无量纲化方法对拉开档次法的影响分析①

郭亚军，马凤姝，董庆兴
(东北大学工商管理学院，沈阳 110004)

摘要：基于以往文献分别对拉开档次法及对无量纲化方法进行的各自独立的研究，从解的唯一性和有效性、被评价对象间的局部差异和整体差异等角度出发，分析了几种常用无量纲化方法对拉开档次法的评价结果及评价效果的影响，并据此给出了在拉开档次法中如何科学合理地选择无量纲化方法的依据和建议，最后通过算例分析对结论进行了检验.

关键词：综合评价；拉开档次法；无量纲化方法
中图分类号：N945.16　　文献标识码：A　　文章编号：1007－9807(2011)05－0019－10

0 引 言

综合评价是指对被评价对象所进行的客观、公正、合理的全面评价[1]. 对有限方案的决策而言，综合评价是决策的基础. 没有对备选方案科学合理的综合评价，就无法做出令人满意的决策. 由于评价的重要性，综合评价的理论与方法吸引了众多学者对其进行研究，并取得了丰硕的研究成果[1－8]，这些成果被应用于经济管理、工业工程、人工智能及环境科学等各个学科和领域.

综合评价过程中的一个重要环节是如何发现并利用多方案、多指标、多专家或多周期等多源信息间的差异，将多源信息加权集结成为有用的综合评价信息. 根据多源信息间差异的不同，多源信息加权集结方法可以划分为不同类型，其中常用的几种类型分别为：利用专家主观偏好之间的差异对多指标信息进行加权集结的方法，如特征向量法[9]、序关系分析法[10]等；利用多源信息排序后的位置之间的差异对多源信息进行加权集结的方法，如有序加权集结法[11－15]、诱导有序加权集结法[16－18]等；利用被评价对象间的整体差异或局部差异对多指标信息进行加权集结的方法，如拉开档次法[19－21]、离差最大化方法[22]、均方差法[23]等. 其中，基于“尽可能地体现各被评价对象之间的整体差异”原则的综合评价方法——拉开档次法，是由文献[19]于 1985年提出的，该方法确定的指标“权重系数”已不再体现评价指标的相对重要性了，而是最大程度地体现被评价对象间整体差异的投影因子. 文献[20]应用拉开档次综合评价方法对全国 119个城市的发展现状进行了综合评价. 文献[21]针对由时序立体数据表支持的综合评价问题的特殊性，提出了“纵横向”拉开档次法. 根据确定权重系数的差异信息的主客观性，拉开档次法可以归类为客观赋权集结法，其它的多源信息集结方法，如离差最大化方法、均方差法、有序加权集结法等也属于客观赋权集结法，而特征向量法、序关系分析法等则属于主观赋权集结法.

多源信息加权集结为综合评价信息的前提是，要先对多源信息，如多指标信息，进行无量纲化处理. 因为来自于不同指标的信息，往往具有不同的量纲和量级，相互之间不可比，不能直接加权集结. 无量纲化处理的方法很多，其中常用的方法有标准化处理法、极值处理法、线性比例法、归一化处理法、向量规范法及功效系数法

① 收稿日期：2009－07－13；修订日期：2011－01－07.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71071030).
作者简介：郭亚军(1952－)，男(满族)，辽宁开原人，博士，教授，博士生导师. Email: ygu@mail.neu.edu.cn

等[1,24−25]．文献[25]对这几种常用的无量纲化方法的性质进行了分析．文献[26]则指出了综合评价结果对于评价指标无量纲化方法的敏感性问题，即综合评价值或排序结果不仅取决于指标权重系数，还取决于所选的无量纲化方法．目前，关于综合评价方法及关于各种综合评价方法的比较与选择的研究很多，但关于综合评价方法中各种无量纲化方法的比较与选择的研究却很少．文献[27]于 2009年指出，由于缺少各种无量纲化方法对各种综合评价方法的适用性的研究，综合评价结果的科学性与有效性备受质疑．针对现有研究中存在的上述种种问题，文献[27]在 TOPSIS法中，运用随机模拟技术，从序一致性和权重敏感性两个角度，对四种常用无量纲化方法进行了比较，并验证了向量规范法对于 TOPSIS法的有效性．

综上，基于"尽可能地体现各被评价对象之间的整体差异"原则的拉开档次法，是综合评价中一个具有鲜明特色的重要方法，而无量纲化方法的选择会影响综合评价方法（包括拉开档次法）的效果，因此有必要研究各种无量纲化方法对拉开档次法的适用性，而目前尚未出现相关研究，所以，在对无量纲化方法及拉开档次法分别研究的基础上，从多个角度及方面分析无量纲化方法对拉开档次法的影响，并据此给出在拉开档次法中如何对无量纲化方法进行科学选择的依据和建议．

1 预备知识

1.1 拉开档次综合评价方法概述

1.1.1 函数及符号说明

设被评价对象集 $O=\{o_1, o_2, \cdots, o_n\}$，评价指标集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，指标权重系数向量 $w=(w_1, w_2, \cdots, w_m)^T$，$x_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$是被评价对象 o_i关于评价指标 x_j的取值．由 x_{ij}构成的原始指标观测矩阵为

$$A=[x_{ij}]_{n\times m}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

经指标类型一致化及无量纲化处理后，矩阵 A 变为

$$A^*=[x_{ij}^*]_{n\times m}=\begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1m}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2m}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nm}^* \end{bmatrix} \tag{2}$$

取综合评价函数为

$$y_i=\sum_{j=1}^{m} w_j x_{ij}^*,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

若记 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，则

$$y=A^* w \tag{4}$$

1.1.2 拉开档次法基本模型

由式（4）看出，当取定 A^* 时，y的值取决于权重系数向量 w．确定 w的原则是从整体上尽可能体现出各被评价对象之间的差异，使之尽量拉开档次，以利于对其排序．

如从几何角度来看，n个被评价对象可以看成是由 m个评价指标构成的 m维评价空间中的 n个点（或向量）．寻求 n个被评价对象的评价值（标量）就相当于把这 n个点向某一维空间做投影．选择指标权重系数，使得各被评价对象之间的差异尽量拉大，也就是根据 m维评价空间构造一个最佳的一维空间，使得各点在此一维空间上的投影点最为分散，即分散程度最大．

而被评价对象 $o_1, o_2, \cdots, o_n$ 在数据表 $\{x_{ij}^*\}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$上的这种整体差异，可以用综合评价值 $\{y_i\}(i=1,2,\cdots,n)$的方差

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 \tag{5}$$

来刻画．式中，$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$．

将式（3）和式（4）代入式（5）中并整理，得

$$s^2=w^T H_{m\times m} w \tag{6}$$

其中

$$H_{m\times m}=\frac{1}{n-1}(A^{*T}A^*-n\bar{x}^{*T}\bar{x}^*) \tag{7}$$

式中，$\bar{x}^*=(\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \cdots, \bar{x}_m^*)$，$\bar{x}_j^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^*$，$j=1,2,\cdots,m$．由式（7）可以看出，$H_{m\times m}$为实对称矩阵．

显然，对 w不加限制时，式（6）可取任意大的

值. 这里限定 $w^T w = 1$并且 $w > 0$, 求式 (6) 的最大值, 即选择 w, 使得

$$\max \sigma^2 = w^T H_{m\times m} w \tag{8}$$

$$\text{s.t.}\quad w^T w = 1 \tag{9}$$

$$w > 0 \tag{10}$$

由式 (8)、式 (9)、式 (10) 组成的规划模型, 即为拉开档次综合评价法求解指标权重系数的规划模型. 由于通常假定指标权重系数和为 1, 所以求得的指标权重系数 w还需同时除以 $\sum_{j=1}^{m} w_j$.

1.1.3　拉开档次法相关定理及主要特点

文献 [1] 关于拉开档次法, 给出如下定理

定理 1　若取 w为 $H_{m\times m}$的最大特征值所对应的标准特征向量时, 式 (8) 在式 (9) 的约束下取得最大值.

证明见文献 [1] 第 69页.

定理 2　若 $H_{m\times m}$为正方阵 (即 $H_{m\times m}$的元素皆大于 0) 时, 则有唯一正的最大特征值 $\lambda_{\max}$及存在唯一与 $\lambda_{\max}$相对应的正的特征向量 (如果不计正常数倍的话).

证明见文献 [28] 附录.

其主要特点最大程度地体现被评价对象之间的整体差异, 使被评价对象具有最大的可区分性; 过程透明; 评价结果毫无主观色彩; 权重系数不具有“可继承性”, 即随着被评价对象指标值的变化而变化. 若长期使用该方法, 可鼓励被评价对象积极创造整体差异, 有利于系统协调发展.

1.2　常用无量纲化方法介绍

为消除不同指标间的不可公度性, 需先对多指标进行类型一致化处理, 这里均转换为极大型指标, 然后再进行无量纲化处理. 下面列出几种常用的无量纲化方法

1) 标准化处理法

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j} \tag{11}$$

式中, $\bar{x}_j$, s_j分别为第 j项指标观测值的 (样本) 平均值和 (样本) 均方差.

2) 极值处理法

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j} \tag{12}$$

式中, $M_j = \max_i \{x_{ij}\}$, $m_j = \min_i \{x_{ij}\}$.

对于指标 x_j为极小型的情况, 式 (12) 变为

$$x_{ij}^* = \frac{M_j - x_{ij}}{M_j - m_j} \tag{12$'$}$$

3) 线性比例法

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij}}{x_j'} \tag{13}$$

式中, x_j'为一特殊点, 一般可取为 m_j, M_j, $\bar{x}_j$或 $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, x_j'要求大于 0.

4) 向量规范法

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}} \tag{14}$$

5) 功效系数法

$$x_{ij}^* = c + \frac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j} \times d \tag{15}$$

式中, M_j, m_j分别为指标 x_j的满意值和不容许值, c, d均为已知正常数, c的作用是对变换后的值进行“平移”, d的作用是对变换后的值进行“放大”或“缩小”. 式 (15) 可看成是更普遍意义下的一种极值处理法.

2　常用无量纲化方法对拉开档次法的影响分析

为叙述方便, 设被评价对象 o_1, o_2, …, o_n均来自同一总体 O. 由数理统计的理论可知, 样本方差是总体方差的无偏估计. 设原始指标是随机变量 X_j, 无量纲化后的评价指标是随机变量 X_j^*, X_j^*是 X_j的随机函数, 综合评价值是随机变量 Y, Y是 X_j^* ($j = 1, 2, …, m$) 的随机函数, 则样本 x_{1j}^*, x_{2j}^*, …, x_{nj}^*的方差

$$s_j^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_{ij}^* - \bar{x}_j^*)^2,\quad j = 1, 2, …, m \tag{16}$$

可作为总体 X_j^* 的方差的近似, 即有

$$s_j^{*2} \approx D(X_j^*) \tag{17}$$

样本 y_1, y_2, …, y_n的方差 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ 可作为总体 Y的方差的近似, 即有

$$s^2 \approx D(Y) = D(\sum_{j=1}^{m} w_j X_j^*) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_i w_j \rho_{X_i^* X_j^*} \sqrt{D(X_i^*)} \sqrt{D(X_j^*)} \tag{18}$$

式中, $\rho_{X_i^* X_j^*}$ 为 X_i^* 与 X_j^* 的相关系数.

在综合评价中,为防止出现信息重叠的现象,通常要求指标间相互独立. 当评价指标 x_1^*, x_2^*, …, x_m^* 相互独立时,有 $\rho_{X_i^* X_j^*} = 0(i \neq j)$, $\rho_{X_i^* X_j^*} = 1(i = j)$. 此时,由式(18)得

$$s^2 \approx D(Y) = \sum_{j=1}^{m} w_j^2 D(X_j^*) \tag{19}$$

2.1 标准化无量纲化方法对解的唯一性与有效性的影响

根据式(11)、式(19)以及由式(8)、式(9)、式(10)组成的拉开档次法模型, 得到如下结论

定理 3 当评价指标 x_1^*, x_2^*, …, x_m^* 相互独立时, 对指标进行标准化无量纲化处理, 拉开档次法失去意义.

证明 对指标按式(11)进行标准化无量纲化处理, 有 $D(X_j^*) = 1$, $j = 1, 2, …, m$; 当评价指标 x_1^*, x_2^*, …, x_m^* 相互独立时, 将 $D(X_j^*) = 1$ 代入式(19)可知, 拉开档次法模型中的目标函数从而 $s^2 \approx \sum_{j=1}^{m} w_j^2 = w^T w$, 而 $w^T w$ 在 $w^T w = 1$ 的约束条件下其函数值恒为 1, 即当评价指标 x_1^*, x_2^*, …, x_m^* 相互独立时, 对指标进行标准化无量纲化处理后, 所有满足拉开档次法模型中约束条件 $w^T w$ 和 $w > 0$ 的权重系数的取值都令目标函数值恒为常数 1, 此时最大化目标函数已失去意义, 且满足约束条件 $w^T w = 1$ 和 $w > 0$ 的解为无穷多个. 此时, 拉开档次法失去意义. 证毕.

从以上证明中可知, 当评价指标间相互独立时, 标准化无量纲化方法影响拉开档次法解的唯一性与有效性.

2.2 功效系数法中的平移系数和缩放系数对解的影响

根据式(7)、式(15)以及由式(8)、式(9)、式(10)组成的拉开档次法模型, 得到如下定理

定理 4 拉开档次法模型中权重系数的解, 对功效系数法中平移系数 c 的取值是敏感的.

证明 记 $\frac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j}$ 为 x'_{ij}, 当缩放系数 $d = 0$ 时, 功效系数法式(15)可写成

$$x_{ij}^* = x'_{ij} + c \tag{20}$$

则

$$\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, …, \bar{x}_m^*) = \bar{x}' + c \tag{21}$$

式(21)中, $\bar{x}_j^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x'_{ij} + c) = \bar{x}'_j + c$, $\bar{x}' = (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, …, \bar{x}'_m)$, $c = [c]_{1\times m}$.

记 $A' = [x'_{ij}]_{n\times m}$, 又已知 $A^* = [x_{ij}^*]_{n\times m}$, 则用功效系数法对指标预处理后, 指标观测矩阵

$$A^* = A' + C \tag{22}$$

式中, $C = [c]_{n\times m}$.

将式(21)和式(22)代入式(7)中, 得

$$\begin{aligned} H_{m\times m} &= \frac{1}{n-1}(A^{*T}A^* - n\bar{x}^{*T}\bar{x}^*) \\ &= \frac{1}{n-1}(A' + C)^T(A' + C) - \\ &\quad \frac{n}{n-1}(\bar{x}' + C)^T(\bar{x}' + c) \end{aligned} \tag{23}$$

由式(23)及式(8)、式(9)、式(10)知, c 的取值影响指标权重系数的确定, 即拉开档次法模型中权重系数的解, 对功效系数法中平移系数 c 的取值是敏感的. 证毕.

为避免平移系数 c 对指标权重系数及评价结果的影响, 在拉开档次综合评价方法中使用功效系数法时, 应取平移系数 $c = 0$.

定理 5 当功效系数法中的平移系数 c 为 0 时, 缩放系数 d 不影响拉开档次法模型中权重系数的解.

证明 记 $\frac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j}$ 为 x'_{ij}, 当平移系数 $c = 0$ 时, 功效系数法式(15)可写成

$$x_{ij}^* = x'_{ij} \times d \tag{24}$$

则

$$\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, …, \bar{x}_m^*) = \bar{x}' \times d \tag{25}$$

式(25)中, $\bar{x}_j^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x'_{ij} \times d) = \bar{x}'_j \times d$,

$$\bar{x}' = (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, …, \bar{x}'_m) = \bar{x}' \times d \tag{25}$$

记 $A' = [x'_{ij}]_{n\times m}$, 又已知 $A^* = [x_{ij}^*]_{n\times m}$, 则用功效系数法对指标预处理后, 指标观测矩阵

$$A^* = A' \times d \tag{26}$$

将式(25)和式(26)代入式(7)中, 得

$$H_{m\times m} = \frac{1}{n-1}(A^{*T}A^* - n\bar{x}^{*T}\bar{x}^*) =$$

$$\frac{1}{n-1}(A'\times d)^T(A'\times d)-$$
$$\frac{n}{n-1}(\overline{x}'\times d)^T(\overline{x}'\times d) \quad (27)$$

由式(27)及式(8)、式(9)、式(10)知, d的取值不影响指标权重系数 w_j的确定. 由 $y_i=\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij}^* = d\sum_{j=1}^{m} w_j x_{ij}$知, 缩放系数 d不影响综合评价值间的比例关系及被评价对象的排序结果.

证毕.

2.3 常用无量纲化方法对被评价对象间局部差异的影响

被评价对象间关于指标 x_j的局部差异可由 $s_j^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}^*-\overline{x}_j^*)^2$来刻画, 且有 $s_j^{*2}\approx D(X_j^*)$, $j=1,2,\cdots,m$.

下面分析几种常用无量纲化方法对被评价对象间的局部差异的影响

因为功效系数法只是极值处理法在更普遍意义下的一种形式, 功效系数法中的缩放系数 d不影响指标权重系数 w_j的确定, 不影响评价值间的比例关系及被评价对象的排序结果, 所以不考虑功效系数法.

当使用极值处理法时, 有

$$D(X_j^*)=D\left(\frac{X_j-m_j}{M_j-m_j}\right)=\frac{1}{(M_j-m_j)^2}D(X_j) \quad (28)$$

式中, $M_j=\max_i\{x_{ij}\}$, $m_j=\min_i\{x_{ij}\}$.

当使用其它无量纲化方法时, 有

$$D(X_j^*)=D\left(\frac{X_j}{x_j'}\right)=\frac{1}{(x_j')^2}D(X_j) \quad (29)$$

式中, $x_j'=m_j, M_j, \overline{x}_j, \sum_i x_{ij}$或 $\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}$.

由式(28)和式(29)可知, 选用不同的无量纲化方法处理后, 体现局部差异的指标值方差也不相同. 通常来说, 无量纲化后的指标值的方差越大越好, 否则, 当该方差等于 0时, 该指标对被评价对象的排序不起作用。

下面比较采用不同无量纲化方法时被评价对象间局部差异的大小

因为无量纲化方法中要求 $m_j, M_j, \overline{x}_j, \sum_i x_{ij}$或 $\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}$和 M_j-m_j均大于 0, 所以有

$$0<m_j<\overline{x}_j<M_j<\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}<\sum_i x_{ij} \quad (30)$$

$$0<M_j-m_j<M_j \quad (31)$$

当 $M_j>2m_j>0$时, 有

$$M_j-m_j>m_j \quad (32)$$

当 $0<M_j<2m_j$时, 有

$$M_j-m_j<m_j \quad (33)$$

因为 $D(X_j)>0$, 所以根据式(30)—式(33)可知

$$\frac{1}{(m_j)^2}D(X_j)>\frac{1}{(\overline{x}_j)^2}D(X_j)>\frac{1}{(M_j)^2}D(X_j)>$$
$$\frac{1}{\left(\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}\right)^2}D(X_j)>\frac{1}{(\sum_i x_{ij})^2}D(X_j) \quad (34)$$

$$\frac{1}{(M_j-m_j)^2}D(X_j)>\frac{1}{(M_j)^2}D(X_j) \quad (35)$$

当 $M_j>2m_j>0$时, 有

$$\frac{1}{(m_j)^2}D(X_j)>\frac{1}{(x_j')^2}D(X_j) \quad (36)$$

式中, $x_j'=M_j-m_j, M_j, \overline{x}_j, \sum_i x_{ij}$或 $\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}$.

当 $0<M_j<2m_j$时, 有

$$\frac{1}{(M_j-m_j)^2}D(X_j)>\frac{1}{(x_j')^2}D(X_j) \quad (37)$$

式中, $x_j'=M_j, m_j, \overline{x}_j, \sum_i x_{ij}$或 $\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}$.

综合式(36)和式(37), 得到定理 6

定理 6　当 $M_j>2m_j>0$时, 在上述常用的无量纲化方法中, 线性比例法 $x_{ij}^*=x_{ij}/m_j$使体现局部差异的指标值方差最大; 当 $0<M_j<2m_j$时, 在上述常用的无量纲化方法中, 极值处理法 $x_{ij}^*=(x_{ij}-m_j)/(M_j-m_j)$使体现局部差异的指标值方差最大.

2.4 常用无量纲化方法对被评价对象间整体差异的影响

被评价对象间的整体差异可以用综合评价值的方差 $s^{*}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$来刻画, 且有 $s^2\approx D(Y)=\sum_{j=1}^{n} w_j^2 D(X_j^*)$.

由式(28)、式(29)和式(19)知, 选用不同的无量纲化方法会给整体差异的体现带来影响. 拉开档次法的特点是突出被评价对象间的整体差异, 通常来说, 应选用使被评价对象间整体差异较

大的无量纲化方法.

下面比较采用不同无量纲化方法时被评价对象间整体差异的大小

因为 $w_j^2 \in (0, 1)$, 所以

$$0 < D(Y) = \sum_{j=1}^{n} w_j^2 D(X_j^*) < \sum_{j=1}^{m} D(X_j^*) \quad (38)$$

由式 (38) 知, 欲比较 $D(Y)$, 需先比较 $\sum_{j=1}^{m} D(X_j^*)$

由式 (28)、式 (29)、式 (36) 和式 (37) 知, $\forall j$, 若有 $M_j > 2m_j > 0$, 则

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(m_j)^2} D(X_j) > \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(x'_j)^2} D(X_j) \quad (39)$$

式中, $x'_j = M_j - m_j, M_j, \bar{x}_j, \sum_i x_{ij}$ 或 $\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}$.

$\forall j$, 若有 $0 < M_j < 2m_j$, 则

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(M_j - m_j)^2} D(X_j) > \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(x'_j)^2} D(X_j) \quad (40)$$

式中, $x'_j = M_j, m_j, \bar{x}_j, \sum_i x_{ij}$ 或 $\sqrt{\sum_i x_{ij}^2}$.

由式 (28)、式 (29)、式 (38) 和式 (39) 知, $\forall j$, 若有 $M_j > 2m_j > 0$, 在常用的无量纲化方法中, 线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 使被评价对象间整体差异 σ^2 最大; 由式 (28)、式 (29)、式 (38) 和式 (40) 知, $\forall j$, 若有 $0 < M_j < 2m_j$, 在常用的无量纲化方法中, 极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 使被评价对象间整体差异 σ^2 最大; 若既 $\exists j'$ 使得 $M_{j'} > 2m_{j'} > 0$, 又 $\exists j''$ 使得 $0 < M_{j''} > 2m_{j''}$, $j' \neq j''$, 由式 (17) 及式 (38) 知, $\sum_{j=1}^{m} D(X_j^*) \approx \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^{*2}$, 并且, 在线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 和极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 中, 使 $\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^{*2}$ 较大的那种无量纲化方法, 可使被评价对象间整体差异 σ^* 最大.

由以上分析及证明过程得到定理 7.

定理 7 $\forall j$, 若有 $M_j > 2m_j > 0$, 在上述常用的无量纲化方法中, 线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 使被评价对象间整体差异 σ^2 最大; $\forall j$, 若有 $0 < M_j < 2m_j$, 在上述常用的无量纲化方法中, 极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 使被评价对象间整体差异 σ^2 最大; 若既 $\exists j'$ 使得 $M_{j'} > 2m_{j'} > 0$, 又 $\exists j''$ 使得 $0 < M_{j''} < 2m_{j''}$, $j' \neq j''$, 在线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 和极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 中, 使 $\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^{*2}$ 较大的那种无量纲化方法, 可使被评价对象间整体差异 σ^2 最大.

3 算例分析

为节省篇幅, 略去本例的实际背景, 取定 10 个被评价对象分别记为 $o_1, o_2, \cdots, o_{10}$, 选择 5 项极大型评价指标分别记为 $x_1, x_2, \cdots, x_5$, 其观测值见表 1.

在拉开档次综合评价模型中, 分别采用极值处理法、向量规范法和线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/x'_j$ (其中 x'_j 分别取 $m_j, M_j, \bar{x}_j$ 或 $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$), 对指标值进行无量纲化处理后, 指标值的方差见表 2、指标权重系数见表 3、综合评价结果见表 4 和图 1.

表 1 原始指标观测值

Table 1 Original values of indexes

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
o_1	90	97	96	63	94
o_2	92	98	73	97	79
o_3	93	66	93	62	92
o_4	91	74	93	87	77
o_5	94	81	75	75	91
o_6	66	80	97	82	68
o_7	90	67	72	90	83
o_8	67	94	81	94	80
o_9	76	75	98	65	62
o_{10}	40	60	51	38	58
m_j	40	60	51	38	58
$M_j - m_j$	54	38	47	59	36

表 2　无量纲化后的指标值方差

Table 2 Deviations of dimensionless index values

	s_1^{*2}	s_2^{*2}	s_3^{*2}	s_4^{*2}	s_5^{*2}	$\sum_{i=1}^{5} s_j^{*2}$
极值处理法	0.107 1	**0.125 4**	**0.105 8**	0.097 2	**0.120 6**	0.556 0
向量规范法	0.004 7	0.002 8	0.003 3	0.005 7	0.002 5	0.018 9
线性比例法 1	**0.195 2**	0.050 3	0.089 8	**0.234 2**	0.046 5	**0.616 0**
线性比例法 2	0.035 3	0.018 9	0.024 3	0.035 9	0.017 7	0.132 2
线性比例法 3	0.048 9	0.028 9	0.034 0	0.059 7	0.025 4	0.196 9
线性比例法 4	0.000 5	0.000 3	0.000 3	0.000 6	0.000 3	0.002 0
最大的 s_j^{*2} 或 $\sum_{i=1}^{5} s_j^{*2}$	**0.195 2**	**0.125 4**	**0.105 8**	**0.234 2**	**0.120 6**	**0.616 0**

注: 1) 在表 2、表 3中, 线性比例法 1为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/m_j$, 线性比例法 2为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/M_j$, 线性比例法 3为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, 线性比例法 4为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$; 2) 在表 2中, 数值加粗表示该值是最大的 s_j^{*2} 或 $\sum_{i=1}^{5} s_j^{*2}$.

表 **3**　权重系数值

Table 3 Values of weight coefficients

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
极值处理法	0.237	0.204	0.151	0.175	0.233
向量规范法	0.271	0.153	0.138	0.277	0.160
线性比例法 1	0.316	0.105	0.119	0.344	0.116
线性比例法 2	0.290	0.144	0.147	0.251	0.168
线性比例法 3	0.272	0.152	0.137	0.281	0.158
线性比例法 4	0.272	0.152	0.137	0.281	0.158

表 **4**　综合评价结果

Table 4 Results of comprehensive evaluation

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8	o_9	o_{10}	s^2	极差
与极值处理法对应的	0.870	0.814	0.691	0.702	0.750	0.564	0.641	0.706	0.495	0.000	0.060	0.870
综合评价值及排序	1	2	6	5	3	8	7	4	9	10		
与向量规范法对应的	0.334	0.354	0.315	0.336	0.330	0.304	0.328	0.327	0.289	0.185	0.002	0.169
综合评价值及排序	3	1	7	2	4	8	5	6	9	10		
与线性比例法 1对应的	1.863	2.105	1.813	2.007	1.920	1.766	1.977	1.894	1.673	1.000	**0.095**	**1.105**
综合评价值及排序	6	1	7	2	4	8	3	5	9	10		
与线性比例法 2对应的	0.895	0.930	0.848	0.892	0.878	0.801	0.865	0.853	0.771	0.490	0.016	0.439
综合评价值及排序	2	1	7	3	4	8	5	6	9	10		
与线性比例法 3对应的	1.08	1.14	1.01	1.09	1.06	0.98	1.06	1.05	0.93	0.59	0.024	0.549
综合评价值及排序	3	1	7	2	4	8	5	6	9	10		
与线性比例法 4对应的	0.108	0.114	0.101	0.109	0.106	0.098	0.106	0.105	0.093	0.059	0.00024	0.0549
综合评价值及排序	3	1	7	2	4	8	5	6	9	10		
最大的 s^2 或极差											**0.095**	**1.105**

注: 1) 在表 4及图 1中, 线性比例法 1为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/m_j$, 线性比例法 2为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/M_j$, 线性比例法 3为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, 线性比例法 4为 $x_{ij}^{*} = x_{ij}/\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$; 2) 在表 4中, 数值加粗表示该值是最大的 s^2 或极差.

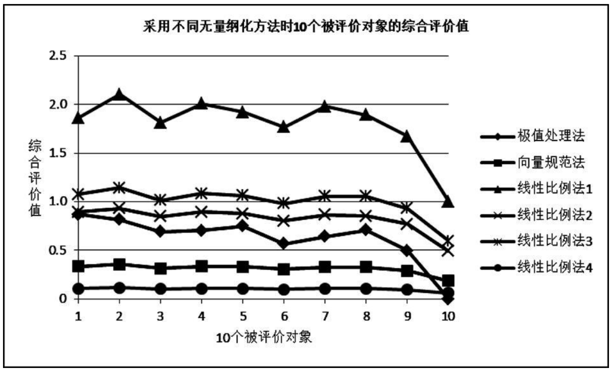

图 1　综合评价结果

Fig. 1 Results of comprehensive evaluation

如表 2—表 4及图 1所示, 无量纲化方法的选择影响拉开档次综合评价法中的指标权重系数、被评价对象的综合评价值和排序、由指标方差代表的被评价对象间的局部差异, 及由评价值方差代表的被评价对象间的整体差异, 即拉开档次法对无量纲化方法的选择是敏感的.

根据表 2, 考察由指标方差 σ_j^{*2} 代表的被评价对象间的局部差异, 因为 $M_j - m_j > m_j > 0$, $j = 1, 4$, 由定理 6可知, 在常用无量纲化方法中, 线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 分别使 x_1 和 x_4 的指标值方差 σ_1^{*2} 和 σ_4^{*2} 最大; 因为 $0 < M_j - m_j < m_j$, $j = 2, 3, 5$, 由定理 6可知, 在常用无量纲化方法中, 极值处理法分别使 x_2、x_3 和 x_5 的指标值方差 σ_2^{*2}、σ_3^{*2} 和 σ_5^{*2} 最大. 而表 2中指标方差的数据进一步证实了定理 6的结论.

根据表 2和表 4, 考察由评价值方差 s^2 代表的被评价对象间的整体差异, 因为既存在 $M_j - m_j > m_j > 0$, $j = 1, 4$, 又存在 $0 < M_j - m_j < m_j$, $j = 2, 3, 5$, 由定理 7知, 在线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 和极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 中, 使 $\sum_{j=1}^{5} \sigma_j^{*2}$ 较大的那种无量纲化方法, 使被评价对象间整体差异 s^2 最大. 由表 2中 $\sum_{j=1}^{5} \sigma_j^{*2}$ 的数据可知, 线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 使 $\sum_{j=1}^{5} \sigma_j^{*2}$ 较大, 此时被评价对象间整体差异 s^2 最大. 而表 4中整体差异 s^2 的数据及图 1进一步证实了定理 7的结论.

因为拉开档次法的特点是突出被评价对象间的整体差异, 所以通常来说应选用使被评价对象间整体差异较大的无量纲化方法. 故此例中应选择线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 作为拉开档次法的无量纲化方法.

4　结束语

在以往文献分别对无量纲化方法及拉开档次法所进行的各自独立的研究的基础上, 分析了几种常用无量纲化方法对拉开档次法的评价结果及评价效果的影响, 得到如下结论, 并给出相应建议.

(1) 当评价指标间相互独立时, 标准化无量纲化方法影响拉开档次法解的唯一性与有效性, 此时拉开档次法失去意义; 此外, 拉开档次法的特点是"尽可能地体现各被评价对象之间的整体差异", 由式 (18) 又可知, 指标方差体现的局部差异影响整体方差体现的整体差异, 而标准化处理法使指标方差均为 1, 抹杀了这种局部差异, 从而不利于这种整体差异的体现. 基于标准化无量纲化方法在拉开档次法中的局限性, 建议在拉开档次法中避免使用该无量纲化方法.

(2) 拉开档次法模型中权重系数的解, 对功效系数法中平移系数 c 的取值是敏感的, 应取平移系数 $c = 0$, 当功效系数法中的平移系数 c 为 0时, 缩放系数 d 不影响拉开档次法模型中权重系数的解.

(3) 无量纲化方法影响被评价对象间的局部差异: 当 $M_j > 2m_j > 0$ 时, 在常用的无量纲化方法中, 线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 使体现局部差异的指标值方差最大; 当 $0 < M_j < 2m_j$ 时, 在常用的无量纲化方法中, 极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 使体现局部差异的指标值方差最大.

(4) 无量纲化方法影响被评价对象间的整体差异：$\forall j$，若有 $M_j > 2m_j > 0$，在常用的无量纲化方法中，线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 使被评价对象间整体差异 s^2 最大；$\forall j$，若有 $0 < M_j < 2m_j$，在常用的无量纲化方法中，极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 使被评价对象间整体差异 s^2 最大；若既 $\exists j$，使得 $M_j > 2m_j$，又 $\exists j'$，使得 $0 < M_{j'} < 2m_{j'}$，$j \neq j'$，在线性比例法 $x_{ij}^* = x_{ij}/m_j$ 和极值处理法 $x_{ij}^* = (x_{ij} - m_j)/(M_j - m_j)$ 中，使 $\sum_{j=1}^{m} s_j^2$ 较大的那种无量纲化方法，可使被评价对象间整体差异 s^2 最大. 因为拉开档次法的特点是最大程度地体现被评价对象之间的整体差异，所以建议选用使被评价对象间整体差异最大的无量纲化方法.

参考文献:

[1] 郭亚军. 综合评价理论、方法及应用[M]. 北京：科学出版社，2007.
Guo Ya-jun. Comprehensive Evaluation Theory, Method and Application[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)

[2] 陈衍泰，陈国宏，李美娟. 综合评价方法分类及研究进展[J]. 管理科学学报，2004，7(2)：69—79.
Chen Yan-tai, Chen Guo-hong, Li Mei-juan. Classification & research advancement of comprehensive evaluation methods[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(2): 69—79. (in Chinese)

[3] Wallenius J, Dyer J S, Fishburn P C, et al. Multiple criteria decision making, multiattribute utility theory: Recent accomplishments and what lies ahead[J]. Management Science, 2008, 54(7): 1336—1349.

[4] Cook W D, Seiford L M. Data envelopment analysis (DEA)-Thirty years on[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(1): 1—17.

[5] Stewart T J. Relationships between data envelopment analysis and multicriteria decision analysis[J]. Journal of the Operational Research Society, 1996, 47(5): 654—665.

[6] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[7] Jung U, Seo D W. An ANP approach for R&D project evaluation based on interdependencies between research objectives and evaluation criteria[J]. Decision Support Systems, 2010, 49(3): 335—342.

[8] Ye F. An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(10): 7050—7055.

[9] Saaty T L. A scaling method for priorities in hierarchical structures[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1978, 1(1): 57—68.

[10] 王学军，郭亚军，兰 天. 构造一致性判断矩阵的序关系分析法[J]. 东北大学学报(自然科学版)，2006，27(1)：115—118.
Wang Xue-jun, Guo Ya-jun, Lan Tian. Rank correlation analysis of formation of consistent judgment matrix[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2006, 27(1): 115—118. (in Chinese)

[11] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18(1): 183—190.

[12] Emrouznejad A, Amin G R. Improving minimax disparity model to determine the OWA operator weights[J]. Information Sciences, 2010, 180(8): 1477—1485.

[13] Bustince H, Calvo T, De Baets B, et al. A class of aggregation functions encompassing two-dimensional OWA operators[J]. Information Sciences, 2010, 180(10): 1977—1989.

[14] Yager R R. On the dispersion measure of OWA operators[J]. Information Sciences, 2009, 179(22): 3908—3919.

[15] Yager R R. Using stress functions to obtain OWA operators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1122—1129.

[16] Yager R R, Filev D P. Induced ordered weighted averaging operators[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics, 1999, 29(2): 141—150.

[17] Merigo J M, Gil-Lafuente A M. The induced generalized OWA operator[J]. Information Sciences, 2009, 179(6): 729—741.

[18] Chiclana F, Herrera-Viedma E, Herrera F, et al. Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2004, 19(5): 233—255.
[19]潘德惠, 郭亚军. 城市发展状况的综合评价方法[J]. 城市问题, 1985, 8(1): 1—7, 19.
Pan De-hui, Guo Ya-jun. The comprehensive evaluation method of urban development[J]. Urban Problem, 1985, 8(1): 1—7, 19. (in Chinese)
[20]郭亚军, 潘德惠. 城市系统的综合评价方法与城市发展最佳决策的探讨[J]. 系统工程理论与实践, 1986, 6(4): 26—32, 58.
Guo Ya-jun, Pan De-hui. Comprehensive evaluation method of urban systems and the best decision making of urban development[J]. Systems Engineering: Theory and Practice, 1986, 6(4): 26—32, 58. (in Chinese)
[21]郭亚军. 一种新的动态综合评价方法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 49—54.
Guo Ya-jun. New theory and method of dynamic comprehensive evaluation[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 49—54. (in Chinese)
[22]王应明. 运用离差最大化方法进行多指标决策与排序[J]. 系统工程与电子技术, 1998, 20(7): 26—28, 33.
Wang Ying-ming. Using the method of maximizing deviations to make decision for multiindicies[J]. Systems Engineering and Electronic Technology, 1998, 20(7): 26—28, 33. (in Chinese)
[23]王明涛. 多指标综合评价中权数确定的离差、均方差决策方法[J]. 中国软科学, 1999, 14(8): 100—101, 107.
Wang Ming-tao. The deviation & mean square deviation decision method of determining index weights[J]. China Soft Science, 1999, 14(8): 100—101, 107. (in Chinese)
[24]刘树林, 邱菀华. 多属性决策基础理论研究[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(1): 39—44.
Liu Shu-lin, Qiu Wan-hua. Studies on the basic theories for MADM[J]. Systems Engineering: Theory and Practice, 1998, 18(1): 39—44. (in Chinese)
[25]郭亚军, 易平涛. 线性无量纲化方法的性质分析[J]. 统计研究, 2008, 25(2): 93—100.
Guo Ya-jun, Yi Ping-tao. Character analysis of linear dimensionless methods[J]. Statistical Research, 2008, 25(2): 93—100. (in Chinese)
[26]郭亚军. 综合评价结果的敏感性问题及其实证分析[J]. 管理科学学报, 1998, 1(3): 28—35.
Guo Ya-jun. Sensibility and practice analysis of comprehensive evaluation result[J]. Journal of Management Sciences in China, 1(3): 28—35. (in Chinese)
[27] Chakraborty S, Yeh C H. A simulation comparison of normalization procedures for TOPSIS[C]. International Conference on Computers and Industrial Engineering, 2009: 1815—1820.
[28]郭亚军. 综合评价理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
Guo Ya-jun. Comprehensive Evaluation Theory and Method[M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese)

Analysis of influence of dimensionless methods on deviation maximization method

GUO Ya-jun, MA Feng-mei, DONG Qing-xing
College of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China

Abstract: Based on the research into deviation maximization method and the research into dimensionless methods, this paper analyzes the influence of dimensionless methods on the effect of deviation maximization method from some different perspectives, which provides the basis of selecting dimensionless methods in deviation maximization method. Finally an illustrative example are given to examine the conclusion.
Key words: comprehensive evaluation; deviation maximization method; dimensionless method