

基于非参数 ACE 变换的贝叶斯非线性协整检验^①

朱慧明¹, 李素芳¹, 曾惠芳¹, 虞克明²

(1. 湖南大学工商管理学院, 长沙 410082; 2. 布鲁内尔大学数学系, 伦敦 UB8 3PH)

摘要: 针对线性以及非线性协整检验存在模型参数过多、小样本条件下检验功效偏低的问题, 提出基于非参数 ACE 变换的贝叶斯非线性协整 VAR 模型, 运用 ACE 算法进行变量变换, 结合参数的完全条件分布设计 Gibbs 抽样方案, 进行贝叶斯非线性协整检验, 并利用 Monte Carlo 仿真研究了贝叶斯非线性协整方法的检验势, 发现贝叶斯非线性协整比经典 Johansen 法具有更高更稳健的检验势; 同时, 对中国城市和农村居民消费价格指数序列进行实证分析. 研究表明: 贝叶斯非线性协整方法解决了模型中参数过多、小样本条件下检验功效偏低的问题, 提高了估计的精确度和检验的准确性.

关键词: 协整; 非线性; 非参数; 贝叶斯分析; Monte Carlo 仿真

中图分类号: F224.0 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2011)05-0052-13

0 引言

协整 (cointegration) 主要用来描述经济系统两个或多个非平稳序列间的长期均衡关系, 即序列的各个分量均为非平稳单整序列, 而它们的线性或非线性组合却是平稳的. 协整理论最初由诺贝尔经济学奖获得者 Granger^[1] 教授于 1987 年提出, 目前已经成为经济时间序列研究的主要方法, 其应用已远远超出对线性回归诊断性检验的范畴. 常用的协整检验方法主要有以 ADF 检验为基础的 EG 两步法和 Johansen 协整检验法等, 这些经典方法都属于线性协整检验方法, 主要用于研究变量的非平稳性, 包括线性限制下的识别、基于 Johansen 极大似然估计的非线性识别^[2,3] 以及协整秩的确定, 却没有同时考虑变量的非线性特征. 因此, 在研究经济金融变量的非线性特征时, 线性协整方法常常是不适合的; 为了弥补其局限性, Granger 和 Haldrup^[4] 将线性协整理论扩展到非线性范畴, 提出了非线性协整概念. 与线性协整不

同, 非线性协整同时考虑了非平稳和非线性因素, 主要用来研究经非线性变换后的两个或多个非平稳序列之间是否存在协整关系, 因此, 它能更加准确地刻画宏观经济和金融市场特征. 孙青华等^[5] 根据非线性协整关系的定义, 提出了一种估计与检验非线性长记忆时间序列之间协整关系的方法. 樊智和张世英^[6] 认为非线性协整可以更好地刻画多个时间序列之间的均衡关系, 并利用小波神经网络构建非线性协整模型, 分析了沪深股市之间的非线性协整关系. Esève 等^[7] 的研究发现美国股票价格与红利之间不存在线性协整关系, 而是服从双机制 (two-regime) 非线性阈值协整模型; Escribano 等^[8] 则提出一种计数协整检验方法 (record counting cointegration test RCC), 结果发现在序列呈现非线性和变结构特征时, RCC 检验比 EG 检验更稳健. 然而, 这些检验方法主要适合于样本量较大的情形, 不适合分析小样本条件下的协整关系检验; 当模型中参数过多, 而检验模

① 收稿日期: 2009-04-27; 修订日期: 2011-03-13.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71031004, 70771038); 教育部长江学者和创新团队发展计划资助项目 (IRT0916); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目 (教外司留 [2010] 609).

作者简介: 朱慧明 (1966—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士生导师. Email: zhuhuiming999@yahoo.com.cn

型的建立基于月份或季度数据时, 这些检验方法存在功效偏低的缺陷。

基于贝叶斯统计的协整检验方法能够解决以上几个方面的问题。首先, 应用贝叶斯方法可以进行有限样本条件下的信息推断; 其次, 贝叶斯方法包含了样本信息和模型参数的先验信息, 而经典方法只是从条件似然函数获得信息; 同时, 贝叶斯方法处理先验信息的技巧也比较灵活, 应用该方法可得到协整秩的无条件概率^[9]。因此, 贝叶斯方法能够克服 EG 两步法和 Johansen 检验等协整方法的不足之处, 解决模型不确定性风险问题。1991 年 Koop^[10] 首先应用贝叶斯方法检验股票价格与红利之间的协整关系, 发现贝叶斯协整检验方法消除了经典协整检验方法在小样本条件下功效偏低等问题, 能够得到更加准确的协整关系检测。此后, Geweke^[11], Kleibergen^[12] 等学者进一步研究了贝叶斯线性协整的检验问题, 包括不同限制下的贝叶斯协整向量识别, 协整秩的贝叶斯推断及其应用, 其中, 协整系统贝叶斯估计的代表性研究有 Geweke, Bauwens 和 Lubrano^[13] 等, Geweke 提出用马尔可夫链—蒙特卡罗方法 (MCMC) 估计预报概率以确定协整的秩, Bauwens 和 Lubrano 则考虑了协整向量元素的识别问题; 之后, 张世英等^[14] 研究了协整系统误差修正模型的贝叶斯协整检验方法, Marti 和 Marti^[15] 应用 Jeffrey 先验对三角形协整模型进行贝叶斯推断, 研究了英、美、意、加四国的私人公共消费支出的可替代性问题; 在此基础上, Marti^[16] 对分整模型也提出相应的贝叶斯分析, Kleibergen 和 Paap^[17] 得到了协整秩的后验分布, Strachan 和 Inder^[18] 提出了一种估计多变量误差修正模型协整秩的后验概率密度的方法, Villani^[19] 则对协整进行了更进一步的参考性贝叶斯分析, 并研究了恰当识别限制下协整空间的贝叶斯估计, 发现其贝叶斯估计结果优于极大似然估计^[20]。相对逐渐趋于成熟的贝叶斯线性协整理论而言, 非线性协整的贝叶斯方法研究还有待完善; 非线性协整理论初步发展后, 线性协整的贝叶斯分析逐步延伸到非线性关系的研究中, 贝叶斯非线性协整研究才开始崭露头角。例如, Sugi^[21] 于 2008 年提出了 Markov 突变协整模型, 在含转换变量的非线性框架内进行协整向

量的贝叶斯估计, 从而得到了更准确的估计。可以发现, 非线性协整的贝叶斯方法研究还只有部分尝试性探索, 且没有考虑线性与非线性之间的简单变换, 以致目前还没有一种通用有效的简单贝叶斯非线性协整检验方法。同时, 现有的研究大多是针对单个模型或时间序列提出的, 对于非线性协整模型的贝叶斯分析还没有系统的研究。

本文利用非参数 ACE (alternating conditional expectations) 变换算法构建贝叶斯非线性协整 VAR (CVAR) 模型, 据此研究贝叶斯非线性协整问题, 通过 Monte Carlo 仿真对贝叶斯非线性协整方法与经典 Johansen 方法进行比较分析, 发现贝叶斯协整检验具有更高更稳健的检验势。同时, 结合 Gibbs 抽样对中国居民消费价格指数序列进行贝叶斯非线性协整检验的系统研究, 验证贝叶斯方法在非线性和协整检验应用中的可行性与有效性。

1 基于非参数变换的非线性 CVAR 模型

若序列 y_t 与序列 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$ 的非线性可测函数 $g(y_t)$ 和 $f(x_t)$ 均服从 $I(1)$ 单整过程, 而 $g(y_t)$ 和 $f(x_t)$ 的线性组合却是 $I(0)$ 平稳过程, 则 x_t 和 y_t 之间存在非线性协整关系。因此, 基于如下思路研究变量 x_t 和 y_t 的非线性协整检验。首先, 利用非参数 ACE 算法对 x_t 和 y_t 进行非线性变换, 得到非线性可测函数 $f(x_t)$ 和 $g(y_t)$; 然后, 再对变换后的序列进行协整检验, 如果变换后的序列之间存在协整, 此时 x_t 和 y_t 之间存在非线性协整关系, 否则, 它们之间没有非线性协整关系。

一般来讲, ACE 算法可以利用变量的非线性可测函数 $f(x_t)$ 和 $g(y_t)$, 将变量集 $(y_t, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ 变换为 $(g(y_t), f(x_{1t}), f(x_{2t}), \dots, f(x_{nt}))$ 的形式。作为一种非参数方法, ACE 算法仅依赖于极弱的分布假设, 因此, 利用 ACE 算法能够得到数据的多种非线性变换形式, 从而可以描述变量不同形式的非线性特征。同时, 这些变换都渐近收敛于一个通过非参数数据平滑技术得到的最理想变换, 即最优 ACE 变换。最优 ACE 变换使得变换后

的序列 $g(y)$ 与 $\sum_{i=1}^n f(x_i)$ 之间的相关性达到最大, 这一原则等价于使 $g(y)$ 对 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ 的回归关系最显著, 即使回归方程

$$g(y) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + u \quad (1)$$

是一个显著的回归关系式, 其中是随机误差项, 计算方程的拟合优度 R^2 , 则 ACE算法等价于选择非线性变换函数, 使得上述回归关系中拟合优度达到最大, 即残差平方和达到最小

$$\underset{f, g}{\operatorname{argmin}} \sigma^2(g(y), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = \underset{f, g}{\operatorname{argmin}} \frac{E[g(y) - \sum_{i=1}^n f(x_i)]^2}{E[g(y)]^2} \quad (2)$$

此处 $\sigma^2(g(y), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ 为模型 (1) 的均方误差.

为了进行 ACE变换, 首先对 $g(y), f(x_i)$ 赋予初始值, 令初始值 $g^{(0)}(y) = 1, f^{(0)}(x_i) = \omega_i x_i$, ω_i 为 $g(y)$ 关于 x_i 的线性回归系数的最小二乘估计, 不失一般性, 假设 $E(g^{(0)}(y)) = 1$; 然后, 按如下步骤得到最优非线性变换

第 1步 以给定的初始值 $g^{(0)}(y)$ 为条件, 估计 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ 得到

$$\hat{f}^{(j)}(x_j) = E(g^{(0)}(y) - \sum_{i \neq j} f^{(0)}(x_i) | x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

第 2步 以 $\hat{f}^{(1)}(x_1), \hat{f}^{(1)}(x_2), \dots, \hat{f}^{(1)}(x_n)$ 为条件估计 $g^{(1)}(y)$, 使得 $E(\hat{g}^{(1)2}(y)) = 1$, 并且

$$g^{(1)}(y) = \frac{E(\sum_{i=1}^n \hat{f}^{(1)}(x_i) | y)}{\| \sum_{i=1}^n \hat{f}^{(1)}(x_i) | y \|}$$

第 3步 以 $g^{(1)}(y)$ 的当前估计值 $\hat{g}^{(1)}(y)$ 为条件, 对 $f^{(2)}(x_1), f^{(2)}(x_2), \dots, f^{(2)}(x_n)$ 进行类似估计,

$$\hat{f}^{(2)}(x_j) = E(\hat{g}^{(1)}(y) - \sum_{i \neq j} \hat{f}^{(1)}(x_i) | x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

重复步骤 2 - 3 不断进行迭代, 直到 $\sigma^2(g(y), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ 不再减少为

止, 此时 ACE变换渐近收敛到最优变换, 即可获得最优非线性可测函数.

通过非参数 ACE变换, 变量 x, y_i 的非线性 CVAR模型的另一有用等价形式为 n 维向量 Z 的 k 阶 VAR模型

$$Z_t = \delta D + \sum_{i=1}^k \Gamma_i Z_{t-i} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3)$$

此处 $Z_t = (g(y_t), f(x_t))'$, $f(x_t)$ 和 $g(y_t)$ 是经 ACE变换后的变量, 均服从 $I(1)$ 单整过程, ϵ_t 是均值 0 协方差矩阵 Σ 的 n 维正态随机向量, 并且相互独立, 服从多元正态 $N(0, \Sigma), \Sigma > 0, \delta'$ 为系数向量, $\delta'D_t$ 为 n 维截距向量, Γ 是 $n \times n$ 的自回归系数矩阵. 不难看出, 对模型进行移项、整理, 非线性 CVAR模型可以转化为如下误差修正模型

$$\Delta Z_t = \delta'D_t + \Pi Z_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Psi_i \Delta Z_{t-i} + \epsilon_t \quad (4)$$

此处 $\Pi = \alpha\beta', \alpha, \beta$ 为 $n \times n$ 阶满秩矩阵, $0 \leq k \leq n$ 为协整关系的个数. 为了准确识别向量 β 将 β 作标准化处理, 使 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ B \end{pmatrix}$, B 是 $(n-1) \times n$ 矩阵.

为了便于分析, 将误差修正模型进一步转化为结构更为紧凑的矩阵形式

$$Z = D\delta + Z_1\beta\alpha' + A\Psi + E \quad (5)$$

其中

$$Z = \begin{pmatrix} \Delta Z'_0 \\ \Delta Z'_1 \\ \vdots \\ \Delta Z'_{T-1} \end{pmatrix}, \quad Z_1 = \begin{pmatrix} Z'_0 \\ Z'_1 \\ \vdots \\ Z'_{T-1} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \Delta Z'_0 & \Delta Z'_1 & \dots & \Delta Z'_{k-2} \\ \Delta Z'_1 & \Delta Z'_2 & \dots & \Delta Z'_{k-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta Z'_{T-1} & \Delta Z'_{T-2} & \dots & \Delta Z'_{k-T+1} \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{k-j} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_j \end{pmatrix}$$

并且, $\operatorname{vec}(E) \sim N(0, \Sigma \otimes I)$, $\operatorname{vec}(\cdot)$ 表示拉直向量. 显然, 对于给定的 α, β, Ψ, Z_1 和 A, Z 服从均值向量为 $D\delta + Z_1\beta\alpha' + A\Psi$, 协方差阵为 Σ 的矩阵正态分布, 即

$$Z | \alpha, \beta, \Psi, Z_1, A \sim MN(D\delta + Z_1\beta\alpha' + A\Psi, \Sigma)$$

此时, 模型的似然函数为

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \beta, \Psi, \delta, \Sigma | Z, Z_1, A) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-nT/2} \\
 & \left| \Sigma \right|^{-T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \epsilon_t' \Sigma^{-1} \epsilon_t\right\} \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-nT/2} \left| \Sigma \right|^{-T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr} \right. \\
 & \left. [(Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)' \right. \\
 & \left. (Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)\Sigma^{-1}]\right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

其中 $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹.

2 非线性 CVAR 模型的贝叶斯分析

2.1 参数的贝叶斯估计

根据 Ntzoufras^[22] 和 Amisano^[23] 的观点, 假设参数 $\alpha, \beta, \Psi, \delta, \Sigma$ 相互独立, 并且 α, β, Ψ 和 δ 均服从矩阵正态分布, Σ 服从扩散先验分布, 即

$$\begin{aligned}
 \pi(\text{vec}(\alpha)) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\text{vec}(\alpha) - \mu_\alpha)'\right. \\
 & \left.\Sigma_\alpha^{-1}(\text{vec}(\alpha) - \mu_\alpha)\right\} \\
 \pi(\text{vec}(\beta)) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\text{vec}(\beta) - \mu_\beta)'\right. \\
 & \left.\Sigma_\beta^{-1}(\text{vec}(\beta) - \mu_\beta)\right\} \\
 \pi(\text{vec}(\Psi)) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\text{vec}(\Psi))'\right. \\
 & \left.\Sigma_\Psi^{-1}\text{vec}(\Psi)\right\} \\
 \pi(\text{vec}(\delta)) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\text{vec}(\delta) - \mu_\delta)'\right. \\
 & \left.\Sigma_\delta^{-1}(\text{vec}(\delta) - \mu_\delta)\right\} \\
 \pi(\Sigma) &\propto \left| \Sigma \right|^{-(n+1)/2}
 \end{aligned}$$

此处 $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\delta$ 分别为 $\text{vec}(\alpha), \text{vec}(\beta), \text{vec}(\delta)$ 的先验均值, $\Sigma_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha \mathbf{I}_k, \Sigma_\beta^{-1} = \varphi_\beta \mathbf{I}_{k-n}, \Sigma_\Psi^{-1}$ 为对角矩阵. 符号“ \propto ”表示两边仅差一个不依赖于左边参数的常数因子, \otimes 表示 Kronecker 乘积.

根据贝叶斯定理, 参数的后验分布密度函数与似然函数、先验分布密度函数的乘积成正比, 即

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha, \beta, \Psi, \delta, \Sigma | Z, Z_1, A) &\propto L(\alpha, \beta, \Psi, \delta, \Sigma) \\
 \pi(\alpha, \beta, \Psi, \delta, \Sigma) &\propto \left| \Sigma \right|^{-(n+1)/2} \\
 & \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}((Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)'\right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. (Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)\Sigma^{-1} + (\text{vec}(\alpha) - \mu_\alpha)'\right. \\
 & \left. \Sigma_\alpha^{-1}(\text{vec}(\alpha) - \mu_\alpha) + (\text{vec}(\beta) - \mu_\beta)'\right. \\
 & \left. \Sigma_\beta^{-1}(\text{vec}(\beta) - \mu_\beta) + \text{vec}(\Psi)'\Sigma_\Psi^{-1}\text{vec}(\Psi) + \right. \\
 & \left. (\delta - \mu_\delta)'\Sigma_\delta^{-1}(\delta - \mu_\delta)\right\} \quad (7)
 \end{aligned}$$

由于参数较多, 考虑将其分成如下三部分

$$\theta_1 = (\text{vec}(\beta)), \theta_2 = (\text{vec}(\alpha)'\text{vec}(\Psi)\text{vec}(\delta)')', \theta_3 = (\text{vech}(\Sigma))$$

其中, $\text{vech}(\cdot)$ 表示半拉直向量. 下面讨论模型参数的后验条件分布及其贝叶斯估计.

1) θ_1 的后验条件分布. 由条件概率的定义, 参数 θ_1 关于 α, Ψ, δ 和 Σ 的条件后验密度函数为

$$\begin{aligned}
 \pi(\beta | \alpha, \Psi, \delta, \Sigma, Z, Z_1, A) &= \\
 & \frac{\pi(\beta, \alpha, \Psi, \delta, \Sigma | Z, Z_1, A)}{\pi(\alpha, \Psi, \delta, \Sigma | Z, Z_1, A)} \\
 & \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}((Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)'\right. \\
 & \left. (Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)\Sigma^{-1} + \right. \\
 & \left. \varphi_\beta(\text{vec}(\beta) - \mu_\beta)'\text{vec}(\beta) - \mu_\beta)\right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

显然, $\theta_1 = \text{vec}(\beta)$ 的后验条件分布为矩阵正态分布, 其贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_1 = (Q + Q_0)^{-1}(h + h_0) \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned}
 Q &= \alpha \Sigma^{-1} \alpha \otimes (Z_{12}'Z_{12}), \quad Q_0 = \varphi_\beta \mathbf{I}_{n-n_1}, \\
 h &= \text{vec}(Z_{12}'M\Sigma^{-1}\alpha), \quad h_0 = \varphi_\beta \mu_\beta, \quad M = Z - Z_{11}\alpha' - \\
 & A\Psi - D\delta Z_1 = (Z_{11} \quad Z_{12}), \quad Z_{11} \text{ 为 } n \times n \text{ 矩阵.}
 \end{aligned}$$

2) θ_2 的后验条件分布. 同样地, 由式 (7) 可得 θ_2 的条件后验密度函数为

$$\begin{aligned}
 \pi(\theta_2 | \beta, \Sigma, Z, Z_1, A) &\propto \\
 & \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}((Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)'\right. \\
 & \left. (Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)\Sigma^{-1} + \right. \\
 & \left. \varphi_\alpha(\text{vec}(\alpha) - \mu_\alpha)'\text{vec}(\alpha) - \mu_\alpha) + \right. \\
 & \left. \text{vec}(\Psi)'\Sigma_\Psi^{-1}\text{vec}(\Psi) + (\delta - \mu_\delta)'\right. \\
 & \left. \Sigma_\delta^{-1}(\delta - \mu_\delta)\right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

显而易见, θ_2 的后验条件分布也为矩阵正态分布, 其贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_2 = (R_1 + R_0)^{-1}(g + g_0) \quad (11)$$

其中

$$R_1 = S'(\Sigma^{-1} \otimes W)S, \quad R_0 = \varphi_\alpha \mathbf{I}_k + \Sigma_\Psi^{-1} +$$

$$\Sigma_0^{-1}, \xi = S' \text{vec}(W' \Sigma^{-1})$$

$$\xi = \varphi_a \mu_a + \Sigma_0^{-1} \mu_0, W = (Z_1 \beta \ A \ D)$$

S为置换矩阵,使得 $\text{vec}((\alpha \ \Psi' \ \delta)') = \mathbb{S}_2$,从而可得到 $\text{vec}(\alpha')$, $\text{vec}(\Psi)$ 和 $\text{vec}(\delta)$ 的后验条件分布 $\pi(\text{vec}(\alpha') | \Psi, \delta, \beta, \Sigma, Z, Z_1)$, $\pi(\text{vec}(\Psi) | \alpha, \delta, \beta, \Sigma, Z, Z_1, A)$, $\pi(\text{vec}(\delta) | \alpha, \Psi, \beta, \Sigma, A, A_1, A)$ 都为矩阵正态分布.

特别地,当 $\varphi_a = 0, \Sigma_\Psi^{-1} = (0), \Sigma_\delta^{-1} = (0)$ 时, θ_2 的条件后验期望为

$$\hat{\theta}_2 = R^{-1} \xi = T^{-1} \{ \text{vec}(W'W)^{-1} W'Z \} \quad (12)$$

此时可以根据 θ_2 的后验条件分布进行模拟分析.

3) Σ 的后验条件分布. 同理,根据式(7)可得到 Σ 的条件后验密度函数为

$$\pi(\Sigma | \alpha, \beta, \Psi, \delta, Z, Z_1, A) \propto |\Sigma|^{-(T+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} [\text{tr}((Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)' (Z - D\delta - Z_1\beta\alpha' - A\Psi)\Sigma^{-1})] \right\} \quad (13)$$

由此可知, Σ 的条件后验分布为逆 Wishar分布.

2.2 贝叶斯非线性协整秩确定

根据上述参数的后验条件分布,可以应用 Gibbs抽样对协整模型进行模拟分析,具体过程如下,首先,确定参数的初始值 $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \Psi^{(0)}, \delta^{(0)}$ 和 $\Sigma^{(0)}$;然后,根据后验完全条件分布进行抽样,即

第 1步 从 Σ 的后验完全条件分布 $\pi(\Sigma | \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \Psi^{(0)}, \delta^{(0)})$ 抽样得 $\Sigma^{(1)}$;

第 2步 从 δ 的后验完全条件分布 $\pi(\delta | \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \Psi^{(0)}, \Sigma^{(1)})$ 抽取 $\delta^{(1)}$;

第 3步 从 Ψ 的后验完全条件分布 $\pi(\Psi | \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \delta^{(1)}, \Sigma^{(1)})$ 抽取 $\Psi^{(0)}$;

第 4步 从 α 的联合后验完全条件分布 $\pi(\alpha | \beta^{(0)}, \Psi^{(1)}, \delta^{(1)}, \Sigma^{(1)})$ 抽取 $\alpha^{(1)}$;

第 5步 从 β 的联合后验完全条件分布 $\pi(\beta | \alpha^{(1)}, \Psi^{(1)}, \delta^{(1)}, \Sigma^{(1)})$ 抽取 $\beta^{(1)}$;

重复步骤 2—5 直至迭代依分布收敛到目标分布 π , Markov链达到平稳状态时则停止,从而可以用抽样序列 $\{\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}, \Psi^{(i)}, \delta^{(i)}, \Sigma^{(i)}\}_{i=1}^N$ 准确估计非线性协整模型参数后验分布 $\pi(\alpha, \beta, \Psi, \delta$

$$\Sigma | Z, Z_1, A).$$

检验协整关系需要考察包含了变量间长期均衡信息的影响矩阵 Π ,根据 Grange表示定理,如果系统存在 r 个协整关系,则 $\text{rank}(\Pi) = r$,具体来说,有如下三种情况

1)当 $r=0$ 时,表明 Z 不存在协整关系,系统通过差分能达到平稳.

2)当 $r=1$ 时,表明 Z 的所有元素是趋势平稳过程, $Z_t \sim I(1)$ 单整的假设不成立.

3)当 $1 \leq r \leq n-1$ 时,这种情况是讨论的重点.

当 $n=1$ 时,式(4)与 ADF检验的辅助回归形式相同.若 Z 是单整的,则 $\Pi=0$ 或 $\text{rank}(\Pi)=0$ 所以单整检验同样可以归结为检验影响矩阵 Π 秩的问题.由此,检验协整秩的过程就是检验影响矩阵 Π 秩的过程.

令 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是矩阵 Π 的特征根,它由 β 决定;但是, λ_i 与 β 的关系是非线性的,且没有明显的解析表达式,因此很难利用 VAR模型参数得到 λ_i 的确切解析表示,贝叶斯方法常用线性限制的方法来识别协整向量和确定协整秩,在此,考虑对特定系数 β 作标准化线性限制,使得 $\beta = \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta \end{Bmatrix}$.

当 $r \leq n-1$ 时, $\Pi = \alpha\beta'$ 的奇异值分解为 $\Pi = U\Lambda V^H$,其中, V^H 表示矩阵 V 的共轭转置, U, V 为正交矩阵,满足 $U^H U = V^H V = I, \Lambda$ 为对角矩阵,对角元素为 $\Pi \Pi'$ 正特征值的平方根,从而模型可写成

$$\Delta Z_t = \delta'D_t + U\Lambda V^H Z_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Psi_i \Delta Z_{t-i} + \varepsilon_t \quad (14)$$

令 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)'$, Λ 的非零对角元素个数即为矩阵 Π 的秩,也就是协整秩—协整关系的个数.根据式(7), λ 的条件后验密度为

$$\pi(\lambda | U, V, \Psi, \delta, \Sigma, Z, Z_1, A) \propto |\Omega|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} ((\lambda - \eta)' \Omega^{-1} (\lambda - \eta))\right\} \quad (15)$$

其中

$$\eta = \zeta - Q_2 Q_2^{-1} \zeta, \Omega = Q_1 - Q_2 Q_2^{-1} Q_1, c =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = G(\varphi_\alpha (V_{11}^H V_{11})) \otimes I + (U^H \Sigma^{-1} (u) \otimes V^H Z_1' Z_1 V)^{-1} \times \text{vec}(\varphi_\alpha U^H \mu_\alpha V_{11} + V^H Z_1' M \Sigma^{-1} U)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = G(\varphi_\alpha (V_{11}^H V_{11})) \otimes I + (U^H \Sigma^{-1} U) \otimes (V^H Z_1' Z_1 V)^{-1} G_\alpha' V = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}, M =$$

$$Z - A\psi - D\delta$$

并且, G 是置换矩阵, 使得 λ 由 $G(\text{vec}(\Lambda))$ 的前 r 行元素组成.

考虑式 (14) 中参数的贝叶斯估计, 由式 (7) 可得 Λ 的条件后验密度为

$$\pi(\Lambda | U, V, \Psi, \delta, Z, Z_1, A) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} (\text{tr}(E' E \Sigma^{-1}) + (\text{vec}(\Lambda U V_{11}^H) - \mu_\alpha)') \Sigma_\alpha^{-1} (\text{vec}(\Lambda U V_{11}^H) - \mu_\alpha)\right\} \quad (16)$$

通过 Gibbs 抽样方法得到 $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$, 并对矩阵 $\Pi^{(i)} = \alpha^{(i)} \beta^{(i)}$ 进行奇异值分解, 使得 $\Pi^{(i)} = U^{(i)} \Lambda^{(i)} V^{(i)}$, $U^{(i)}, V^{(i)}$ 满足 $U^{(i)H} U^{(i)} = V^{(i)H} V^{(i)} = I$. 根据 λ, Λ 的后验条件分布式 (15), (16) 不断更新 Monte Carlo 抽样, 直到 Markov 链收敛到目标分布, 达到平稳状态为止, 此时, λ 的贝叶斯估计可根据 $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)})$, $i = 1, 2$

..., N 的后验均值得到, 此处 N 为 Gibbs 抽样的迭代次数, λ 中非零元素的个数即为协整关系的个数.

3 协整检验势的 Monte Carlo 仿真比较

为了分析贝叶斯协整检验的小样本性质, 可采用后验边缘均值作为贝叶斯方法的检验统计量, 运用 Monte Carlo 方法进行仿真研究. 首先, 利用下述数据生成过程

$$\Delta(y_t \ x_t)' = \epsilon_t,$$

$$\Delta \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} (0.4 \ 0.1) \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{pmatrix} + \epsilon_t,$$

$$\epsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, I)$$

分别生成协整秩 $r=0$ 和 $r=1$ 时的数据序列 y, x 然后, 利用 ACE 变换 $\Delta z = (\Delta g(y) \ \Delta f(x))'$ 来研究在这两种协整秩情况下方法的检验势. 在 Monte Carlo 仿真中, 样本容量依次取 $T=100, 200, 400$ 显著性水平为 5%, 仿真次数为 10 000 次, 为了便于与经典 Johansen 检验进行比较, 给出 Johansen 检验相应的迹检验势和最大特征值检验势, 相关仿真分析结果列于表 1.

表 1 贝叶斯协整方法与 Johansen 方法的检验势仿真比较

Table 1 Comparison of the test power between Bayesian cointegration and Johansen's cointegration analysis

5% 显著性水平		迹检验		最大特征值检验		贝叶斯协整检验	
T	r	0	1	0	1	0	1
100		0.735	0.546	0.752	0.504	1.000	1.000
200		0.974	0.977	0.976	0.977	1.000	1.000
400		0.986	0.987	0.992	0.987	1.000	1.000

注: r 表示协整秩.

由表 1 可见, 在 5% 的显著性水平下, 贝叶斯协整检验比 Johansen 检验具有更高更稳健的检验势, Johansen 法的检验势在 $T=100$ 时比较低, 到 $T=200$ 以后才表现稳定, 而贝叶斯方法的检验势一直都很稳定, 且达到 1. 特别是原假设协整秩时, Johansen 方法的检验势在样本容量为 100 时仅为 0.546 和 0.504 而贝叶斯协整的检验势却为 1.000; 在样本容量大于 100 时, 贝叶斯协整方法的检验势也略高于 Johansen 检验, 这都表明贝叶斯协整检验方法的可行性及小样本下的有效性.

4 实证分析

本文利用 2001 年 1 月—2009 年 1 月城市和农村居民月度消费价格指数序列进行实证分析, 建立基于非参数 ACE 变换的非线性协整 VAR 模型, 并通过贝叶斯分析结合 Gibbs 抽样研究两序列间的协整关系. 城市与农村居民消费价格指数序列分别表示为 $y_t = \text{UCPI}$, $x_t = \text{RCPI}$. 为了检验序列的平稳性, 首先对其进行 ADF 单位根检验, 结

果发现序列 y_t, x_t 的 ADF 检验统计量分别为 -1.4351 和 -1.4931 ; 而其相应的 1% 水平临界值分别为 -4.0565 和 -4.0575 ; 一阶差分后序列 $\Delta y_t, \Delta x_t$ 的 ADF 检验统计量分别为 -8.6440 和 -7.6492 而其相应的 1% 水平临界值均为 -2.5895 ; 这些结果表明 y_t 和 x_t 都服从 $I(1)$ 单整过程. 于是应用经典 EG 两步法进一步考察两序列间的协整关系, 可知 y_t 和 x_t 之间没有线性协整关系. 所以, 下面有必要检验序列 y_t 与 x_t 是否存在非线性协整关系. 首先, 对原序列 y_t, x_t 进行非参数 ACE 变换, 经过迭代, 期望均值方差达到 0.004 4 时即可获得收敛的最优 ACE 变换, 从而得到变换后的新序列 \tilde{y}_t, \tilde{x}_t ; 然后, 检验 \tilde{y}_t, \tilde{x}_t 的平稳性以及两序列间的协整关系. 图 1 (a) — (d) 分别给出了 \tilde{y}_t, \tilde{x}_t 的走势图和一阶差分序列图, 可以看出变换后两序列都清晰地描述出上升或下降趋势, 表现出不稳定性; 一阶差分后序列则表现出向均值回归的平稳序列特征. 因此, 对 \tilde{y}_t, \tilde{x}_t 进行单位根

检验, 结果如表 2 所示, 从表中各统计量数值可以判断, 序列 \tilde{y}_t, \tilde{x}_t 在 1% 显著水平下不能拒绝单位根原假设, 但其一阶差分序列 $\Delta \tilde{y}_t$ 和 $\Delta \tilde{x}_t$ 拒绝了原假设, 表明 \tilde{y}_t, \tilde{x}_t 经一阶差分后达到平稳, 经 ACE 变换后的两序列均服从 $I(1)$ 单整过程.

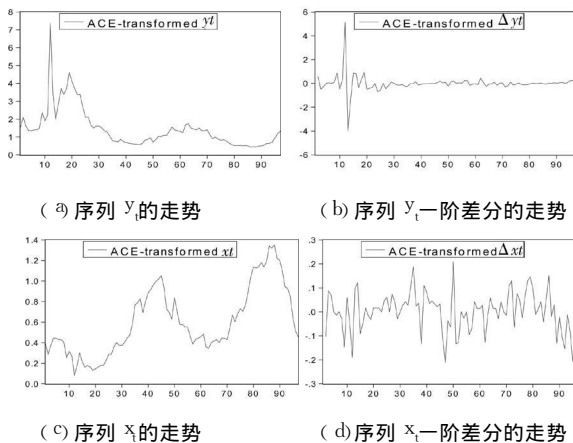


图 1 居民消费价格指数 ACE 变换后序列及其一阶差分后序列走势图
Fig. 1 The trend of ACE-transformed CPI series and first difference series

表 2 经 ACE 变换后居民消费价格指数序列的 ADF 单位根检验

Table 2 ADF test of ACE-transformed CPI series

经 ACE 变换后 CPI 序列	y_t	Δy_t	x_t	Δx_t
ADF 检验统计量	-1.6065 (-3.5056)	-3.7945^{***} (-2.5912)	-1.4403 (-4.0575)	-7.8893^{***} (-2.5895)

注: 表中括号内是 1% 水平临界值, *** 表示在 1% 显著水平上拒绝原假设.

其次, 考虑对序列 \tilde{y}_t, \tilde{x}_t 进行贝叶斯协整检验. 定义 $z_t = (\tilde{y}_t, \tilde{x}_t)'$, 可以建立基于非参数 ACE 变换算法的非线性 CVAR(2) 模型

$$\begin{cases} y_t = \eta_{11} \text{Seq} + \dots + \eta_{14} \text{Seq}_4 + \varphi_{111} y_{t-1} + \varphi_{112} y_{t-2} + \varphi_{121} x_{t-1} + \varphi_{122} x_{t-2} + \varepsilon_{1t} \\ x_t = \eta_{21} \text{Seq} + \dots + \eta_{24} \text{Seq}_4 + \varphi_{211} y_{t-1} + \varphi_{212} y_{t-2} + \varphi_{221} x_{t-1} + \varphi_{222} x_{t-2} + \varepsilon_{2t} \end{cases} \quad (17)$$

相应的误差修正模型为

$$\Delta z_t = \delta' D_t + \alpha \beta' z_t + \Psi_1 \Delta z_t + \varepsilon_t \quad (18)$$

其中, D_t 向量包含 4 个季节哑变量. 且 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)'$, $\beta = (1, \beta_2)'$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, $\Psi_1 =$

$$\begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} \end{pmatrix}, \delta' = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \eta_{24} \end{pmatrix}. \text{ 从而有如}$$

下联立方程组

$$\begin{cases} \varphi_{111} = \alpha_1 + \zeta_{11} \\ \varphi_{112} = -\zeta_{11} \\ \varphi_{121} = \alpha_1 \beta_2 + \zeta_{12} \\ \varphi_{122} = -\zeta_{12} \\ \varphi_{211} = \alpha_2 + \zeta_{21} \\ \varphi_{212} = -\zeta_{21} \\ \varphi_{221} = \alpha_2 \beta_2 + \zeta_{22} \\ \varphi_{222} = -\zeta_{22} \end{cases} \quad (19)$$

首先利用 WinBUGS 软件编写非线性 CVAR(2) 模型的贝叶斯分析程序, 利用 2001 年 1 月 — 2009 年 1 月农村和城市居民消费价格指数月

度数据进行 Gibbs 抽样, 得到模型的贝叶斯参数估计, 然后应用参数估计值代入联立方程组中对参数 $\alpha_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i$ 的值进行求解, 从而确定协整秩. 在 Gibbs 抽样过程中, 先对每个参数进行 5 000 次迭代, 以保证参数的收敛性, 然后舍弃原来的迭代, 再进行 15 000 次迭代, 对模型进行模拟仿真.

图 2—5 给出了非线性协整模型中参数的 MCMC 收敛性诊断图, 包括参数的动态轨迹收敛诊断和 Gelman-Rubin 统计量收敛诊断; 图 6 和图 7 分别给出了 φ 和 η 的参数估计, 包括参数的后验密度及其相应的分位区间估计图.

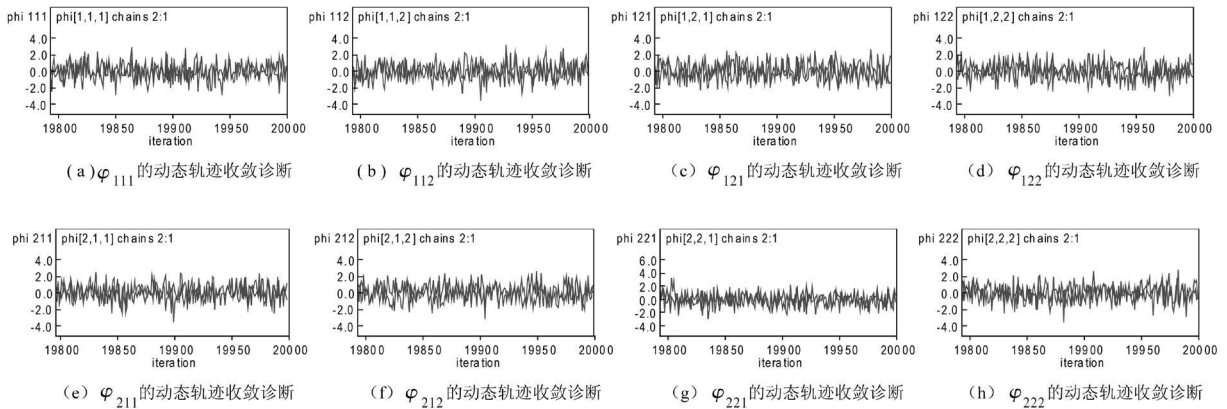


图 2 参数 φ 的动态轨迹收敛性诊断图

Fig 2 Dynamic trace convergence diagnostic plots of φ

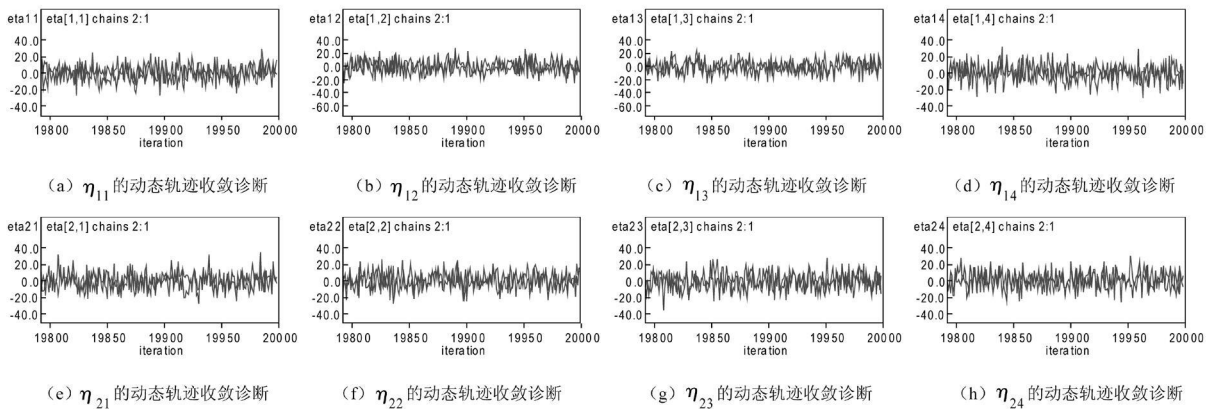


图 3 参数 η 的动态轨迹收敛性诊断图

Fig 3 Dynamic trace convergence diagnostic plots of η

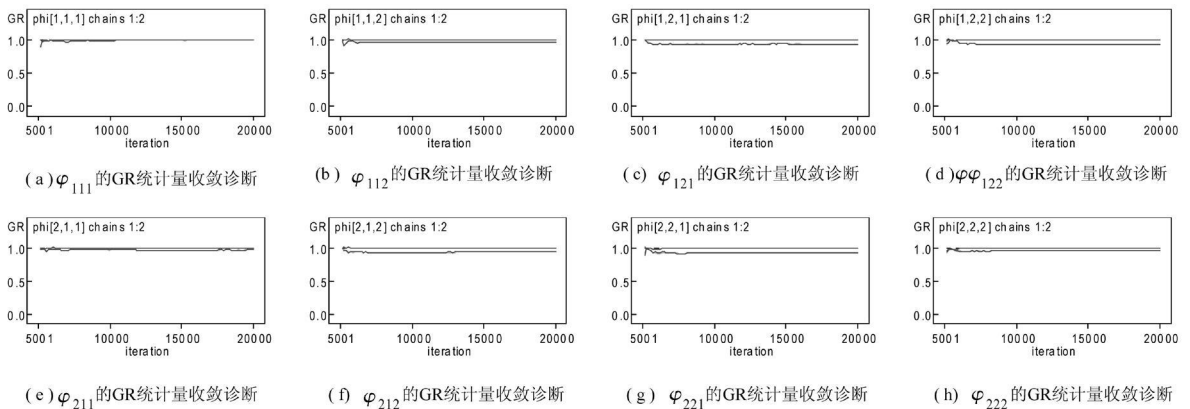


图 4 参数 φ 的 GR 统计量收敛性诊断图

Fig 4 Gelman-Rubin convergence diagnostic plots of φ

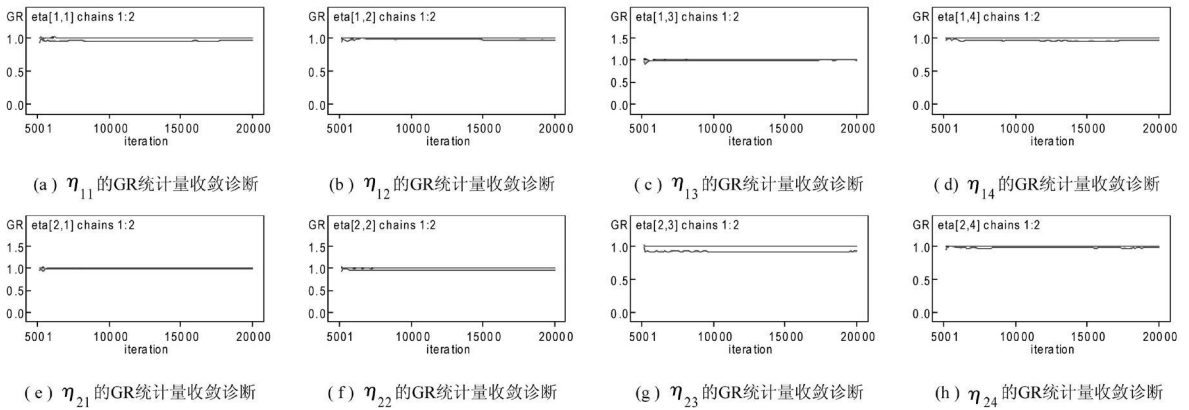


图 5 参数 η 的 GR 统计量收敛性诊断图

Figure 5 Gelman-Rubin convergence diagnostic plots of η

根据参数 φ 和 η 的动态轨迹收敛诊断图、GR 统计量收敛诊断图可以判断, 参数轨迹基本重合, 没有呈现出明显的周期性和规律性, 舍弃前面 5 000 次迭代后生成的 MC 抽样都在稳定的平行区域内, 没有出现异常值, 并且 GR 统计量随着迭

代次数的增加趋近于 1, 这些特征表明 Gibbs 抽样方法的收敛性很好, 收敛速度很快, 该抽样算法具有高度有效性, 因此, MCMC 生成的抽样准确收敛到目标分布, 从而保证了利用后面 15 000 次迭代进行参数估计的准确性。

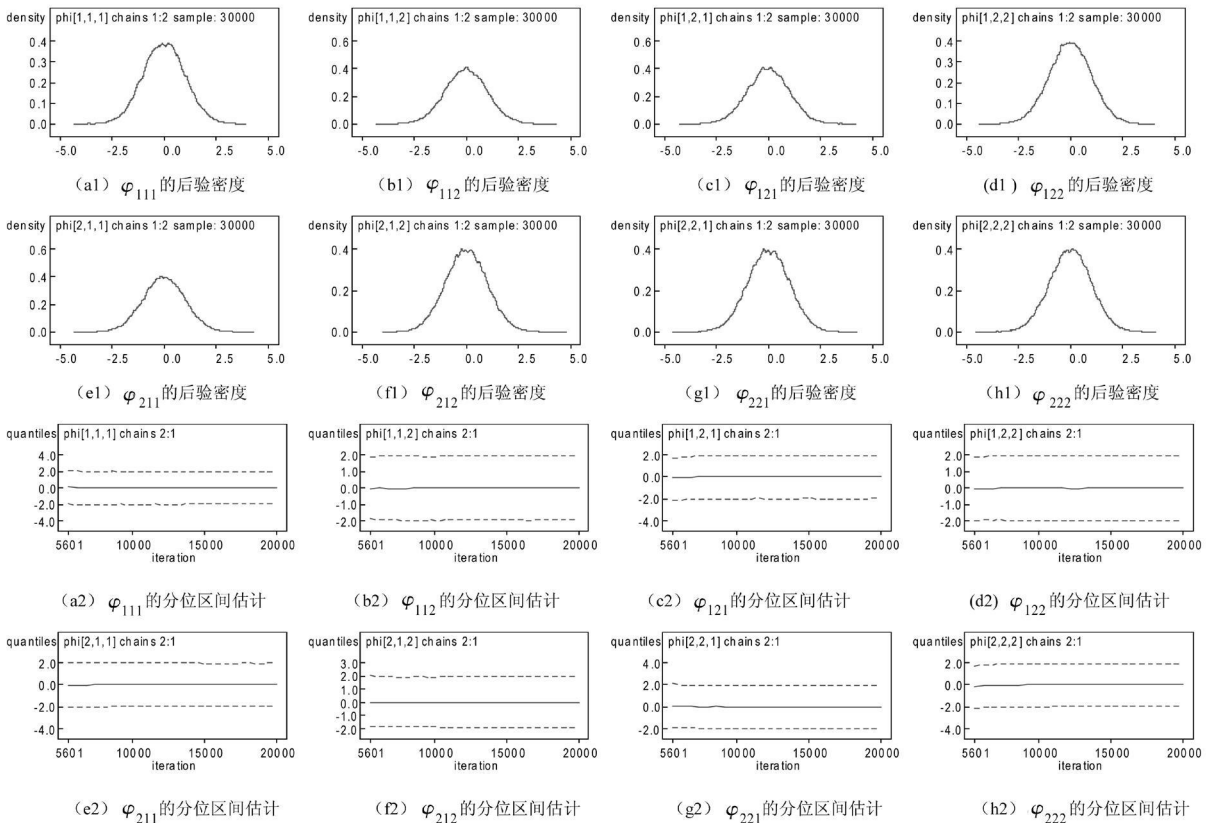


图 6 φ 的后验密度及其相应的分位区间估计图

Fig 6 Estimated posterior density and quantile plots of φ

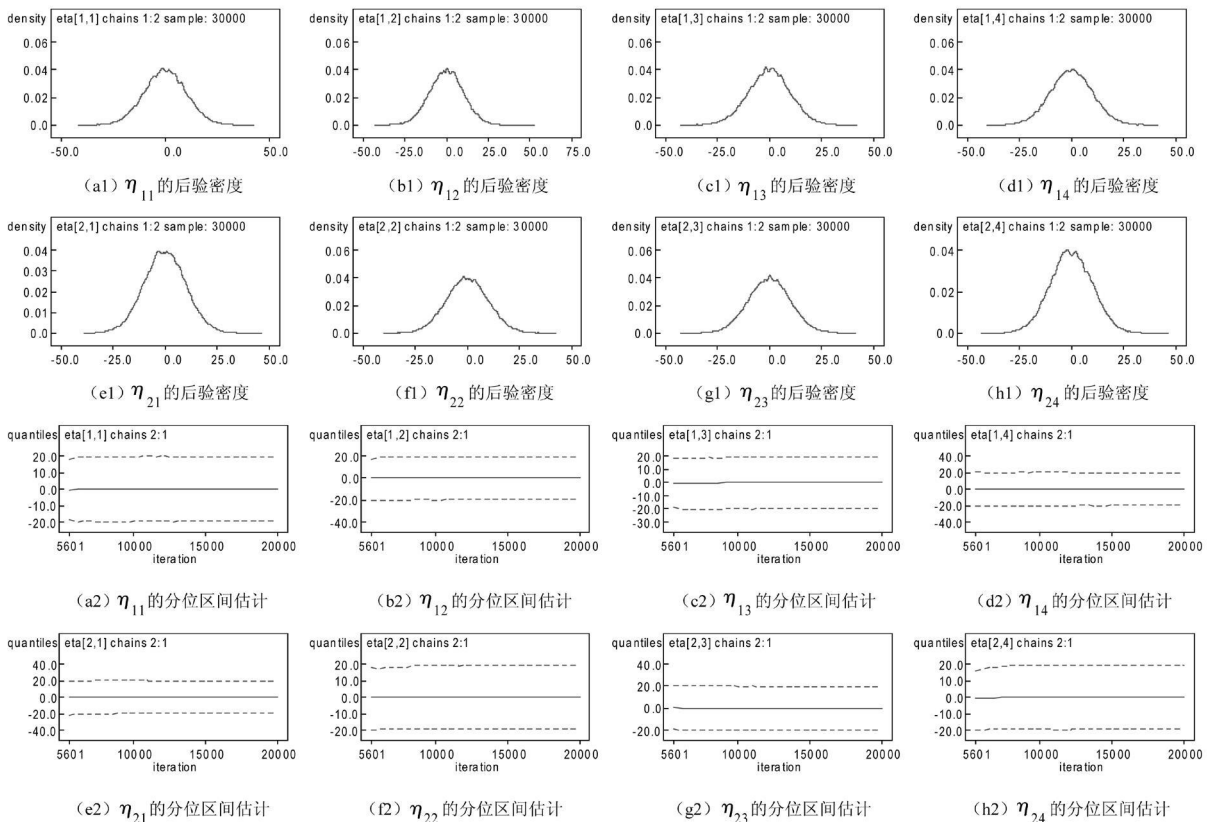


图 7 η 的后验密度及其相应的分位区间估计图

Fig 7 Estimated posterior density and quantile plots of η

根据以上结果, MCMC 数值算法可以模拟得出参数的贝叶斯估计值以及相应的分位区间估计值. 表 3 给出了中国城市居民消费价格指数和农村居民消费价格指数的协整模型参数的均值、标准差、MC 误差、2.5% 和 97.5% 等主要分位数的贝叶斯估计值.

对表 3 的结果进行分析, 不难得出如下结论. 首先, MC 误差远远小于标准差, 再次验证了 Gibbs 抽样方法的收敛性. 其次, CVAR(2) 模型的参数 $\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}$ 的贝叶斯估计值依次为 0.055 1, 0.007 8, -0.091 3 和 0.009 5 相应 95% 水平的后验置信区间为 (-19.380 2, 19.600 2), (-19.520 3, 19.520 1), (-19.989 9, 19.350 8) 和 (-19.619 8, 19.720 4). 结合各主要分位数值可看出, 参数 $\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}$ 的分位数符号相同, 变化趋势基本一致, 表明城市居民消费价格指数受季节影响的趋势比较稳定, 从平均作用来看城市居民消费价格指数受第一、二、四季度同向的正影响, 受第三季度弱的负影响, 但从长期发展过程

来看应该受四个季度同向的正影响, 其中, 第二、四季度对城市居民消费价格指数影响比较小, 第一、三季度的影响强度要明显高于其它两个季节; 同时, $\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}$ 的贝叶斯估计值依次为 -0.084 3, -0.012, -0.076 1 和 -0.058 2 相应后验置信区间为 (-19.720 1, 19.740 5), (-19.380 4, 19.500 8), (-19.559 9, 19.481 4) 和 (-19.540 3, 19.390 2). 结合各主要分位数值可看出, 除了 50% 水平分位数外, $\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}$ 的其它分位数符号相同, 变化趋势一致, 说明农村居民消费价格指数除了 2003 年初受四个季度不同向的影响外, 受季节影响的趋势也比较稳定, 从平均作用和长期过程来看, 农村居民消费价格指数均受第一、二、三、四季度弱的同向负影响, 其中, 第一、三、四季度的影响强度呈逐次递减趋势, 但都明显高于第二季度. 最后, 根据表 3 中参数 φ 的估计值, 求解联立方程组 (19) 可得到参数 α, ζ_{ij} 以及 $\alpha_i \beta_j$ 的值, 通过矩阵 Π 的奇异值分解结合近似运算有

$$\Pi = U \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H, U, V \text{ 均为 } 2 \text{ 阶酉矩阵}$$

从以上奇异值分解对角矩阵可以看出, 矩阵 Π 的特征值为 0.02 和 0 其中只有 0.02 为非零特征值, 说明协整秩为 $r=1$, 即城市居民消费价格指数和农村居民消费价格指数之间存在一个非线性协整关系, 并且由表 3 可知, 贝叶斯非线性协整检验的精度矩阵为

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 69.050 & 14.530 \\ 14.530 & 41.580 \end{pmatrix}$$

表 3 居民消费价格指数 ACE 变换后序列贝叶斯非线性 CVAR 模型参数估计

Table 3 Parameter estimation of ACE transformed CPI series in Bayesian nonlinear CVAR model

参数	均值	标准差	MC 误差	2.5% 分位数	25% 分位数	中位数	75% 分位数	97.5% 分位数
φ_{111}	0.0049	1.0011	0.0056	-1.9359	-0.6791	0.0013	0.6791	1.9829
φ_{112}	-0.0083	1.0011	0.0054	-1.9698	-0.6849	-0.0073	0.6712	1.9714
φ_{121}	-0.0053	0.9970	0.0058	-1.9709	-0.6712	-0.0024	0.6650	1.9253
φ_{122}	-0.0117	1.0052	0.0057	-1.9961	-0.6840	-0.0080	0.6701	1.9472
φ_{211}	-0.0029	0.9970	0.0056	-1.9430	-0.6752	-0.0057	0.6744	1.9512
φ_{212}	0.0053	0.9981	0.0059	-1.9411	-0.6689	0.0033	0.6792	1.9611
φ_{221}	0.0027	0.9981	0.0057	-1.9559	-0.6739	0.0058	0.6791	1.9409
φ_{222}	0.0003	0.9932	0.0059	-1.9481	-0.6681	0.0068	0.6719	1.9352
η_{11}	0.0551	9.9730	0.0594	-19.3802	-6.6440	0.0279	6.7951	19.6002
η_{12}	0.0078	9.9901	0.0571	-19.5203	-6.7742	0.0957	6.6972	19.5201
η_{13}	-0.0913	9.9911	0.0542	-19.9899	-6.7442	0.0109	6.5562	19.3508
η_{14}	0.0095	10.0102	0.0597	-19.6198	-6.7139	0.0146	6.7581	19.7204
η_{21}	-0.0843	10.0201	0.0586	-19.7201	-6.7988	-0.1180	6.6612	19.7405
η_{22}	-0.0120	9.9489	0.0572	-19.3804	-6.7281	-0.0579	6.6663	19.5008
η_{23}	-0.0761	9.9891	0.0582	-19.5599	-6.8372	0.0014	6.6793	19.4814
η_{24}	-0.0582	9.9732	0.0541	-19.5403	-6.7521	-0.1620	6.7612	19.3902
τ_{11}	69.050	7.401000	42.520	0.1991	0.7560	2.1680	9.5731	970.5214
τ_{12}	14.530	4.842000	27.940	-159.7001	-1.2421	0.0016	1.3081	181.1002
τ_{21}	14.530	4.842000	27.940	-159.7001	-1.2421	0.0016	1.3081	181.1002
τ_{22}	41.580	3.655000	20.940	0.1934	0.7428	2.1451	9.6820	974.2018

表 4 Johansen 协整检验协整关系个数确定

Table 4 The number of cointegration relationships by Johansen's cointegration analysis

协整关系个数 (原假设 H_0)	协整关系个数 (备择假设 H_1)	迹检验	5% 水平临界值	最大特征值检验	5% 水平临界值
$r=0$	$r=1$	10.6989*	15.4947	8.3482*	14.2646
≤ 1	$r=2$	2.3507*	3.8415	2.3507*	3.8415

注: 表中 * 表示在 5% 水平下接受原假设.

而对变换后序列 y_t, x_t 进行 Johansen 协整检验的结果如表 4 所示, 从表中可以看到, 迹检验统计量和最大特征值检验统计量的值都小于相应 5% 临界值, 均在接受域内, 从而表明, $r=1$ 的原假设首先被接受, 序列 y_t, x_t 之间至多存在一个协整关系. 并且, 对系统中的协整关系施加限制, 即可得到可识别的协整关系和相应的调整系数, 协整方程 $y_t = 3.0158x_t$ 调整系数分别为 -0.2227 和 -0.0107 相应标准差为 0.6564 精度为 1.5235

由此可知, 贝叶斯非线性协整检验方法与 Johansen 协整检验法得到的结果基本一致, 均认为中国城市和农村居民消费价格指数序列之间至多存在一个非线性协整关系, 表明中国农村和城市居民消费价格指数之间存在长期非线性均衡关系, 城市居民消费价格指数的变动与农村居民消费价格指数之间有相互影响. 因此, 利用服从 $I(1)$ 单整过程的城市和农村居民消费价格指数进行建模分析时, 需要考虑二者的长期非线性均衡作用. 另一方面, 贝叶斯非线性协整检验方法的参数估计精度却远远高于经典检验方法, 可见, 贝叶斯方法有利于提高模型估计的精度.

5 结束语

本文应用非参数 ACE 变换算法结合多变量协整向量自回归 (CVAR) 模型, 建立非线性 CVAR 模型并分析其统计结构及条件似然函数, 对模型参数进行贝叶斯推断, 从而提出了基于 ACE 变换模型的贝叶斯非线性协整检验方法. 接着通过 Monte Carlo 仿真比较了贝叶斯非线性协整方法与 Johansen 协整方法的检验势, 发现贝叶斯协整具有

更高更稳健的检验势. 同时对中国城市和农村居民消费价格指数序列进行实证研究, 在非线性 CVAR(2) 模型基础上结合 Gibbs 抽样对序列进行贝叶斯非线性协整分析, 结果发现中国城市和农村居民消费价格指数至多存在一个非线性协整关系, 表明中国农村和城市居民消费价格指数之间可能存在长期稳定的非线性均衡关系, 它们之间没有内生的变化趋势; 并且, 贝叶斯非线性协整检验的精度比 Johansen 检验的精度要高, 再次验证了贝叶斯协整方法的可行性和小样本容量下的有效性, 因此, 在对经济时间序列进行分析时, 它能够克服经济时间序列由于样本小而估计有偏的问题, 在刻画非平稳关系的同时也考虑了序列的非线性特征, 可以较准确地分析序列间的非线性均衡关系. 这些特点都使得贝叶斯非线性协整检验在经济时间序列分析中应用广泛, 如外汇汇率, 居民消费与经济增长的非线性均衡分析以及预测分析等都可以运用贝叶斯非线性协整检验进行相关研究. 在有限样本下同时考虑非平稳和非线性关系的存在性避免了把它们分开考虑或者不考虑的偏差, 能够进行更全面准确的均衡关系判断和预测分析, 为决策及政策措施制定提供更好的指导.

参考文献:

- [1] Engle R F, Granger C W J. Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing [J]. *Econometrica*, 1987, 55(2): 251-276
- [2] Johansen S. Statistical analysis of cointegration vectors [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1988, 12(2-3): 231-254
- [3] Johansen S. Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models [J]. *Econometrica*, 1991, 59(6): 1551-1580
- [4] Granger C W J, Halman J J. Long memory series with attractors [J]. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 1991, 53(1): 11-26
- [5] 孙青华, 张喜彬, 张世英. 非线性协整关系的存在性研究 [J]. *管理科学学报*, 2000, 3(3): 65-74
Sun Qing-hua, Zhang Xi-bin, Zhang Shi-ying. Research on the existence of nonlinearly cointegrated relationships [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2000, 3(3): 65-74 (in Chinese)
- [6] 樊智, 张世英. 非线性协整建模研究及沪深股市实证分析 [J]. *管理科学学报*, 2005, 8(1): 73-77
Fan Zhi, Zhang Shi-ying. Study on modeling of nonlinear cointegration and empirical analysis of China's stock markets [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(1): 73-77 (in Chinese)
- [7] Esteve V, Prats M A. Threshold cointegration and nonlinear adjustment between stock prices and dividends [J]. *Applied Economics Letters*, 2010, 17(4): 405-410
- [8] Escribano A, Sîpols E, Aparicio F. Nonlinear cointegration and nonlinear error correction: Record counting cointegration tests [J]. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 2006, 35(4): 939-56
- [9] Strachan R W. Valid Bayesian estimation of the cointegrating error correction model [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1994, 12(1): 1-10

- Statistics 2003 21(1): 185—195
- [10] Koop G. Cointegration tests in present value relationships: A Bayesian look at the bivariate properties of stock prices and dividends J. Journal of Econometrics 1991 49(1—2): 105—139
- [11] Geweke J. Bayesian reduced rank regression in econometrics J. Journal of Econometrics 1996 75(1): 121—146
- [12] Kleibergen F, Van D H K. On the shape of the likelihood posterior in cointegration models J. Econometric Theory 1994 10(3—4): 514—551
- [13] Bauwens L, Lubrano M. Identification Restrictions and Posterior Densities in Cointegrated Gaussian VAR Systems C // T B Fomby eds, Advances in Econometrics: Bayesian Methods Applied to Time Series Data. Greenwich: JAI Press, 1996: 3—28
- [14] 张世英, 朱辉, 张喜彬. 协整系统的贝叶斯推断[J]. 系统工程学报, 1997, 12(3): 23—30
Zhang Shiying, Zhu Hui, Zhang Xibin. Bayesian inference for cointegrated systems J. Journal of Systems Engineering 1997, 12(3): 23—30 (in Chinese)
- [15] Martin G M, Martin V L. Bayesian inference in the triangular cointegration model using a Jeffreys prior J. Communications in Statistics: Theory and Methods 2000 29(8): 1759—1785
- [16] Martin G M. Bayesian analysis of fractional cointegration model J. Econometric Reviews 2001 20(2): 217—234
- [17] Kleibergen F, Paap R. Priors, posteriors and Bayes factors for a Bayesian analysis of cointegration J. Journal of Econometrics 2002 111(2): 223—249
- [18] Strachan R W, Inder B. Bayesian analysis of the error correction model J. Journal of Econometrics 2004 123(2): 307—325
- [19] Vilianim. Bayesian reference analysis of cointegration J. Econometric Theory 2005 21(2): 326—357
- [20] Vilianim. Bayesian point estimation of the cointegration space J. Journal of Econometrics 2006 134(2): 645—664
- [21] Sugita K. Bayesian analysis of a Markov switching temporal cointegration model J. Japan and the World Economy 2008 20(2): 257—274
- [22] Ntzoufras I. Bayesian Modeling Using WinBUGS Mj. Hoboken, NJ: Wiley, 2009
- [23] Amisano G. Bayesian inference in cointegrated systems J. Research in Economics 2003 57(4): 287—314

Test for Bayesian nonlinear cointegration in nonparametric ACE transformed model

ZHU Huiming, LI Sufang, ZENG Huifang, YU Keming

1. College of Business Administration, Hunan University, Changsha 410082, China;
2. Department of Mathematics, Brunel University, London UB8 3PH, UK

Abstract Two methods of identifying cointegrating relationship between variables are commonly used: linear cointegration analysis and nonlinear cointegration procedure. Because the test power of all these methods is poor in small sample, this paper proposes a Bayesian method for conducting inference about nonlinear cointegrating vector autoregressive model based on ACE transformation. The idea of ACE algorithm is adopted for the nonlinear transformation of the variables, with Gibbs sampling being used to carry out Bayesian nonlinear cointegration identification. Numerical results are produced via a combination of Monte Carlo simulation, from which we find that Bayesian nonlinear cointegration test is noticeably more powerful and robust than Johansen's cointegration analysis. Finally, through the empirical application in Chinese urban and rural consumption price indices, the usefulness of this Bayesian method is demonstrated. As a result, it shows that Bayesian nonlinear cointegration solves poor power problem in small sample and improves the precision of cointegration test.

Key Words cointegration; nonlinearity; nonparametric; Bayesian analysis; Monte Carlo simulation