

需求替代的两产品动态批量最优预测时阈研究^①

慕银平

(电子科技大学经济与管理学院, 成都 610054)

摘要: 研究了存在需求单向替代的两产品动态批量决策的最优预测时阈问题, 构建了包含替代成本、生产转换成本和库存成本在内的成本最小化模型, 分析得出在只存在 3 类再生点 (I 类、II 类和 III 类) 情形下的再生点单调性特征, 同时, 设计出了多项式时间的前向动态规划算法, 运用数值试验分析了最优预测时阈与生产转换成本、替代成本、需求特征 (需求增长性和需求波动性等) 之间的相互关系, 并比较分析了存在替代和不存在替代情形下最优预测时阈的相对大小, 发现需求替代将显著增加预测时阈的长度。

关键词: 预测时阈; 需求替代; 动态批量; 前向算法

中图分类号: F274 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2011)03-0010-14

0 引言

为了应对日益加剧的市场竞争, 满足不断增长的消费者多样化、个性化的需求, 大量的企业对自己的产品线进行了扩展, 在基本产品的基础上衍生出大量存在细微 (颜色、口味、款式等) 差异的系列产品, 运用系列产品来细分市场的需求, 迎合顾客追求差异、彰显个性的心理, 从而达到提高企业竞争力、扩大市场份额、增加利润的目的。高露洁在 1970 年代仅销售两种牙膏, 今天扩展到了 19 种; 哈根达斯在 1961 年生产 3 种口味的冰淇淋: 香草、咖啡和巧克力, 2004 年增长到了 36 种。研究表明大多数的消费品生产企业所拥有的产品种类以每年 10% 的速度增长^[1]。实际上, 这种增长不是仅局限于消费品行业, 其他行业也具有同样现象, 信用卡行业由 20 世纪 60 年代只有少数几种卡发展到今天提供数千种品类^[2]。然而, 多产品的生产, 在深受消费者欢迎的同时, 却给企业的生产决策带来了巨大的挑战。由于多产品之间往往存在替代效应, 且在生产中, 企业对同一类产品, 往往采用混合生产的方式 (如, 采用同一条生

产线交替生产某一类产品)。这些特点使得在做决策时不能简单地将多产品划分为多个独立单产品的组合, 必须要考虑产品之间的替代性、混合生产等因素对决策的影响, 从而使企业的生产决策变得更加复杂和困难。

在企业的实际运作中, 运营经理在做当前生产决策时, 通常需要分析今后一定时期内的订单 (按订单生产, MTO) 或预测数据信息 (按库存生产, MTS)。在获取这些 (需求、成本等) 数据信息的基础上, 通过优化方法决策出合理的生产批量。因此, 运营经理在决策时面临的首要问题是: 应该分析今后多长时间的数据信息? 这一问题在运营管理领域被定义为预测时阈 (forecast horizon) 问题。预测时阈, 即当前周期的决策需要依托未来一定时期内的信息数据的最短时间周期。它的确定对企业至关重要, 因为其长短与未来 (需求、成本等) 数据信息的收集紧密相关, 较长的预测时阈意味着更多的未来信息和数据的加工处理, 预示着大量的人力、物力和时间消耗, 而较短的预测时阈又可能会导致未来信息和数据不完整, 从而影

① 收稿日期: 2009-09-07 修订日期: 2010-04-06

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目 (70932005); 国家自然科学基金资助项目 (70602029)。

作者简介: 慕银平 (1976-), 男, 甘肃镇原人, 博士, 副教授。E-mail: muyinping@uestc.edu.cn

响当前决策结果的准确性. 因而, 合理预测时间直接决定着企业成本的高低和决策结果的准确性, 进一步影响企业的运营效率. 所以, 这一问题已经成为企业动态批量决策中的关键问题. 同时, 也是企业应用 ERP 等决策支持系统的先决条件.

由于多产品具有替代效应、混合生产等不同与单产品的特点, 使得多产品的预测时间决策较单产品更为复杂. 在前期调研中发现, 在无法得到科学依据的前提下, 运营经理在确定预测时间时通常忽略了多产品的替代效应、混合生产等因素, 将多产品作为单产品来处理. 这种决策方式大大降低了决策准确性, 从而导致企业中大量存在同类产品过剩和短缺并存的现象, 企业一方面挣扎于某种产品的高昂的库存成本和过期库存处理费用, 另一方面却忙于加班加点以应付即将到期的另一种产品的订单合同.

Wagner 和 Whitin^[3] 首次提出了预测时间的概念. 他们采用前向算法 (Forward Algorithm) 分析了单一产品生产的预测时间问题, 这就是著名的 W-W 模型. 其后, 单产品预测时间问题得到了大量的研究, 诸如, 能力约束问题、大宗订购问题、易逝品库存问题、离散需求问题等^[4-8]. 同时, 在更广泛的应用领域得到了进一步的拓展: 包括能力扩张问题^[9-10], 现金管理问题^[11-12], 库存管理问题^[11, 13-15], 机器设备更换问题^[16-17], 工厂选址问题^[18-19], 生产计划问题^[20-22], 以及排序和排程问题^[23-24] 等等. 关于单产品预测时间理论和应用研究更为详尽的文献综述请参见文献 [25]. 然而, 这些研究是在假设企业只生产 1 种产品的前提下进行分析的, 结论只适用于产品品种比较单一的企业, 或者即使生产多种产品, 但产品之间相互独立. 这样可将多产品分解为多个单产品, 并分别针对每种产品运用单产品预测时间的研究结论. 如果多产品之间相互关联, 则单产品预测时间的研究结果将不再适用.

多产品预测时间的研究文献非常少, 在可检索的范围内获得惟一一篇文献 (文献 [24]), 该文研究了存在生产转换成本 (changeover cost) 的多产品动态批量模型问题, 通过建立前向分支定界算法分析了最优生产批量和预测时间问题. 但没有考虑多产品之间的替代性, 而替代性恰好是本文考虑的重点所在. 另外, 与本文研究相关的还有

多产品动态批量模型研究, 如: Leopoulos 和 Proth^[26] 研究了存在联合生产成本的多产品动态批量模型, 并通过设计算法求解最优结果; Xu 等^[27] 设计了一套基于动态规划的启发式算法, 分析了数量折扣的多产品动态批量模型问题. 但这两篇文献都没有考虑多产品之间的替代性, 也没有涉及预测时间问题. Swanathan 和 Kucukyavuz^[28] 研究了一家生物技术公司的最优生产批量问题. 该公司生产的 DNA 扩增试剂, 大包装产品能够被转化为特定小包装产品. 然而, 该试剂由一种形态转化为另一种形态是复杂且昂贵的过程, 因为在转化期间, 试剂必须进行合成. 他们针对该问题分别建立了 EOQ 模型和 DLS 模型. 在 DLS 模型中, 假设启动成本、库存成本和转化成本不随时间变化, 并加入了产品生命周期、最大转化数量等约束条件, 采用带约束的最短路径算法进行模型求解. Hu 等^[29] 研究了单向替代的多产品动态批量模型. 他们考虑了两种情形: 1) 一种产品在用于满足另一种产品的需求之前, 需要先通过物理转化为后者方可替代, 该情形会产生转化成本 (conversion cost); 2) 一种产品可以直接用于满足另一种产品的需求而不需要经过任何转化. 他们证明了两种情形下多产品的 DLS 问题都是 NP-难问题, 并运用动态规划方法设计有效算法, 进行了可行解的计算^[29]. 然而, 他们的研究都是在给定预测时间的前提下进行的, 没有考虑最优的预测时间. 国内学者在生产批量计划^[30]、动态算法设计^[31-32] 等方面有大量研究, 但都没有涉及最优预测时间的分析. 因此, 本文将深入研究解决替代性多产品最优预测时间的问题.

1 模型构建

为了简化模型, 重点研究存在向下替代 (downward substitution) 的两产品问题. 假定企业 1 条生产线交替生产两种产品: 产品 1 和产品 2. 产品 1 在技术或者材料上优于产品 2. 每次只能生产 1 种产品, 当产品 2 缺货而产品 1 有存货时, 企业可以选择生产产品 2 或用产品 1 进行替代以满足产品 2 的需求. 生产从一种产品转换到另一种产品将发生生产转换成本 $K (K > 0)$, 用高等级产品替代低等级产品将产生替代成本 $w (w > 0)$ (如,

高等级产品多支出的原材料成本、加工成本、存储成本等)。产品从一个周期储存到下一周期会发生库存成本。这种现象在现实中是比较普遍的,一些中小企业通常一条生产线生产两种及两种以上的系列产品,产品生产过程中存在生产转换,同时产品之间存在需求替代。如,曾经调研的某中药生产企业一条生产线生产多种药品,当生产从一种药品转换到另一种药品时,需要清洗生产线且晾干,期间需要停产,且同一种药品不同剂型之间存在替代性,如口服液可以替代胶囊。本文的研究模型可以拓展到两种以上产品的情形。

1.1 符号定义

在模型构建中需要定义如下符号。

T : 时间周期;

$P(t)$: t -周期问题, $t = 1, 2, \dots, T$

d_i : 周期 t 产品 i 的需求, $i = 1, 2, t = 1, 2, \dots, T$

h_i : 周期 t 产品 i 的单位库存成本, $i = 1, 2, t = 1, 2, \dots, T$

x_t : 周期 t 产品 i 的生产数量, $i = 1, 2, t = 1, 2, \dots, T$

I_i : 周期 t 期末产品 i 的库存水平, $i = 1, 2, t = 1, 2, \dots, T$

Y_t : 周期 t 产品 1 替代产品 2 的数量, $t = 1, 2, \dots, T$

S_1 : 生产从产品 1 转换到产品 2 的转换点 (转换周期);

S_2 : 生产从产品 2 转换到产品 1 的转换点 (转换周期);

S : 生产转换点集合, $i = 1, 2$

令

$$\alpha(x_{t+1}, x_t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x_{t+1} > 0 \text{ 且 } x_t > 0 \text{ 且 } i \neq j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

因此,当且仅当生产从产品 1 转换到产品 2 或从产品 2 转换到产品 1, $\alpha(x_{t+1}, x_t)$ 等于 1。企业的目标是在最优的预测时阈 T 的范围内达到生产转换成本、库存持有成本和替代成本之和最小。目标函数表述为

$$\sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 K \alpha(x_{t+1}, x_t) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 h_i I_{i,t} + \sum_{t=1}^T Y_t \quad (1)$$

约束条件

$$I_t = I_{t+1} + x_t - Y - d_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1a)$$

$$I_t = I_{t+1} + x_t + Y - d_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1b)$$

$$I_1, I_T = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1c)$$

$$x_t \leq (d_t + \sum_{i=1}^T d_i) z_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1d)$$

$$x_t \leq \sum_{k=1}^T d_k z_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1e)$$

$$z_t + z_{t+1} = 1, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1f)$$

$$I_t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1g)$$

$$x_t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1h)$$

$$Y_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1i)$$

$$z_t \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1j)$$

约束条件 (1a) 和 (1b) 分别代表产品 1 和产品 2 的库存平衡。

(1c) 表示期初和期末两种产品的库存均为 0。(1d) - (1f) 和 (1i) 表示每周期仅生产 1 种产品, 产品 1 或产品 2 以及每种产品各周期的最大生产量。其余的约束条件保证了库存水平、生产数量以及替代数量的非负性。

1.2 再生点、转换点及其基本假设

寻找预测时阈的基本思想是: 对于周期 t , 若 $T > t$ 之后所有周期的需求、成本等因素的变化不会影响周期 t 的决策, 则 T 为周期 t 的预测时阈。为了进一步分析该问题, 需要界定如下定义。

定义 1 给定 T -周期问题的最优解, 若 $I_t = 0, i = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ 则定义周期 t 为再生点 (regeneration point)。

定义 2 给定 T -周期问题的最优解, 若 $x_{t+1} > 0$ 且 $x_t > 0, i \neq j, 1 \leq t \leq T$ 则定义周期 t 为转换点 (switching point)。

直观上讲, 再生点是动态生产批量的重新启动点, 而转换点是生产由一种产品转换到另一种产品的时间点 (周期)。根据相邻两个再生点之间产品转换的次数 (转换点的个数), 可以将再生点分为不同的类型。

1) I 类再生点 考虑再生点 j , 假设周期 $j+1$ 生产产品 1 仅满足两种产品在该周期的需求。因而周期 $j+1$ 结束时两种产品的库存均为 0 故周期 $j+1$ 也是再生点 (见图 1)。定义这样的再生点 j 为 I 类再生点。

2) II 类再生点 考虑再生点 j , 假设周期 $j+1$ 生产产品 1 以满足 $\forall t \geq 2$ 周期产品 1 的需求和一周期产品 2 的需求。周期 $j+2$ 生产从产品 1 转换到产品 2 直到周期 $j+l$, 每周期仅生产产品 2 以满足

产品 2 当期的需求 (见图 1)。因而, $j+2$ 是生产转换点, $j+1$ 是再生点。定义这样的再生点为 II 类再生点。

3) III 类再生点 考虑再生点 j , 假设周期 $j+1$ 生产产品 1 以满足 $k \geq 2$ 周期产品 1 的需求和一周产品 2 的需求 (见图 1)。周期 $j+2$ 生产从产品 1 转换到产品 2 直到 $j+1-k$, 每期仅生产产品 2 以满足产品 2 当期的需求。周期 $j+1$ 生产产品 2 以满足 $k \geq 2$ 周期产品 2 的需求。周期 $j+1$ 生产从产品 2 转换到了产品 1 直到 $j+1-k-1$, 每期生产产品 1 仅满足产品 1 当期的需求。因此, $j+2$ 和 $j+1-k-1$ 是生产转换点, $j+1-k-1$ 是再生点。定义这样的再生点为 III 类再生点。

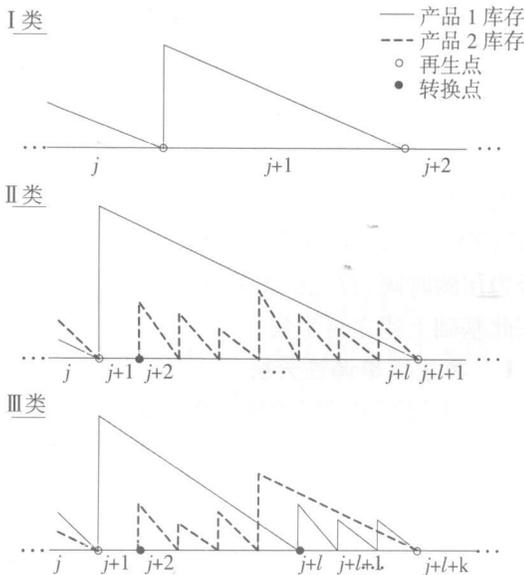


图 1 3 类基本的再生点示意图

Fig 1 The three types of regeneration points

综上, 考虑两个连续的再生点 j 和 $k+1$ 。如果 j 和 $k+1$ 之间没有发生生产转换, 则 j 是 I 类再生点; 2) 如果 j 和 $k+1$ 之间只发生 1 次生产转换, 则 j 是 II 类再生点; 3) 如果 j 和 $k+1$ 之间有两次生产转换, 则 j 是 III 类再生点。

以此类推, 如果 j 和 $k+1$ 之间存在 $n-1$ ($n \geq 1$) 次生产转换, 则 j 将是 I 类再生点。图 2 显示了 VI 类再生点的结构。因此, T-周期问题的预测时阈求解将显得异常复杂。相关的研究文献给出了同样的结论。Mukhopadhyay^[33] 研究的多产品共用仓库容量问题, Sulmi^[34] 研究的多产品联合启动成本问题, 都无法得出最优策略的结构。

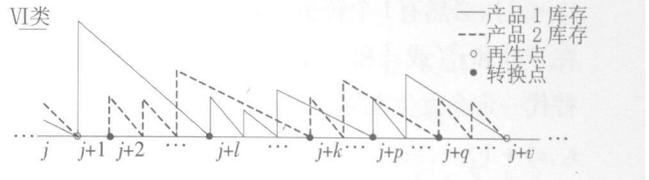


图 2 VI 类再生点示意图

Fig 2 The regeneration point of type VI

现实中, 再生点代表了新的生产计划的开始^[35-36], 因此在存在转换成本的情况下, 企业通常不会频繁转换生产品类。因而, 本文将集中研究两个相邻再生点之间存在不超过两次生产转换的问题。这一假设将再生点的类型限制在只有 3 类, 即 I 类、II 类和 III 类。该假设一方面使得预测时阈问题在求解上变得可行。因为从理论上讲, 要获得最优预测时阈, 必须保证各再生点的单调性, 而如果考虑 I 种类型的再生点, 则再生点的单调性将无法获得, 从而将难以求得最优预测时阈。另一方面, 只有 3 类再生点的问题, 其解是原问题很好的近似解, 比较数值仿真的 8910 个问题发现, 只有 3 类再生点的问题的计算结果与最优解的平均偏差为 8.40%。最大偏差出现在两种极端的情况下: 1) 转换成本非常低的 (占 22.9%); 2) 替代成本非常高的 (占 13.4%)。在这种极端情况下, 可能会没有替代发生, 因为转换成本小于替代成本 (现实中这种情况几乎不可能发生)。当去掉这些极端情况后, 近似解和最优解之间仅相差 1.96%。因而, 这样的假设是非常合理, 也是非常可行的。

从而, 得到如下定理。

定理 1 设 $\{t_i\}$ 是任意连续的生产转换点, 且 $\{t_i\} \in S$ ($i=1, 2$), 则 t_i 之间至少存在 1 个再生点。

定理 2 设 $\{t_i\}$ 是任意连续的生产转换点, 且 $\{t_i\} \in S$ ($i=1, 2$), 若 t_i 之间存在正的需求替代, 则 $P(T)$ 的所有再生点一定属于 I 类、II 类或 III 类。

定理 1 可以通过定理 2 直接获得, 因此, 下面重点证明定理 2。

证明 基于生产转换的次数, 分别从 3 方面证明该定理。

1) 考虑生产转换集合 S (生产从产品 1 转换到产品 2) 中 3 个相邻的转换点 t_1, t_2 和 t_3 ($t_1 <$

$\xi < \zeta$, 必然有 1 个转换点 $\eta \in S$ (或 $\xi \in S$) 存在于 ξ 和 ζ (或 ξ 和 ζ) 之间 (如图 3 所示). 因此, 替代一定会发生在周期 $\xi, \xi+1, \dots$, 或 $\zeta-1$ (或 $\xi, \xi+1, \dots$, 或 $\zeta-1$), 并直到 $\zeta-1$ (或 $\xi-1$) 结束. 如果替代开始于周期 ξ 则周期 $\xi-1$ 直到 $\xi-3$ 都是 I 类再生点. 如果替代开始于周期 $\xi+1$ 则周期 ξ 直到 $\zeta-3$ 都是 I 类再生点. 周期 $\zeta-2$ 在任何情况下都是再生点, 它的类型取决于周期 ξ 和 $\zeta-1$ 之间发生替代的情况. 如果替代开始于周期 ξ 则周期 $\zeta-2$ 是 II 类再生点; 否则, 是 III 类再生点.

2) 假设计算结果中, 生产转换集合 S 中只有两个转换点 ξ 和 ζ 那么其间必然存在 1 个转换点 $\eta \in S$. 如果 ξ 和 T 之间存在另一个转换点 $\zeta \in S$ 则讨论过程和 1) 类似. 否则, 不难看出 ① 存在于 ξ 和 ζ 之间的再生点属于 I 类或 II 类; ② 周期 ξ 之前的再生点属于 I 类、II 类或 III 类的任何一类.

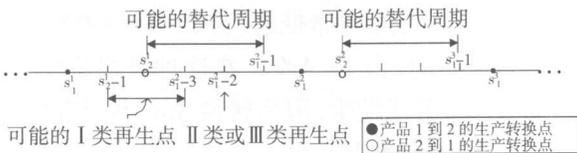


图 3 定理 2 证明的再生点和生产转换点示意图

Fig 3 The switching point and regeneration point of Theorem 2

3) 假设计算结果只有一个转换点 $\xi \in S$, 则再生点的类型取决于是否存在转换点 $\zeta \in S$. 如果存在 ζ , 则 ξ 和 T 之间有替代发生, 因此 ξ 和 T 之间所有的再生点都是 I 类再生点. 否则, 如果 ξ 和 T 之间没有任何生产转换, 则 ξ 和 T 之间不存在再生点, 而周期 ξ 之前的再生点属于 I 类或 II 类. 证毕.

上述定理表明在企业的生产计划中, 如果任意相邻两次生产转换 (一次从高 (低) 质量产品转换到低 (高) 质量产品, 一次从低 (高) 质量产品转换到高 (低) 质量产品) 之间, 企业采用高质量产品替代了低质量产品的部分需求, 则该生产计划的生产转换次数一定不会超过两次. 该定理为企业判定生产计划的合理性提供了简便易用的经验法则.

2 最优预测时间

对于多周期的动态批量决策问题, 决策时间 (decision horizon) 是指当前必须做出的今后一定时期 τ 的决策. 而预测时间 T 指周期 $N \geq T+1$ 的 (需求、成本等) 因素不影响决策时间 τ 的决策结果. 因此, 如果 T 是预测时间, 则 τ 的最优决策在 $T-1$ 周期问题和 $N-1$ 周期问题下是相同的. 从而, 便没有必要预测 T 周期以后的数据信息. 为了验证 T 是否为预测时间, 引入再生集 (regeneration set) 的概念. 该概念由 Lundin 和 Morton^[37] 提出, 令 $j(T) > 0$ 表示 $P(T)$ 最优解的最后一个再生点, $\langle j(T), T-1 \rangle = \{j(T), j(T)+1, \dots, T-1\}$, 在 $j(T)$ 单调的情况下, 任意更长周期的问题 $P(N), N \geq T+1$ 至少有 1 个最优解的再生点属于集合 $\langle j(T), T-1 \rangle$. 因此, 如果所有的问题 $P(\tau), \tau \in \langle j(T), T-1 \rangle$ 存在共同的 τ 周期决策, 则 T 为预测时间. 其中, 集合 $\langle j(T), T-1 \rangle$ 定义为再生集. 因此, 要判断 T 是否为预测时间, 首先必须验证 $j(T)$ 的单调性, 并在此基础上建立再生集.

2.1 再生点单调性分析

对于问题 $P(T)$ 的最优解, 假设 $j(T)$ 是最后 1 个 ($i=1, 2, 3$) 类再生点 (如果存在的话), 否则, $j(T) = 0$.

引理 1 最优生产转换点 ξ^* (生产从产品 2 转换到产品 1) 在 T 周期内是单调的. 即, $\xi^*(T+1) \geq \xi^*(T)$.

证明 令 $C_{j(T)}^*(T)$ 表示最后 1 个再生点是 $j(T)$ 时 $P_3(T)$ 的最优成本, 其中, $P_3(T)$ 表示仅存在 III 类再生点的 $T-1$ 周期问题. $C(j(T))$ 表示问题 P_3 前 j 期的最优成本; $C(j(T), \xi^*(T), \xi^*(T), T)$ 表示问题 P_3 从 $j+1$ 期到 T 期的最优成本, 其中, 生产在 ξ 从产品 1 转换到产品 2 在 ξ 从产品 2 转换到产品 1. 假设 $\xi^*(T)$ 是 $P_3(T)$ 最优解的最后 1 个生产从产品 2 转换到产品 1 的转换点, $\xi^*(T+1)$ 是 $P_3(T+1)$ 最优解的最后 1 个产品 2 转换到产品 1 的生产转换点. 则

$$C_{j(T)}^*(T) = C(j(T)) + C(j(T), \xi^*(T), \xi^*(T), T)$$

对于 $k \in \{0, 1, \dots, \xi_2^*(T) - \xi_1^*(T) - 1\}$, 有

$$C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T), T) \leq C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T) - k, T)$$

对于问题 $P_3(T+1)$ 有

$$C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T), T) + \sum_{t=\xi_2^*(T)}^{T+1} h_t d_{T+1} \leq C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T) - k, T) + \sum_{t=\xi_2^*(T)-k}^{T+1} h_t d_{T+1}$$

因为

$$C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T), T+1) = C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T), T) + \sum_{t=\xi_2^*(T)}^{T+1} h_t d_{T+1}$$

且

$$C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T) - k, T+1) = C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T) - k, T) + \sum_{t=\xi_2^*(T)-k}^{T+1} h_t d_{T+1}$$

因此

$$C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T), T+1) \leq C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T) - k, T+1)$$

从而, 可得 $\xi_2^*(T+1) \geq \xi_2^*(T)$. 证毕.

下面分析各类再生点的单调性.

定理 3 对于每一类再生点 (I 类、II 类或 III 类), 最后 1 个最优的再生点在周期 T 内是单调的. 即, $\underline{j}^*(T+1) \geq \underline{j}^*(T)$, $i = 1, 2, 3$.

证明 分别针对每一类再生点进行分析.

1) I 类再生点 假设 $\underline{j}^*(T)$ 是 $P(T)$ 最优解的最后 1 个 I 类再生点, $\underline{j}^*(T+1)$ 是 $P(T+1)$ 最优解的最后 1 个 I 类再生点. 如果 $\underline{j}^*(T) = t$ ($0 \leq t < T$), 则当 $P(T+1)$ 最优解的最后 1 个再生点是 I 类再生点, $\underline{j}^*(T+1) = T$; 当 $P(T+1)$ 最优解的最后 1 个再生点是 II 类或 III 类再生点, $\underline{j}^*(T+1) = t$. 因此, $\underline{j}^*(T) \leq \underline{j}^*(T+1)$.

2) II 类再生点 假设 $\underline{j}^*(T)$ 是 $P(T)$ 最优解的最后 1 个 II 类再生点, $\underline{j}^*(T+1)$ 是 $P(T+1)$ 最优解的最后 1 个 II 类再生点. 由于

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T) = C_{\underline{j}^*(T)}(T) + C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), T)$$

且

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T+1) = C(\underline{j}^*(T), T) + C(\underline{j}^*(T), T)$$

$$\xi_1^*(T), T+1)$$

对于 $k \in \{0, 1, \dots, \underline{j}^*(T)\}$, 有 $C_{\underline{j}^*(T)}(T) \leq C_{\underline{j}^*(T)-k}(T)$. 因此, 对于 $P(T+1)$ 问题, 有

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T) + \sum_{t=\xi_1^*(T)}^{T+1} h_t d_{T+1} \leq C_{\underline{j}^*(T)-k}(T) + \sum_{t=\xi_1^*(T)-k}^{T+1} h_t d_{T+1}$$

因为

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T+1) = C_{\underline{j}^*(T)}(T) + \sum_{t=\xi_1^*(T)}^{T+1} h_t d_{T+1}$$

且

$$C_{\underline{j}^*(T)-k}(T+1) = C_{\underline{j}^*(T)-k}(T) + \sum_{t=\xi_1^*(T)-k}^{T+1} h_t d_{T+1}$$

所以

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T+1) \leq C_{\underline{j}^*(T)-k}(T+1)$$

从而, 可得 $\underline{j}^*(T) \leq \underline{j}^*(T+1)$.

3) III 类再生点 假设 $\underline{j}^*(T)$ 是 $P(T)$ 最优解的最后 1 个 III 类再生点, $\underline{j}^*(T+1)$ 是 $P(T+1)$ 最优解的最后 1 个 III 类再生点. 由于

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T) = C(\underline{j}^*(T)) + C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T), T)$$

且

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T+1) = C(\underline{j}^*(T)) + C(\underline{j}^*(T), \xi_1^*(T), \xi_2^*(T+1), T+1)$$

由引理 1 知道, $\xi_2^*(T) \leq \xi_2^*(T+1)$. 为了简化方程式, 令 ξ_2^* 表示 $\xi_2^*(T)$, ξ_2^{**} 表示 $\xi_2^*(T+1)$.

对于 $k \in \{0, 1, \dots, \underline{j}^*(T)\}$, 有 $C_{\underline{j}^*(T)}(T) \leq C_{\underline{j}^*(T)-k}(T)$. 考虑问题 $P(T+1)$, 有

$$C_{\underline{j}^*(T)}(T) + \sum_{t=\xi_2^*}^{2\xi_2^*-1} \sum_{p=t}^{2\xi_2^*-1} h_t d_p - \sum_{t=\xi_2^*}^{2\xi_2^*-1} \sum_{p=t}^{2\xi_2^*-1} h_t d_p + \sum_{t=\xi_2^*}^{T+1} h_t d_{T+1} \leq$$

$$C_{\underline{j}^*(T)-k}(T) + \sum_{t=\xi_2^*}^{2\xi_2^*-1} \sum_{p=t}^{2\xi_2^*-1} h_t d_p - \sum_{t=\xi_2^{**}}^{2\xi_2^{**}-1} \sum_{p=t}^{2\xi_2^{**}-1} h_t d_p + \sum_{t=\xi_2^{**}}^{T+1} h_t d_{T+1}$$

因此, $C_{\underline{j}^*(T)}(T+1) \leq C_{\underline{j}^*(T)-k}(T+1)$, 从而可得, $\underline{j}^*(T) \leq \underline{j}^*(T+1)$. 证毕.

定理 3 表明对每一类再生点来说, 最后 1 个最优再生点在周期 T 内是单调的. 然而, 对 $T-1$ 周期问题, 最优解是 3 类再生点任意可能的组合, 因此最后 1 个再生点并非一定是单调的. 该定理告诉企业制定可替代多产品的生产计划较单一产品需

要考虑今后更长期的需求及成本信息. 令 $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ ($i = 1, 2, 3$) 代表问题 $P(t)$ 的最优解含有 i 类再生点的最大周期, 则由定理 3 立即可得如下推论.

推论 1 $j = \min\{j(t), j_2(t), j_3(t)\}$, 则 j 在周期 T 内是单调的. 即 $j(T+1) \geq j(T)$.

2.2 再生集构造

根据推论 1 的结论, 如果 $j > 0$ 则构造集合 $G_T(T) = \{j, j+1, \dots, T-1\}$. 对于 $t \in G_T(T)$, 令 $F^t(T)$ 表示 t 作为最后再生点的 $T-t$ 周期问题. 在 $F^t(T)$ 的最优结果中, 令 $x_1^*(t)$ 表示周期 1 的最优 (产品 1) 生产数量, $f^*(t)$ 表示 $x_1^*(t)$ 覆盖的需求周期数. 根据 Lund 和 Moroh³⁷, Sethi 和 Chand³⁸ 可得如下特性:

如果对于任意 $t \in G_T(T)$, $x_1^*(t)$ 保持不变, 则 T 是预测时间, $f^*(t)$ 是相应的决策时间.

下面需要设计算法求解 $F^t(T)$, 其中 t 表示 $T-t$ 周期问题最后的再生点, 并比较再生集中所有元素作为最后再生点的 $T-t$ 周期问题的最优结果是否具有相同的 $x_1^*(t)$. 因此, 对于每一个 t 需要计算 $P(t)$, $t \leq T$ 从而只要能够设计出一款算法计算 $P(T)$, 则该算法同样可以很容易的计算出 $P(t)$.

对于 $P(T)$, 由前面的符号定义可知, $C(T)$ 表示最优成本, $C(T) = \min_{0 \leq j \leq T} C_j(T)$, 其中, $C_j(T)$ 表示当 j 作为最后 1 个再生点时 $P(T)$ 的最优成本. 因为 j 是最后 1 个再生点, 因此, j 和 T 之间存在 3 种可能性 (由定理 2 知): 1) 没有生产转换, 即 $j = T-1$; 2) 只有 1 次生产转换, 即 $0 \leq j \leq T-2$; 3) 有两次生产转换, 即 $0 \leq j \leq T-3$. 因此,

$$C_j(T) = C(j) + \begin{cases} C(j, T), & \text{如果 } j = T-1 \\ C(j, j, T), & \text{如果 } j = T-2 \\ \min_{j_1 \leq j_2 \leq T} \{C(j, j_1, T), C(j, j_1, j_2, T)\}, & \text{如果 } 0 \leq j \leq T-3 \end{cases} \quad (2)$$

其中

- a) $C(j)$ 是问题 P 期初 j 周期的最优成本;
- b) $C(j, T)$ 是问题 P 从周期 $j+1$ 到 T 的最优成本, 且 j 和 T 之间没有生产转换. 因此, $C(j, T) = \omega d_{j+1}$.

c) $C(j, j, T)$ 是问题 P 从周期 $j+1$ 到 T 的最优成本, 且在周期 j 生产从产品 1 转换到产品 2. 因此

$$C(j, j, T) = \omega d_{j+1} + K + \sum_{t=j+2}^T \sum_{k=1}^T h_1 d_k$$

d) $C(j, j_1, j_2, T)$ 是问题 P 从周期 $j+1$ 到 T 的最优成本, 且在周期 j 生产从产品 1 转换到产品 2, 周期 j_1 生产从产品 2 转换到产品 1. 因此,

$$C(j, j_1, j_2, T) = \min_{j_1 \leq j_2 \leq T} \left\{ \omega d_{j+1} + 2K + \sum_{t=j+2}^{j_1-1} \sum_{k=1}^{j_1-1} h_1 d_k + \sum_{t=j_2}^T \sum_{k=j_2}^T h_2 d_k \right\}$$

直观来讲, 如果最后 1 个再生点是 $j = T-1$, 则 j 和 T 之间没有生产转换点. 因此, 该再生点为 I 类再生点, $C_j(T) = C(j) + C(j, T)$. 如果最后 1 个再生点是 $j = T-2$ 则 j 和 T 之间一定存在 1 个生产转换点. 因此, 该再生点为 II 类再生点, $C_j(T) = C(j) + C(j, j, T)$. 如果最后 1 个再生点 $j \leq T-3$ 则有两种可能:

- ① j 和 T 之间仅有 1 个生产转换点, 则 $C_j(T) = C(j) + C(j, j, T)$
- ② j 和 T 之间有两个生产转换点, 则 $C_j(T) = C(j) + C(j, j_1, j_2, T)$

由于两种可能都必须考虑, 因此 $C_j(T) = C(j) + \min_{j_1 \leq j_2 \leq T} \{C(j, j_1, T), C(j, j_1, j_2, T)\}$

运用 Wagne 和 Whitin³¹ 采用的前向算法通过递归方程 (2) 来计算 $P(T)$ 的最优结果. 算法的复杂度为: 首先, 需要计算 $C_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, t-1$, $t = 1, 2, \dots, T$) 的值 $O(T^3)$ 次. 对于固定的 j 和 t 在方程 (2) 中需要考虑 3 种可能性, 总共需要考虑 $O(t-j-2)$ 次 ($j+3 \leq j_2 \leq t$) 的值. 因此, 计算 $P(T)$ 最优值的时间复杂度为 $O(T^3)$.

下面举例分析最优预测时间的求解过程.

例 1 假设产品 1 和产品 2 前 10 周期的需求分别为 (3 4 6 4 2 3 7 4 2 4) 和 (2 3 5 3 1 2 6 3 1, 3). 生产转换成本 $K=7$, 替代成本 $w=4$, 库存持有成本 $h_i = 1$ ($i = 1, 2$, $t = 1, 2, \dots, 10$). 令 x_2^t 表示产品 2 在周期 $t = j-1$ 的最优产量, 其中 j 表示生产从产品 2 转换到产品 1 的第一个转换点. 令 f^t 表示 x_2^t 所覆盖的需求周期数. 设 $C(0) = 0$, $C_0(0) = 0$. 通过前向算法的计算, 结果如表 1 所示.

表 1 例 1 最小预测时间计算结果

Table 1 The minimal forecast horizon of example 1

T	$\hat{f}_1(T)$	$\hat{f}_2(T)$	$\hat{f}_3(T)$	$\hat{f}_4(T)$	$x_{11}^*(T)$	$x_{21}^*(T)$	$f_1(T)$	$f_2(T)$	C(T)
1	0	0	0	0	5	0	1	0	8
2	0	0	0	0	9	3	2	1	19
3	0	0	0	0	9	8	2	2	31
4	0	0	0	0	9	11	2	3	37
5	0	0	0	0	9	12	2	4	40
6	5	0	0	0	9	12	2	4	48
7	5(T=6)	5	0	0	9	12	2	4	62
8	5(T=6)	5(T=7)	4	4	9	12	2	4	70
9	5(T=6)	5(T=7)	4	4	9	12	2	4	73
10	5(T=6)	5(T=7)	5	5	9	12	2	4	83

因为, $\hat{f}_3(8) = 4 > 0$ 因此 $G_8(8) = \{4, 5, 6, 7\}$. 从表 1 可以看出, $x_{11}^*(4) = x_{11}^*(5) = x_{11}^*(6) = x_{11}^*(7) = 9$ 因此, 周期 $T=8$ 是周期 1 决策的最小预测时间. 相应的决策时间是 $\hat{f}_1 = 2$

值得一提的是, 本文研究的问题与单产品的 DLS 问题存在一个重要的差异. 对于单产品问题, 周期 1 的决策通常覆盖了第一个再生点之前所有周期的需求. 然而, 这种结论在本文研究的两产品问题中不一定成立. 由例 1 可以看出, $x_{22}^*(4) \neq$

$x_{22}^*(5)$, 因此可知, $T=8$ 并不是第 1 个再生点 (周期 4) 的预测时间. 由于 $\hat{f}_1(10) = 5$, $x_{11}^*(5) = x_{11}^*(6) = \dots = x_{11}^*(9) = 9$ 且 $x_{22}^*(5) = x_{22}^*(6) = \dots = x_{22}^*(9) = 12$, 因此 $T=10$ 是决策覆盖第 1 个再生点的最小预测时间.

接下来, 比较存在替代和不存在替代的两产品最优预测时间. 用前向算法分别独立计算产品 1 和产品 2 的最优预测时间, 计算结果如表 2 所示.

表 2 两产品独立时的最小预测时间

Table 2 The minimal forecast horizon for without substitution between two products

产品 1											产品 2											
T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
d_{1t}	2	3	5	3	1	2	6	3	1	3	d_{2t}	3	4	6	4	2	3	7	4	2	4	
$\hat{f}_1(T)$	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	$\hat{f}_2(T)$	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
$\hat{f}_3(T)$	0	0	2	2	2	2	6	6	6	9	$\hat{f}_4(T)$	0	0	2	2	2	5	6	6	6	9	
1	⑦	⑩	20	29	33	43	79	100	108	135	1	⑦	⑪	23	35	43	58	100	128	144	180	
2		14	19	25	28	36	66	84	91	115	2		14	20	28	34	46	81	105	119	151	
3			⑬	⑳	㉒	㉓	52	67	73	94	3			⑱	㉒	㉔	35	63	83	95	123	
4				24	25	29	47	59	64	82	4				25	27	33	54	70	80	104	
5					27	29	41	50	54	69	5					29	㉖	46	58	66	86	
6						29	35	39	42	48	6						33	40	45	49	56	
7								⑳	㉑	49	7							㉑	㉒	㉓	59	
8									42	43	49	8								46	48	56
9										45	48	9									50	54
10											⑳	10										⑳

由表 2可知 $\hat{j}(3) = 2 > 0$ $G(3) = \{2\}$. 因此, 周期 $T=3$ 分别是产品 1 和产品 2 的最小预测时间, 与存在替代的最小预测时间 $T=8$ 相比, 替代导致预测时间增加 167% $((8 - 3)/3 = 167\%)$. 然而, 替代的灵活性使总成本减少 18% $((47 + 54 - 83)/101 = 18\%)$.

上述计算结果表明, 产品替代和混合生产可以降低企业成本和提高企业效益, 但与此同时却增加了企业生产决策的复杂性, 即预测时间长度增加. 因此, 企业在实际生产运营决策中, 要利用产品替代和混合生产等方式提高经营效率, 必须同时提高获取和处理未来数据信息的能力.

3 数值实验及管理启示

通过构造数值试验来进一步理解存在替代的两产品预测时间的特征. 根据 Chan 和 Morton^[1] 和 Dawand 等^[8] 的研究, 设计了本文的实验环境. 通过函数 $D_{i+1} = D_0(G)^i$ ($i = 1, 2$), 来产生各周期的需求均值, 其中 G 反应了市场需求递增、递减和不变的特征, 分别取值 1.000 (需求不变), 1.005 (需求递增) 和 0.995 (需求递减). 当需求均值确定之后, 各个周期的实际需求通过函数 $D_{i+1} = D_0(G)^i + SD_0\xi$ ($i = 1, 2$) 产生. 其中 ξ 为标准正态变量, S 表示需求波动的程度, 分别取值 0.15 0.50 和 1.15. 产品 1 的基准需求 D_0 设为 20. 产品 2 的基准需求 D_{20} 分别取值 15、20 和 25. 任何情况下, 如果产品需求小于 1 则设定为 1. 设库存成本 h ($i = 1, 2$) 为 1, 取替代成本 w 为 2 4 6. 生产转换成本 K 取 10 个值: 10 15 20 30 50 75 100 150 200 和 300. 对每一组参数组合, 运行 11 次 (为了方便找到中值). 因此, 本实验运行的总次数为 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 10 \times 11 = 8910$.

图 4 描述了预测时间作为生产转换成本和产品 2 基准需求函数的变化趋势. 其中产品 2 的基准需求 D_{20} 取 15 20 25 S 为 0.50 G 等于 1.000 w 设为 4. 对于 D_{20} 的每一个值, 预测时间中值随着生产转换成本的增加而显著递增. 在给定生产转换成本不变的前提下, 预测时间中值随着产品 2 基准需求 D_{20} 的增大而减小. 主要原因是当 D_{20} 增

加时, 产品 2 的需求将增大, 因而生产从产品 1 转换到产品 2 的周期将缩短, 即生产转换点减少, 从而最优预测时间将减小.

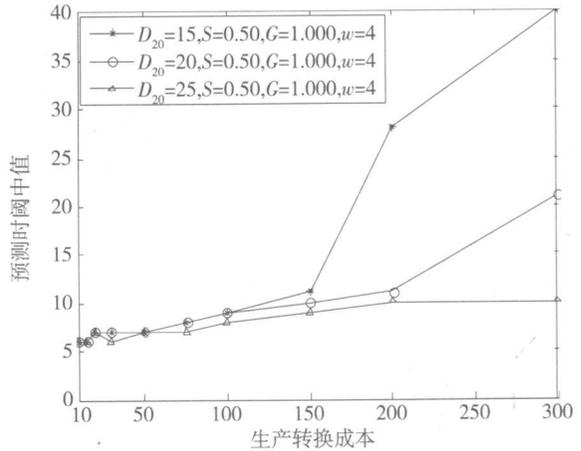


图 4 作为生产转换成本和产品 2 基准需求函数的预测时间中值
Fig. 4 The median values of forecast horizons as a function of changeover cost and base demand of product 2

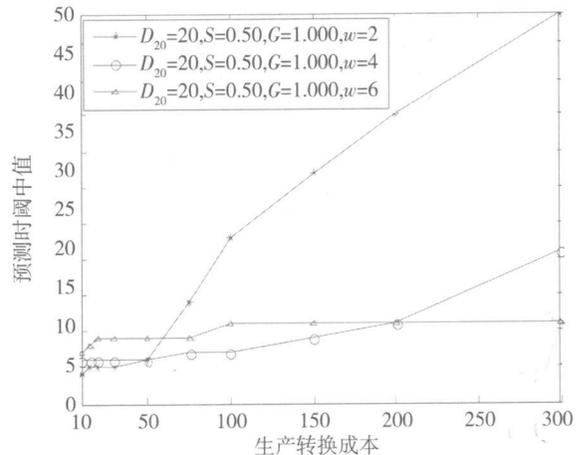


图 5 作为生产转换成本和替代成本函数的预测时间中值
Fig. 5 The median values of forecast horizons as a function of changeover cost and substitution cost

从而告诉企业, 如果企业生产的低等级产品的市场需求较高, 则在做生产决策时只需要考虑未来较短时期的数据信息, 反之, 则需要处理较长周期的数据信息, 以确定更为准确的生产批量. 同时, 如果生产转换成本较低, 则考虑未来信息的周期较短, 否则, 需要分析更长周期的数据信息.

图 5 描述了预测时间作为生产转换成本和替代成本函数的变化趋势. 替代成本 w 取 2 4 6 S 为 0.50 G 等于 1.000 D_0 设为 20. 对于 w 的每

一个值, 预测时阈中值随着生产转换成本的增加而显著递增. 在生产转换成本不变的前提下, 当生产转换成本很小时, 预测时阈中值随着 w 的增加而递增, 当生产转换成本较大时, 预测时阈中值随着 w 的增加而递减. 主要原因是一方面, 随着 w 的增加, 生产从产品 1 转换到产品 2 的周期将会缩短. 另一方面, w 的增加会延长生产从产品 2 转换到产品 1 的周期. 因此, 存在一个权衡, 当生产转换成本很低时, w 增加导致生产从产品 2 转换到产品 1 的周期延长, 超过了生产从产品 1 转换到产品 2 的周期缩短, 因而表现出最优预测时阈随着 w 增加而递增. 当生产转换成本较大时, w 增加导致生产从产品 2 转换到产品 1 的周期延长小于生产从产品 1 转换到产品 2 的周期缩短, 因而表现出最优预测时阈随着 w 增加而递减.

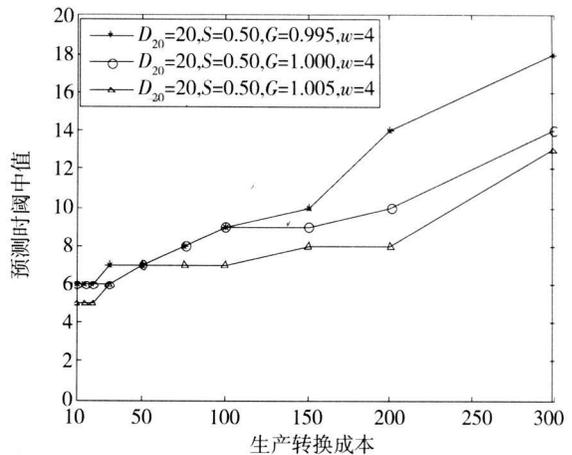
因而, 企业在实际生产决策过程中, 还需要根据替代成本与生产转换成本的相对大小来确定采集未来需求、成本信息的周期. 如果替代成本相对生产转换成本较大, 则随着替代成本的增加, 对未来信息的需求周期将会加长; 如果替代成本相对生产转换成本较小, 则随着替代成本的增加, 对未来信息的需求周期将会缩短.

同样发现, 预测时阈中值随着生产转换成本的增加而递增, 随着需求增长参数 G 和需求波动参数 S 的增加而递减 (图 6 (a), 图 7 (a)). 直观的解释是随着需求增长参数 G 的增加, 下一周期的需求将会增大, 从而增加了生产转换的频率, 因此最优预测时阈将减小. 对于需求波动参数来说, 越大的 S 预示着需求的波动更大, 从而遇到较大需求的概率将提高. 因此, 最优预测时阈将缩短.

从而, 对企业来说, 如果今后需求的总体趋势是逐渐增长的, 且需求波动很大, 则在做当前的生产计划时, 只需要分析相对较短时期的未来数据信息; 反之, 如果需求的总体趋势是递减的, 且需求比较平稳, 则反而需要考虑今后更长一段时期的需求、成本信息.

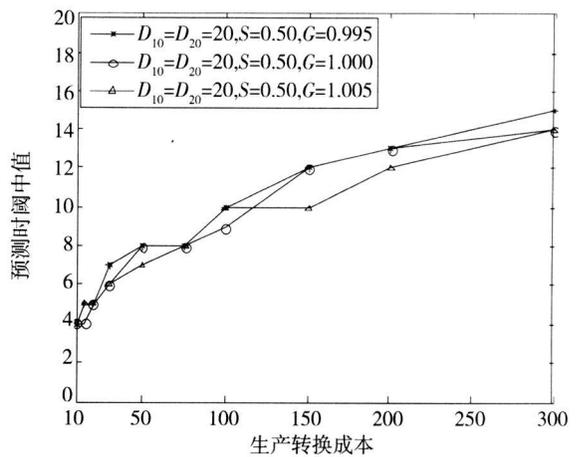
接下来分析两种产品之间存在替代和不存在替代对最优预测时阈的影响. 通过比较发现, 当产品之间存在替代时, 将会显著增加预测时阈的长度 (如图 6 7 8 所示). 主要原因是: 替代带来了额

外的决策柔性从而扩展了可行决策的集合. 直观上讲, 相对于没有替代而言, 替代增加了每个周期决策的“复杂性”, 因此, 当期的决策要求在更大的可行解集合中进行选择, 而该可行解集合只有通过优化具有更长决策期限的问题才可以得到.



(a) 存在替代

(a) With substitution



(b) 不存在替代

(b) Without substitution

图 6 作为生产转换成本和需求增长函数的预测时阈中值

Fig. 6 The median values of forecast horizons as a function of setup cost and demand growth

实际中, 如果企业想利用需求替代性来增加企业的效益, 则必须具有处理复杂决策的能力. 即, 较不考虑需求替代的单一产品而言, 需要收集、处理更长周期的未来信息, 以做出更加准确的当前生产决策.

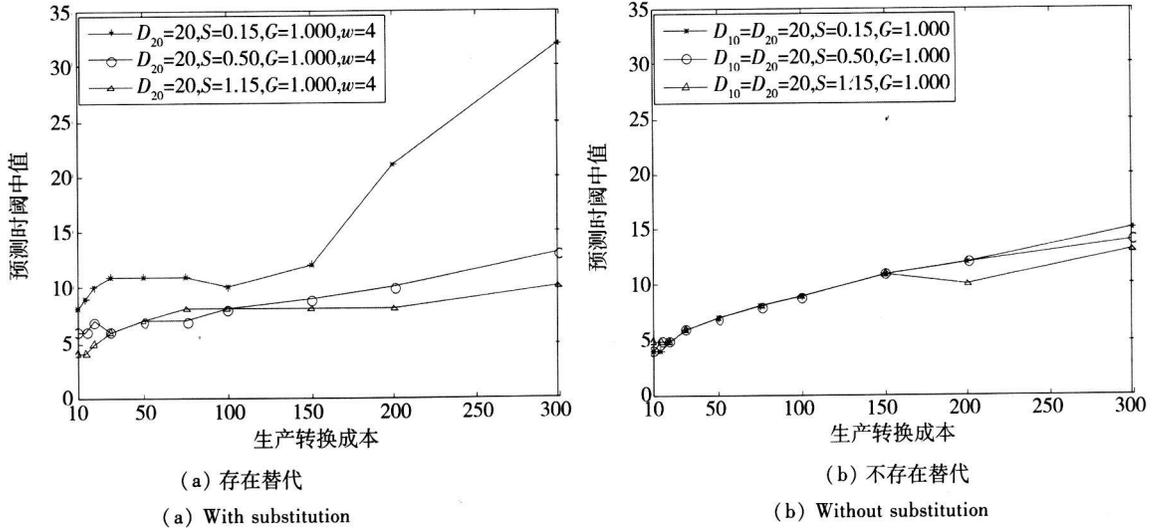


图7 作为生产转换成本和需求波动函数的预测时阈中值

Fig. 7 The median values of forecast horizons as a function of setup cost and demand variability

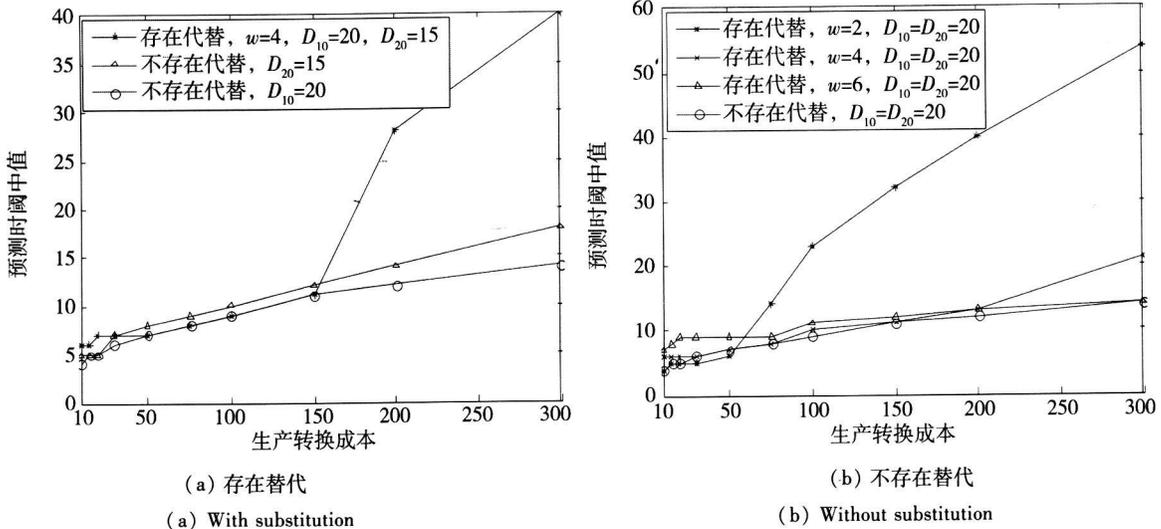


图8 存在替代与不存在替代的预测时阈中值比较图

Fig. 8 The median values of forecast horizons with substitution and non-substitution

综上, 企业当前的生产决策受到今后需求、成本等信息的影响, 而收集、分析未来数据信息的合理周期受产品替代性、生产转换成本、低等级产品的需求大小、需求的发展趋势以及需求波动性等多种因素的影响. 因此, 企业在生产决策时, 必须综合考虑各种因素, 以期取得合理的决策结果.

4 结束语

需求替代对运营决策的影响在运营管理理论

和实践中都是非常重要的研究课题. 而目前大多数的研究文献集中在分析替代如何影响安全库存, 而本文主要研究了替代对周期性库存的影响. 利用再生点单调性思想设计算法, 计算最优预测时阈, 并通过数值试验分析得出预测时阈中值随着生产转换成本的增加而递增, 随着产品基准需求、需求增长参数及需求波动参数的增加而递减, 随着替代成本的增加先递增后递减. 通过与不存在替代的两产品最优决策比较得出, 当产品之间存在替代时, 预测时阈的长度将会显著增加.

本文可以从几个方面进行拓展: 一方面, 本文局限于 3 种类型 (I 类、II 类和 III 类) 再生点的条件下研究最优预测时间, 因此, 一个有意义的拓展将是分析 $n \geq 4$ 种类型再生点的最优预测时间问题. 另一个是将本文的两种产品的情形扩展到多种产品. 另外, 本文是在确定性需求的环境

下进行分析问题的, 因此考虑随机需求是一个非常值得拓展的方向. 随机需求模型可以用来同时分析需求替代对安全库存和周期性库存的影响, 因而可以将现有的两个相互独立的研究领域合二为一, 得出更加实用和有意义的研究结果.

参考文献:

- [1] Ho T H, Tang C S. Product Variety Management. Research Advances Mj. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998: 1—18.
- [2] Draganska M, Jain D C. Consumer preferences and product line pricing strategies: An empirical analysis. J. Marketing Science, 2006, 25(2): 164—174.
- [3] Wagner H M, Whitin T M. Dynamic version of the economic lot size model. J. Management Science, 1958, 5(1): 89—96.
- [4] Chand S, Sethi S P, Proth J M. Existence of forecast horizon in undiscounted discrete-time lot size models. J. Operations Research, 1990, 38(5): 884—892.
- [5] Hsu V N. Dynamic economic lot size model with perishable inventory. J. Management Science, 2000, 46(8): 1159—1169.
- [6] Shaw D X, Wagemans A P M. An algorithm for single item capacitated economic lot sizing with piecewise linear production costs and general holding costs. J. Management Science, 1998, 44(6): 831—838.
- [7] Li C L, Hsu V N, Xiao W Q. Dynamic lot sizing with batch ordering and truckload discounts. J. Operations Research, 2004, 52(4): 639—654.
- [8] Dawande M, Gavimani S, Naranpanawe S, et al. Forecast horizons for a class of dynamic lot size problems under discrete future demand. J. Operations Research, 2007, 55(4): 688—702.
- [9] Rajgopalan S. Deterministic capacity expansion under deterioration. J. Management Science, 1992, 38(4): 525—539.
- [10] Rajgopalan S. Capacity expansion with alternative technology choice. J. European Journal of Operational Research, 1994, 77(3): 392—403.
- [11] Chand S, Moron E. Minimal forecast horizon procedures for dynamic lot size models. J. Naval Research Logistics Quarterly, 1986, 33(1): 111—122.
- [12] Sethi S. A note on a planning horizon model of cash management. J. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1971, 6(1): 659—665.
- [13] Bean J, Smith R L, Yano C. Forecast horizons for the discounted dynamic lot size model allowing speculative motive. J. Naval Research Logistics Quarterly, 1987, 34(6): 761—774.
- [14] Federgruen A, Tzur M. Minimum forecast horizons and a new planning procedure for the general dynamic lot sizing model. Nervousness revisited. J. Operations Research, 1994, 42(3): 456—468.
- [15] Federgruen A, Tzur M. Fast solution and detection of minimal forecast horizons in dynamic programs with a single indicator of the future. Applications to dynamic lot sizing models. J. Management Science, 1995, 41(5): 874—893.
- [16] Chand S, Sethi S P. Planning horizon procedures for machine replacement models with several possible replacement alternatives. J. Naval Research Logistics Quarterly, 1982, 29(3): 483—493.
- [17] Nair S K, Hopp W J. A model for equipment replacement due to technological obsolescence. J. European Journal of Operational Research, 1992, 63(2): 207—221.

- [18] Bastian M, Volkmmer M. A Perfect forward procedure for a single facility dynamic location relocation problem [J]. *Operations Research Letters* 1992 12(1): 11—16
- [19] Daskin M S, Hopp W J, Medina B. Forecast horizons and dynamic facility location planning [J]. *Annals of Operations Research* 1992 40(1): 125—151.
- [20] Johnson R E, McLean J Q. On further results on planning horizons in the production smoothing problem [J]. *Management Science* 1978 24(16): 1774—1776
- [21] Kleindorfer P, Leiber Z. Algorithms and planning horizon results for production planning problems with separable costs [J]. *Operations Research* 1979 27(5): 875—887.
- [22] Aronson J E, Moron T E, Thompson G L. A forward algorithm and planning horizon procedure for the production smoothing problem without inventory [J]. *European Journal of Operational Research* 1984 15(3): 348—365.
- [23] Ramapala R. Forecast horizons in nonstationary Markov decision problems [J]. *Optimization* 1989 20(6): 853—857.
- [24] Boucher JD, Chand S. A forward branch-and-search algorithm and forecast horizon results for the changeover scheduling problem [J]. *European Journal of Operational Research* 1996 91(3): 456—470
- [25] Chand S, Hsu V N, Sethi S P. Forecast solution and rolling horizons in operations management problems: A classified bibliography [J]. *Manufacturing Service Operations Management* 2002 4(1): 25—43
- [26] Leopoulos V I, Proth J M. The general multi-product dynamic lot size model with individual inventory costs and joint production costs [J]. *Engineering Costs and Production Economics* 1985 9(1—3): 15—21.
- [27] Xu J, Lu L L, Glover F. The deterministic multi-item dynamic lot size problem with joint business volume discount [J]. *Annals of Operations Research* 2000 96(1—4): 317—337.
- [28] Swan Nathan J M, Kucukyavuz S. Utilizing postponement and downward substitution for managing perishable inventory [R]. Working paper, University of North Carolina at Chapel Hill 2001
- [29] Hsu V N, Li C L, Xiao W Q. Dynamic lot size problems with one-way product substitution [J]. *IIE Transactions* 2005 37(3): 201—215
- [30] 韩毅, 唐加福, 牟立峰, 等. 粒子群算法求解无能力约束生产批量计划问题 [J]. *管理科学学报*, 2008 11(5): 33—40
Han Yi, Tang Jia fu, Mu Li feng, et al. Particle swarm optimization algorithm for solving uncapacitated multilevel lot sizing problems [J]. *Journal of Management Sciences in China* 2008 11(5): 33—40 (in Chinese)
- [31] 邹昊飞, 夏国平, 杨方廷. 基于两阶段优化算法的神经网络预测模型 [J]. *管理科学学报*, 2006 9(5): 28—35
Zou Hao fei, Xia Guo ping, Yang Fang ting. Neural network forecasting model using multi-stage optimization approach based on GMDH and genetic algorithm [J]. *Journal of Management Sciences in China* 2006 9(5): 28—35 (in Chinese)
- [32] 吕永波, 贾楠, 任锦鸾, 等. 救灾物资发放问题的动态遗传算法求解 [J]. *管理科学学报*, 2008 11(3): 29—34
Lü Yong bo, Jia Nan, Ren Jin luan, et al. Dynamic genetic algorithm for problems of distributing goods to disaster areas [J]. *Journal of Management Sciences in China* 2008 11(3): 29—34 (in Chinese)
- [33] Mukhopadhyay A. Capacity constrained multi-item inventory/production systems [D]. Texas PhD Dissertation, the University of Texas at Dallas 1992 34—68
- [34] Sulam A. Explicit solution of a two dimensional deterministic inventory problem [J]. *Mathematics of Operations Research* 1986 11(1): 134—146
- [35] Brown G G, Dell R F, Davis R L, et al. Optimizing plant line schedules and an application at hidden valley manufacturing company [J]. *Interfaces* 2002 32(3): 1—14
- [36] Günther H, Van Beek P. *Advanced Planning and Scheduling Solutions in Process Industry* [M]. New York: Springer-Verlag 2003 12—43
- [37] Lundin R A, Moron T E. Planning horizons for the dynamic lot size model: Zabel vs. Protective procedures and computational results [J]. *Operations Research* 1975 23(4): 711—734

- [38] Sethi S P, Chand S. Planning horizon procedures in machine replacement models. *J. Management Science*, 1979, 25(2): 140–151

Forecast horizon of dynamic lot size for two products under demand substitution

MU Yin-ping

School of Management and Economics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China

Abstract This paper analyzes the dynamic lot size problem and forecast horizon for the two downward substitution products. By developing a polynomial time forward dynamic programming algorithm, we compute the optimal decision of production and substitution quantities for a T -period problem to minimize the changeover cost, holding cost and substitution cost. We obtain the minimal last regeneration points monotonicity properties for an optimal solution. This enables us to establish a highly efficient forward algorithm to evaluate the minimal forecast horizon and the corresponding decision horizon. Finally, we use a computational experiment to compare the minimal forecast horizons between with and without substitution of two products and conclude that the substitution increases the minimal forecast horizon.

Key words forecast horizon; demand substitution; dynamic lot size; forward algorithm