com

优的确定性策略. 随后,许多学者对其基本模型进行了一系列广泛深入的研究,Karlin 等学者[4]给出了租赁问题的随机性在线算法,使竞争比达到了约 1.582 近似最优. 1998 年 Irani 等人[5]研究了当购买价格波动而租赁费用保持不变情形,分别给出了确定性和随机性算法的竞争比上下界,并还第一次运用具有统计特征对手,即限定未来价格波动满足一定条件来研究租赁问题. 1999 年 Yaniv 等人[6]考虑了存在利率情形时的在线租赁问题,给出了最优确定性算法(其竞争比大小在[3/2, 2)之内)及最优随机性算法(其竞争比大小在[4/3, 1.582)之内). 随后,Fujiwara 等人[7]结合概率信息研究了连续型在线租赁决策问题. 在国内,朱志军等人[8]首先给出了一般设备租赁问题的风险补偿模型,徐维军[9]等人给出了具有几何分布统计特征的在线租赁竞争分析,将统计的方法应用到了竞争分析领域,徐寅峰等学者[10-11]在 Fujiwara 和 Iwama 研究需求具有连续型概率信息的基础上,深入研究了存在利率情况下当输入的概率信息具有离散型结构的设备融资决策问题;徐维军和马卫民等[12-13]研究了租赁价格可变情形的连续型在线租赁问题;可见,在国内外运用在线算法与竞争分析理论研究在线租赁问题已经取得了相当丰富的成果.

可折旧设备在线租赁与上面已有研究的一般设备在线租赁有明显的不同之处,一般设备在线租赁都假定设备的价值随设备使用时间的结束而消失(没有考虑到折旧因素),且设备购买没有交易成本;而可折旧设备在线租赁中的设备则具有使用寿命长、在使用时间结束后仍具有很高的价值的特点,同时设备的买卖过程中存在交易成本,使得可折旧设备租赁问题截然不同于一般设备租赁问题. 本文在 Yaniv[6]提出的随机性竞争策略的基础上研究可折旧设备的随机性竞争策略并且假定:① 单位时期内设备的租赁费和折旧分别为 l 和 d;② 设备的买卖过程中存在交易费用,而且它平均分配到各个时期. 为了便于讨论本文假定每个时期买和卖的交易费用相等而且为 c;③ 考虑市场利率时,单位时期的市场利率为 i,($i > 0$). 在上述假设下,基于遗忘性竞争对手对在线者的竞争策略具有遗忘性的特点,本文给出了可折旧设备在线租赁的随机性竞争策略,得到了无利率下的竞争比上界 $2-(e-2)/(e-1)-d/(l(e-1))$ 和有利率下的竞争比上界 $2-(e-2)/(e-1)-(d-c(1-\beta))/(l(e-1))$,$\beta = 1/(1+i)$. 折旧因素的引入使得策略的竞争性能进一步得到改善,并使得在线租赁模型更适合实际中大型设备投资问题,进而为大型设备(可折旧设备)投资者提供更好的理论决策依据. 另外,市场利率的引入使得可折旧设备随机性策略的竞争性能有所降低但模型更完善更贴近实际租赁.

1 随机性竞争策略

在线问题是指决策者只知道局部信息而需要对全局做出决策的那一类问题. 在在线问题中,输入总是逐步被提供的. 对于每个输入部分,在线算法在不知道以后信息的情况下需要给出输出,也就是说在得到了 t 步输入后,需要立即给出 t 步的输出. 因为决策是在不知道整个输入的情况下做出的,因此在线算法往往得不出最优解. 所以在线算法的性能只能用它的解与最优解的近似程度来衡量. 如果一个在线算法的解对于任意输入序列都和最优解很接近,就称此算法是竞争性算法.

由在线算法的竞争比定义知,对于一个输入序列 σ,用 $\mathrm{cost}_A(\sigma)$ 和 $\mathrm{cost}_{opt}(\sigma)$ 分别表示在线算法 A 和对应离线问题的解(最优解). 如果存在一个与序列 σ 无关的常数 r 和 α,使得 $\mathrm{cost}_A(\sigma) \leq r \cdot \mathrm{cost}_{opt}(\sigma) + \alpha$ 成立,就称在线算法 A 为竞争比为 r 的竞争算法. 用在线算法分析在线决策问题,可以从对手分析法的方向去思考,即以对手论的观点来分析在线算法. 可以把问题看成在线参与者和怀有敌意的对手之间的博弈. 然后,在线参与者使用自己设计的算法来运行对手创建的输入序列. 而对手则根据在线参与者所采用算法的有关知识,来构建一个对于在线参与者来说尽可能坏的输入序列,以使得竞争比尽可能最大. 换言之,对手竭尽全力使得在线参与者付出尽可能昂贵的代价,与此同时,要尽可能使离线最优算法付出尽可能小的代价. 在上面定义中,算法 A 为确定性算法. 随机性竞争策略是指一个在线算法根据输入随机选择做出决策的一类算法. 由于随机策略完成一个特定需求输入的花费是一个随机变量,因此随机算法的业绩通常用它的期望花费来衡量,

因此它的竞争比通常要好于确定性策略.

对于一个随机性在线竞争策略，没有唯一的对手策略. 区分不同对手策略的关键在于它们多大程度上知道随机策略的输出结果和它们怎样去完成需求序列的. 通常可以将对手策略分为遗忘性对手策略和适应性对手策略两类.

遗忘性对手策略: 这个策略必须在完全不知道输出和相应策略的前提下选择整个需求序列 σ，但遗忘对手策略知道对应的在线算法及其对输入服务策略的概率分布;

适应性对手策略: 这个策略在知道在线算法所有先前策略和结果的基础上选择以后的服务需求序列. 在对适应性对手策略分类的基础上，可以根据对手策略自己如何满足需求序列的把它分为适应性离线对手策略和适应性在线对手策略两种.

相应地，随机性竞争比可以定义如下: 如果对于任意的需求序列 σ，存在与序列 σ 无关的常数 r 和 α，满足 $E[\mathrm{cost}_A(\sigma)] \leqslant r \cdot E[\mathrm{cost}_{adv}(\sigma)] + \alpha$，就称随机在线算法 A 相对于竞争对手 adv(包括遗忘对手策略、适应性离线对手策略和适应性在线对手策略) 而言为竞争比为 r 的竞争算法. 这里 σ 是由对手策略和算法 A 相互作用产生的，$\mathrm{cost}_{adv}(\sigma)$ 表示对手策略满足需求序列的花费，则竞争比可以表示为 $\alpha_A^{adv} \equiv \inf_r\{r \mid$ 对于所有的 adv，A 是 r 竞争比$\}$，期望值是在线算法所有可能选择结果的一个平均值. 对于遗忘性对手策略它的花费不依赖于算法的随机选择而是一个确定值，所以花费 $\mathrm{cost}_{obl}(\sigma) = \mathrm{cost}_{opt}(\sigma)$ 不是一个随机值; 若满足不等式 $E[\mathrm{cost}_A(\sigma)] \leqslant r \cdot E[\mathrm{cost}_{opt}(\sigma)] + \alpha$，则称随机算法 A 对于所有的遗忘性对手策略和输入序列 σ 都是 r - 竞争比的算法. 对于其它两种对手策略，费用 $\mathrm{cost}_{adoff}(\sigma)$ 和 $\mathrm{cost}_{adon}(\sigma)$ 都是自己的随机变量，同样需要取它们的期望值.

因为适应性对手策略提前决定需求序列和最优的满足在线需求，所以遗忘性对手策略的约束力最差，适应性离线对手策略的约束力最强，它能够最优的满足在线需求. 如果用 r_{obl}、r_{adoff}、r_{adon} 分别表示相对遗忘性对手、离线适应性对手和在线适应性对手的最优竞争比，用 $r_{\det}$ 表示最优确定性算法的竞争比，则有关系式 $r_{obl} \leqslant r_{adon} \leqslant r_{adoff} \leqslant r_{\det}$ 成立. 对于随机性算法与确定性算法之间的关系及对手的分类讨论，David 等人[14] 进行了许多更为详尽的讨论，并指出了它们之间的联系和不同之处.

2　无利率下可折旧设备的随机性竞争策略分析

随机性竞争策略指的是在线租赁者以一定的概率选择某种策略，而且假定对手具有遗忘性，即对手对在线人采取的竞争策略不具有记忆性. 对于在线问题，研究在线者随机地采用策略 $A(t)$: 即连续租用前 $t-1$ 期，之后如果需要则立即购买，这里 t 取正整数. 如果在线租赁者采取随机策略，离线对手就不能准确地猜出在线人实际上会选择的策略，尽管在均衡点，离线对手都知道在线租赁者选择不同策略的概率分布. 在线参与者的随机策略 P 是指它在纯策略集 $A = \{A(t) \mid t \in Z^+\}$ 上的一个概率分布. 对于每一个纯策略 $A(t) \in A$，定义 p_t 是策略 $A(t)$ 被选取的概率大小. 对于随机性竞争策略的研究，EI-Yaniv[6] 对不考虑折旧的在线设备租赁进行了详细论述，得到了随机性竞争策略的竞争比上界 $2-(e-2)/(e-1)$ (约 1.582). 对于可折旧设备在线租赁的随机性竞争策略，本文也考虑这样一类策略集 $A(t)$，进而寻找它的最优策略. 首先考虑无利率下的可折旧设备，则有: ① 由于设备租赁公司要赚取一定的利润，即有 $l > d$，否则设备租赁公司就会处于亏损状态; ② 在线设备购买者在第一单位时期内租赁的费用小于购买的费用，否则在线者一开始就购买，无需讨论. 因此，在第一时期内有 $2c + d > l$ 成立. (每期买和卖的交易费用相等同为 c); ③ 假设设备价格处于稳定期，新设备的价格没有变化，旧设备的价格等于新设备价格减去总折旧. 首先求出可折旧设备在线租赁在无利率下的关键时刻点 $t_0 = 2c/(l-d)$，即连续租赁设备 t_0 时期的费用与一开始购买设备使用 t_0 时期的费用相等; 当需要使用的时期数 $n < t_0$ 时，一直租赁为最优离线策略; 当需要使用时期数 $n \geqslant t_0$ 时，一开始购买设备为最优离线策略. 因此在策略 $A(t)$ 下，可折旧设备的最优确定性竞争策略为连续租赁设备 $t_0 - 1$

时期后购买，且该策略的最优竞争比为 $1+(l-d)(2c+d-l)/(2lc)$[15]. 下面的引理 1 和引理 2 给出了随机策略集 $\{A(t) \mid t \in Z^+\}$ 的相关结论[6].

引理 1 针对遗忘性竞争对手，若在线者随机采用纯策略集 $\{A(t) \mid t \in Z^+\}$，则存在一个最优的在线随机性竞争策略满足：当 $t > t_0$ 时，有 $p_t = 0$[6].

引理 2 设 M 是下三角形元素为 1 且主对角线以上每列的非负元素是递增的 m 阶矩阵，若行向量 $\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 和常数 $\lambda>1$ 是线性规划问题

$$\min \lambda \begin{cases} \boldsymbol{PM} \leqslant \lambda \overrightarrow{1} \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \end{cases} \tag{1}$$

的解，则有 $\boldsymbol{PM}_1 = \boldsymbol{PM}_2 = \cdots = \boldsymbol{PM}_m = \lambda$[6].

引理 1 说明了对于随机性竞争策略，在线租赁者不会选取 $t \geqslant t_0$ 的 $A(t)$ 策略，如果采取大于 t_0 的先租赁后购买策略一定不是一个较优的策略，则至少存在 $A(t_0)$ 策略优于上述策略. 另外，如果离线对手选择大于 t_0 的实际租赁时，则在线人必定会采取购买策略；引理 2 说明了对于离线者决定的任何一个实际租赁时期数下，在线者选择随机策略 P 时所得到的竞争比都相同，都为 λ，即随机策略 P 是一个均衡策略. 针对遗忘性竞争对手，本文首先给出了可折旧设备在无利率下的随机性竞争策略. 由引理 1 和引理 2 以及对应成本比值矩阵的特点得到了它的竞争比，且进一步说明了竞争比上界为 $2-(e-2)/(e-1)-d/(l\times(e-1))$.

定理 1 针对遗忘性竞争对手策略，若可折旧设备在线租赁者的随机性策略的纯策略集为 $\{A(t) \mid t \in Z^+\}$，则在线租赁者的随机策略 P_u 为

$$P_{ut} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t_0(\Pi^{t_0-1}-1)} & t=1 \\ \Pi^{t-1} p_{u1} & 2 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 & t_0 < t \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Pi = \dfrac{t_0}{t_0-1}$，且此随机性策略的竞争比为

$$2-\frac{\left(\dfrac{t_0}{t_0-1}\right)^{t_0}-\left(2-\dfrac{d}{l}\right)}{\left(\dfrac{t_0}{t_0-1}\right)^{t_0}-1} \tag{3}$$

证明 由引理 1 知道在线人在策略选择中不会选择 $t>t_0$ 的随机策略 $P_u=\{p_{ut}\}$，即 $t>t_0$ 时，$p_{ut}=0$. 而对手于此同时会选择 $n \leqslant t_0$，因此在线成本与离线成本比值的支付矩阵元素为

$$\begin{aligned} L^u(t,n) &= \frac{\mathrm{cost}_{on}(t,n,t_0)}{\mathrm{cost}_{off}(n)} \\ &= \frac{(t-1)l+(n-t+1)d+2c}{nl}, \\ &\qquad (t \leqslant n) \end{aligned} \tag{4}$$

也即是纯策略 $A(t)$ 的竞争比. 由于竞争对手具有遗忘性，一旦在线人的策略使得竞争比达到 $L^u(n,n)=\dfrac{(n-1)l+d+2c}{nl}$（矩阵对角线上）之后有 $L^u(t,n)=\dfrac{nl}{nl}=1$，$(t>n)$. 若矩阵的行下标 t 表示在线设备投资者采取策略 $A(t)$，列下标表示离线者所控制的输入序列（需要使用设备的时期数 n），则成本比值矩阵的主对角线以下的元素是 1.

因此，得到了在线成本与离线成本比值的支付矩阵 $\boldsymbol{L}^u$ 如下（式(7)）. 这里，$\boldsymbol{L}^u$ 是一个 $t_0 \times t_0$ 阶的成本比值矩阵. 记 $\boldsymbol{L}^u$ 的第 n 列为 $\boldsymbol{L}_n^u$，则 $\boldsymbol{L}^u=(\boldsymbol{L}_1^u,\boldsymbol{L}_2^u,\cdots,\boldsymbol{L}_n^u,\cdots,\boldsymbol{L}_{t_0}^u)$，其中

$$\boldsymbol{L}_n^u = (L^u(1,n),\cdots,L^u(t,n),\cdots,L^u(t_0,n))^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

由前面的引理 2 可知存在一个概率分布 $P_u=(p_{u1},p_{u2},\cdots,p_{ut_0})$ 和一个常数 $\lambda>1$ 使得

$$P_u\boldsymbol{L}_1^u = \cdots = P_u\boldsymbol{L}_{t_0}^u = \lambda^u$$

P_u 即是在线参与者的随机性竞争策略，是指在它的纯策略集 $A=\{A(1),A(2),\cdots,A(t_0)\}$ 上的一个概率分布. 即对于每一个纯策略 $A(t)\in A$，p_{ut} 是策略 $A(t)$ 被选取的概率大小（$\sum_{A(t)\in A} p_{ut}=1$），$\lambda^u$ 即是此随机策略的竞争比. 可以通过关系式 $\sum_{A(t)\in A} p_{ut}=1$ 和 $P_u\boldsymbol{L}_1^u=\cdots=P_u\boldsymbol{L}_{t_0}^u$ 求出在线者的随机策略及其竞争比.

因此，当在线 – 离线成本比值矩阵为 $\boldsymbol{L}^u$ 时. 由 $P_u\boldsymbol{L}_1^u=P_u\boldsymbol{L}_2^u=\cdots=P_u\boldsymbol{L}_{t_0}^u$ 得到

$$p_{ut} = \left(\frac{2c}{d+2c-l}\right)^{t-1} p_{u1},2 \leqslant t \leqslant t_0 \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{L}^u = \begin{pmatrix} \frac{d+2c}{l} & \frac{2d+2c}{2l} & \frac{3d+2c}{3l} & \cdots & \frac{nd+2c}{nl} & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{l+d+2c}{2l} & \frac{l+2d+2c}{3l} & \cdots & \frac{l+(n-1)d+2c}{nl} & \cdots & \frac{l+(t_0-1)d+2c}{t_0 l} \\ 1 & 1 & \frac{2l+d+2c}{3l} & \cdots & \frac{2l+(n-2)d+2c}{nl} & \cdots & \frac{2l+(t_0-2)d+2c}{t_0 l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{(n-1)l+d+2c}{nl} & \cdots & \frac{(n-1)l+(t_0-n+1)d+2c}{t_0 l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{(t_0-1)l+d+2c}{t_0 l} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

其中 $P_u = (p_{u1},p_{u2},\cdots,p_{ut_0})$,又由 $\sum_{t=1}^{t_0} p_{ut} = 1$ 知

$$p_{u1} = \frac{1}{1+\frac{2c}{l-d}\left(\left(\frac{2c}{d+2c-l}\right)^{t_0-1}-1\right)} \qquad (8)$$

进而随机性策略的竞争比为

$$\begin{aligned} r_{ran}^u = \lambda^u = P_u \boldsymbol{L}_{t_0}^u &= \sum_{t=1}^{t_0} p_{ut}\frac{(t-1)l+(t_0-t+1)d+2c}{t_0 l} \\ &= 1 + \sum_{t=2}^{t_0} p_{ut}\frac{(t-1)(l-d)}{t_0 l} \\ &= 2 - \frac{lt_0\left(\frac{t_0}{t_0-1}\right)^{t_0-1} - (2l-d)(t_0-1)}{lt_0\left(\frac{t_0}{t_0-1}\right)^{t_0-1} - l(t_0-1)} \\ &= 2 - \frac{\left(\frac{t_0}{t_0-1}\right)^{t_0} - \left(2-\frac{d}{l}\right)}{\left(\frac{t_0}{t_0-1}\right)^{t_0} - 1} \end{aligned} \qquad (9)$$

由 $t_0 = 2c/(l-d)$ 知 r_{ran}^u 的上界为 $2-(e-2)/(e-1) - d/(l(e-1))$.

3 市场利率下可折旧设备的随机性竞争策略分析

在各种金融决策中,必须考虑资本的净现值.市场利率体现了任何合理金融决策模型的本质特性.在特殊的可折旧设备租赁问题中引入利率使得模型更贴近于现实.令 $\beta = 1/(1+i)$,其中 $i > 0$ 表示单位时期内的名义利率,则有以下两结论成立:①一开始(第一时期内)租赁设备应该比购买设备便宜,否则在线者一开始就应该购买设备,讨论无意义.即有 $d+c+c\beta > l$ 成立;②永远租赁设备的费用大于一开始购买的费用,即当 N 足够大时,有不等式 $l\sum_{i=0}^{N-1}\beta^i > d\sum_{i=0}^{N-1}\beta^i + c + c\beta^N$ 成立,令 $N \to \infty$,从而得到不等式 $d+c-c\beta < l$.易得可折旧设备在线租赁在市场利率下的关键时刻点 $t^* = \ln((l-d-c+c\beta)/(l-d+c-c\beta))/\ln\beta$,即连续租赁设备 t^* 时期的费用与一开始购买设备并且使用 t^* 时期的费用相等;

针对遗忘性竞争对手策略,定理 2 给出了市场利率下的随机性策略,并证明了此策略的竞争比上界为 $2-(e-2)/(e-1)-(d-c(1-\beta))/(l(e-1))$.

定理 2 在市场利率为 $i(i>0)$ 下,针对遗忘性竞争对手,若在线租赁者选择的纯策略集为 $\{A(t) \mid t \in Z^+\}$,则在线随机性策略 P 为

$$p_t = \begin{cases} \frac{\Delta-1}{\Delta^{t^*}-1} & t=1 \\ \Delta^{t-1}p_1 & 2 \leqslant t \leqslant t^* \\ 0 & t^* < j \end{cases} \qquad (10)$$

其中 $\Delta = 2c/(c+c\beta+d-l)$,且此随机性策略的竞争比为

$$2 - \frac{\Delta^{t^*} - 2 + \frac{d-c(1-\beta)}{l}}{\Delta^{t^*}-1}.$$

证明 由引理 1 知在线人在策略选择中不会选择 $t > t^*$ 的随机策略 $P = \{p_t\}$，即 $t > t^*$ 时，$p_t = 0$. 对手于此同时会选择 $n \leqslant t^*$，当 $t \leqslant n$ 时，在线成本与离线成本比值的支付矩阵元素为

$$L(t,n) = \frac{\text{cost}_{on}(t,n,t^*)}{\text{cost}_{off}(n)}$$
$$= \frac{l(1-\beta^{t-1})/(1-\beta) + d(\beta^{t-1}-\beta^n)/(1-\beta) + c\beta^{t-1} + c\beta^n}{l(1-\beta^n)/(1-\beta)} \tag{11}$$

也是纯策略 $A(t)$ 的竞争比. 由于竞争对手具有遗忘性，一旦在线人的策略使得竞争比达到

$$L(n,n) = \frac{l(1-\beta^{n-1})/(1-\beta) + d(\beta^{n-1}-\beta^n)/(1-\beta)}{l(1-\beta^n)/(1-\beta)} + \frac{c\beta^{n-1} + c\beta^n}{l(1-\beta^n)/(1-\beta)} \tag{12}$$

之后，策略 $A(t)(t > n)$ 的竞争比为 $L(t,n) = 1$. 令矩阵行下标 t 表示在线设备投资者的策略 $A(t)$，列下标表示离线者所控制的输入序列(要使用设备的时期数 n)，故成本比值矩阵的主对角线以下的元素是 1. 相应的得到了在线成本与离线成本比值的支付矩阵 $\boldsymbol{L}$ 如式(13).

可知 $\boldsymbol{L}$ 是一个 $t^* \times t^*$ 阶的在线－离线成本比值矩阵. 记 $\boldsymbol{L}$ 的第 n 列为 $\boldsymbol{L}_n$，则矩阵可以表示为 $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2, \cdots, \boldsymbol{L}_n, \cdots, \boldsymbol{L}_{t^*})$，其中 $\boldsymbol{L}_n = (L(1,n), L(2,n), \cdots, L(t,n), \cdots, L(t^*,n))^{\mathrm{T}}$. 由引理 2 知存在一个概率分布 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_{t^*})$ 和一个常数 $\lambda > 1$ 使得 $P\boldsymbol{L}_1 = \cdots = P\boldsymbol{L}_{t^*} = \lambda$，其中 P 即是在线设备投资者的随机性竞争策略，也就是指它在纯策略集 $A = \{A(1), A(2), \cdots, A(t^*)\}$ 上的一个概率分布.

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \frac{d+c+c\beta}{l} & \frac{d+d\beta+c+c\beta^2}{l(1-\beta^2)/(1-\beta)} & \frac{d+d\beta+d\beta^2+c+c\beta^3}{l(1-\beta^3)/(1-\beta)} & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{l+d\beta+c\beta+c\beta^2}{l(1-\beta^2)/(1-\beta)} & \frac{l+d\beta+d\beta^2+c\beta+c\beta^3}{l(1-\beta^3)/(1-\beta)} & \cdots & \frac{l+d(\beta-\beta^{t^*})/(1-\beta)+c\beta+c\beta^{t^*}}{l(1-\beta^{t^*})/(1-\beta)} \\ 1 & 1 & \frac{l+l\beta+d\beta^2+c\beta^2+c\beta^3}{l(1-\beta^3)/(1-\beta)} & \cdots & \frac{l+l\beta+d(\beta^2-\beta^{t^*})/(1-\beta)+c\beta^2+c\beta^{t^*}}{l(1-\beta^{t^*})/(1-\beta)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{l(1-\beta^{t^*-1})/(1-\beta)+d\beta^{t^*-1}+c\beta^{t^*-1}+c\beta^{t^*}}{l(1-\beta^{t^*})/(1-\beta)} \end{pmatrix} \tag{13}$$

对于每一个纯策略 $A(t) \in A$，p_t 是策略 $A(t)$ 被选取的概率大小($\sum_{A(t)\in A} p_t = 1$)，λ 即是此随机策略达到的竞争比. 可以通过关系式 $\sum_{A(t)\in A} p_t = 1$ 和 $P\boldsymbol{L}_1 = P\boldsymbol{L}_2 = \cdots = P\boldsymbol{L}_{t^*}$ 求出在线者的随机策略及其竞争比. 因此，当成本比值矩阵为 $\boldsymbol{L}$ 时有

$$p_t = \left(\frac{2c}{d+2c-l}\right)^{t-1} p_1, 2 \leqslant t \leqslant t^* \tag{14}$$

其中 $P = (p_1, \cdots, p_{t^*})$. 令 $\Delta = 2c/(c + c\beta + d - l)$，又由 $\sum_{t=1}^{t^*} p_t = 1$ 可知 $p_1 = \Delta - 1/(\Delta^{t^*} - 1)$，同时也得到了 $\sum_{t=2}^{t^*} \Delta^{t-1} = (\Delta^{t^*} - 1)/(\Delta - 1)$，进而随机性策略的竞争比为

$$r_{ran} = P\boldsymbol{L}_1 = p_1 \frac{d+c+c\beta}{l} + \sum_{t=2}^{t^*} p_1 \Delta^{t-1}$$
$$= p_1\left(\frac{d+c+c\beta}{l} + \sum_{t=2}^{t^*} \Delta^{t-1}\right)$$
$$= \frac{\Delta - 1}{\Delta^{t^*} - 1}\left(\frac{d+c+c\beta}{l} + \frac{\Delta^{t^*} - 1}{\Delta - 1} - 1\right)$$
$$= 2 - \frac{\Delta^{t^*} - 2 + \dfrac{d - c(1-\beta)}{l}}{\Delta^{t^*} - 1} \tag{15}$$

由式(15)知竞争比 r_{ran} 的上界为 $2 - (e-2)/(e-1) - (d - c(1-\beta))/(l(e-1))$. 从博弈论的观点来说，在博弈开始时，在线参与者运用某一随机原则在已知的策略集中选择策略，即对每一个纯策略 $A(t)(t = 1, 2, \cdots, t_0)$ 或者 $t = 1, 2, \cdots, t^*$) 以概率 p_{ut}(或者 p_t) 大小进行选择. 若对手选择租赁天数为 n 时，则在线参与者最终得到的期望竞争比为 $\sum_{t=1}^{t_0} \boldsymbol{L}^u(t,n) p_{ut}$ 或 $\sum_{t=1}^{t^*} \boldsymbol{L}(t,n) p_t$.

在均衡的情况下,要求在线租赁者在所有构成均衡的纯策略之间是无差异的,均衡要求在线租赁者以特定的概率选择纯策略,在线租赁者选择不同纯策略的概率分布不是由他自己的策略选择决定最优性,而是由离线对手的策略选择决定的. 即如果在线策略者选择每种策略的期望收益都是相等的,离线对手就不能选择某一确定的策略使得在线人的收益变得更差. 因此,从博弈论的角度说明了随机性策略的合理性和优越性.

4　竞争性能分析

随机性竞争策略能够改善在线竞争策略的竞争性能,本文针对遗忘性竞争对手得到无利率下的竞争比上界 $r_u^{\max} = 2 - (e-2)/(e-1) - d/(l(e-1))$. 与 Yaniv[6] 提出的不考虑折旧的随机性竞争策略竞争比上界 $r_{Yaniv} = 2 - (e-2)/(e-1)$ 相比,竞争比减少 $d/(l(e-1))$. 为了更为直观地说明无利率下可折旧设备竞争比上界 $r_u^{\max}$ 与租赁行业折旧 -- 租费比 d/l 的关系,图 1 给出了竞争比上界 $r_u^{\max}$ 随租赁行业折旧 -- 租费比 d/l 的变化趋势图,其中 $d/l \in [0.1,1]$. 从图 1 可以看出,无利率下的随机性竞争策略的竞争比上界 $r_u^{\max}$ 关于租赁行业折旧 -- 租费比 d/l 递减. 当 $l = d$ 时,处于"完全竞争市场"下,$r_{ran}^u = 1$; 而且当 $d \to l$ 时,$r_{ran}^u \to 1$. 也就是说当一个决策者处在"完全竞争市场"时,即使是在线问题也能做出最正确的决策,这与经济学中关于"完全竞争市场"的假设是相吻合的. 因而也说明了在对未来需求信息了解程度相同的条件下,决策者所处的市场环境决定了其最优在线策略的竞争比. 因此,在相同的决策环境下,运用相同的最优在线策略对不同类别的产品进行决策能得到同样满意的竞争比,即模型对类似问题有推广意义.

由前面分析知利率的引入使得竞争比上界由无利率下的 $2 - (e-2)/(e-1) - d/(l(e-1))$ 增到利率下的 $r^{\max} = 2 - (e-2)/(e-1) - (d - c(1-\beta))/(l(e-1))$. 图2 给出了 i 分别为 0.01, 0.03, 0.05 时对应的 $r^{\max}$ 散点图. 从图 2 可以看出有关系式 $r^{\max}(i = 0.01) < r^{\max}(i = 0.03) < r^{\max}(i = 0.05)$ 成立,更为直观的说明了市场利率下竞争比上界 $r^{\max}$ 关于利率递增. 进一步证实了可折旧设备利率下的随机性策略竞争性能弱于无利率下的随机性策略竞争性能,进而为大型设备投资者提供更有效的理论决策依据.

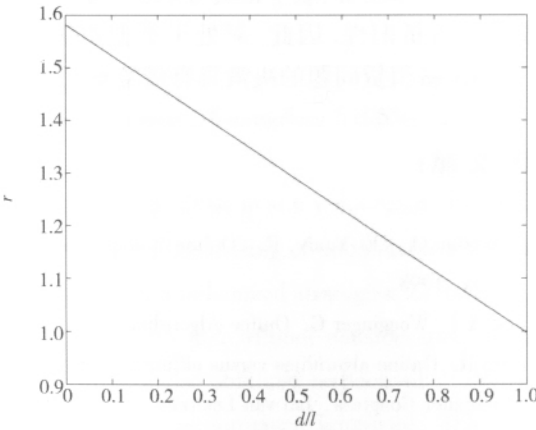

图 1　无利率下竞争比上界 $r_u^{\max}$ 与租赁行业折旧 -- 租费比 d/l 的关系

Fig. 1 The relationship between up bound of competitive ratio $r_u^{\max}$ and d/l without interest rate

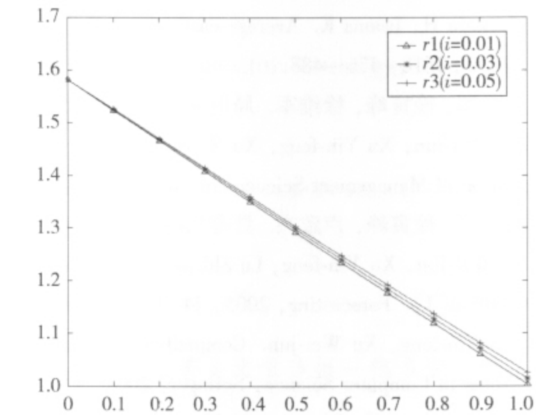

图 2　市场利率下竞争比上界 $r_u^{\max}$ 与市场利率 i 的关系

Fig. 2 The relationship between up bound of competitive ratio $r_u^{\max}$ and interest rate i

5　结束语

本文在在线租赁随机性竞争策略的基础上,研究了可折旧设备在有无利率下的随机性竞争策略. 基于在线 - 离线成本比值矩阵的特点,分别给出了可折旧设备在有无市场利率情形下的随机性在线竞争策略,并分别证明了对应策略的竞争比上界. 通过实例进一步说明了市场利率下可折旧设备的随机性在线策略竞争性能降低,因此大型设备投资者若考虑到资金的收益及市场风险因

素后将会采取更加谨慎稳健的投资策略. 本文所讨论的问题事实上是一个“存在交易成本、可二手交易的在线租赁模型”. 对于大型设备租赁如房产租赁、汽车租赁、航空租赁等承租人必须考虑到设备的可折旧性. 因此，对处于类似决策环境下、不同设备租赁问题的决策具有借鉴意义. 在实际应用中，如价格的不确实性(在本文模型中假定租赁成本和折旧是一固定常数) 是一个值得考虑的重要因素; 如何考虑预期下的随机性竞争策略研究; 以及如何将通货膨胀、税收、冗余成本一些相关因素考虑在内都是需要进一步研究和思考的方向.

参 考 文 献:

[1] Borodin A, El-Yaniv R. Online Computation And Competitive Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[2] Fiat A J, Woeginger G. Online Algorithms [M]. The State of the Art, Springer, 1998.

[3] Karp R. Online algorithms versus offline algorithms: How much is it worth to know the future [C] //Proc. IFIP 12th World Computer Congress, Jan van Leeuwen (Ed.), Madrid, Spain, 1992, 1: 416 – 429.

[4] Karlin A R, Manaees M S, McGeogh L, et al. Competiitive randomized algorithms for non-uniform problems [J]. Algorithmica, 1994, 11(1): 542 – 571.

[5] Irani S, Ramanathan D. The Problem of Renting Versus Buying [R]. Personal Communication, 1998.

[6] El-Yaniv R, Kaniel R, Linial N. Competitive optimal on-line leasing [J]. Algorithmica, 1999, 25: 116 – 140.

[7] Fujiwara H, Iwama K. Average-case competitive analyses for ski-rental problems [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2002, 2518: 476 – 488.

[8] 朱志军，徐寅峰，徐维军. 局内租赁问题的风险补偿模型及其竞争分析 [J]. 管理科学学报，2004，7(3): 64 – 74.
Zhu Zhi-jun, Xu Yin-feng, Xu Wei-jun. Risk-reward model of on-line leasing problem and its competitive analysis [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(3): 64 – 74. (in Chinese)

[9] 徐维军，徐寅峰，卢致杰. 具有几何分布统计特征的在线租赁竞争分析 [J]. 预测，2005，24(2): 46 – 51.
Xu Wei-jun, Xu Yin-feng, Lu Zhi-jie. Competitive analysis for on-line leasing with statistical characteristic of geometric distribution [J]. Forecasting, 2005, 24(2): 46 – 51. (in Chinese)

[10] Xu Yin-feng, Xu Wei-jun. Competitive algorithms for online leasing problem in probabilistic environments [J]. Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2004, 3174: 725 – 730.

[11] Xu Yin-feng, Xu Wei-jun, Li Hong-yi. On the on-line rent-or-buy problem in probabilistic environments [J]. Journal of Global Optimization, 2007, 38(1): 1 – 20.

[12] 徐维军，张卫国，胡茂林. 购买价格和租金费用均连续可变的在线竞争策略分析 [J]. 中国管理科学，2006，14(2): 94 – 99.
Xu Wei-jun, Zhang Wei-guo, Hu Mao-lin. Competitive strategy analysis for online Leasing with continuous change of purchasing price and renting cost [J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(2): 94 – 99. (in Chinese)

[13] 马卫民，陈国青. 价格连续型局内设备租赁问题的竞争分析 [J]. 系统工程理论与实践，2006，26(4): 90 – 96.
Ma Wei-min, Chen Guo-qing. Price continuous version of the on-line equipment renting-buying problem and its competitive strategies [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2006, 26(4): 90 – 96. (in Chinese)

[14] Ben-David S, Borodin A, Karp R, et al. On the power of randomization in online algorithms [C] // Proceedings of the 22nd Symposium on Theory of Algorithms, 1990: 379 – 386.

[15] 刘 斌，崔文田，辛春林. 住房租赁占线算法及竞争策略 [J]. 系统工程，2007，25(6): 53 – 56.
Liu Bin, Cui Wen-tian, Xin Chun-lin. Online algorithm and competitive strategy for house-renting problems [J]. Systems Engineering, 2007, 25(6): 53 – 56. (in Chinese)

Randomized competitive strategy for online leasing of depreciable equipment

ZHANG Yong, *ZHANG Wei-guo*, *XU Wei-jun*

School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China

Abstract: It is a hot topic to use the online algorithm and competitive analysis to study the online leasing problem. Based on the study of online leasing of general equipment, the online leasing of depreciable equipment is discussed. Since randomized algorithms can boost up performance, the randomized strategies for online leasing of depreciable equipment with oblivious adversary is proposed both with and without consideration of interest rate, respectively, and the maximum of its optimal competitive ratio is also obtained respectively. The conclusion shows that the introduction of depreciation factor made competitive performance improved. The introduction also makes the model more practical for large-scale investment in equipment problem, and provides investor better theoretical basis for decision making. In addition, consideration of interest rates makes the competitive ratio decrease a little, that is, investor will take more prudent investment strategy when interest rate is taken into consideration.

Key words: competitive analysis; depreciable equipment; randomized competitive strategy; competitive performance; interest rate

撤稿声明

我刊于2010年5月接到读者来信,称吉林大学教师朱秀梅发表有关文章涉嫌一稿多发。涉及稿件如下:

高技术企业集群式创新机理实证研究,管理科学学报,2009,12(4):75－82

经本刊联系作者朱秀梅,其已经确认以上稿件为一稿多发,表示会深刻认识错误,并将在以后工作中汲取教训、引以为戒。

鉴于以上情况,我刊声明《管理科学学报》撤销发表于我刊2009年第4期"高技术企业集群式创新机理实证研究"一文,公告所有读者请勿再以任何方式引用此文。

一稿多发系严重学术不端行为,学报对此行为予以强烈谴责。并自2010年12月1日至2013年12月1日三年内拒绝接收朱秀梅投稿(含合作投稿)。

今后我们将进一步加强对来稿的审查,避免类似情况的发生。同时,也恳请广大读者、作者一如既往地帮助本刊进行学术监督,一旦发现疑似相关学术不端行为,恳请及时与编辑部联系,我们将在核实的基础上,坚决查处。

特此声明!

《管理科学学报》编辑部