

# 多元化企业经营系统脆性控制模型及最优策略<sup>①</sup>

王德鲁, 宋学锋

(中国矿业大学管理学院, 徐州 221116)

**摘要:** 脆性的激发是导致企业全局性失败或经营困境的关键所在, 脆性风险控制则是提高经营系统安全性的重要保障. 在企业经营系统脆性风险扩散路径分析的基础上, 建立了具有状态依赖的基本风险控制模型和考虑业务增长率与衰减率的改进控制模型, 并评估和比较了免疫策略、隔离策略和综合控制3种方案的效果. 同时, 还进一步讨论了改进控制模型周期解的存在性以及周期控制方案下的最优策略问题. 结果表明, 不同的控制策略对脆性风险控制而言都能够得到相同的结果, 但在相同的目标下, 综合控制策略的总成本最小, 而免疫策略和隔离策略总成本的大小则依赖于初始条件和临界参数; 当任何一次控制方案都不能达到目标时, 最佳选择就是采取周期性的综合控制策略.

**关键词:** 多元化战略; 脆性风险; 控制模型; 最优策略

**中图分类号:** F224    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1007-9807(2011)09-0001-12

## 0 引言

由于我国证券市场资源配置功能缺失, 上市公司往往具有强烈的股权融资偏好, 只要符合相关条件, 一般都会进行再融资<sup>[1-2]</sup>; 同时我国正处于经济转型时期, 公司面临许多发展机遇和投资机会, 这种双重激励使得多元化战略一度成为许多企业成长战略的首选. 但与企业高度的多元化热情形成对比的是, 多元化投资往往不仅不能够分散经营风险、创造新的利润增长点, 反而会导致原主营业务绩效降低, 甚至整个业务体系的坍塌<sup>[3]</sup>. 在多元化现象十分普遍而其经济绩效却不甚理想的现实背景下, 长期以来关于多元化的研究, 理论界主要致力于多元化利与弊的讨论, 希望以此为依据有效判断多元化存在的合理性. 实际上, 多元化战略对绩效的影响也一直是国内外战略管理领域的研究重点<sup>[4-7]</sup>. 然而, 作为企业动态成长的战略选择之一, 对多元化项目的投资在企业界从未间断过. 因此, 突破多元化优劣对错的讨

论视角, 着力研究多元化经营中的风险控制问题是关乎企业成长的重要课题<sup>[8]</sup>. 基于此, 学者们从风险管理角度对多元化经营风险的识别<sup>[9]</sup>、预警<sup>[10]</sup>和防范<sup>[11]</sup>等进行了研究. 但是, 现有成果主要是围绕企业财务风险展开和深入的, 鲜有文献运用复杂系统脆性属性对其进行描述.

复杂系统由于内外部干扰因素的作用, 其一部分(子系统)崩溃导致其它部分或整个系统受到直接或间接的影响, 从而引发了崩溃, 这个属性称之为脆性<sup>[12]</sup>. 能够引发其它部分崩溃的部分称为脆性源, 受到其它部分的崩溃的影响而崩溃的部分称为脆性接受者. 脆性是复杂系统本身所固有的属性, 其重要特点就是伴随性和连锁性. 即当复杂系统中的一个子系统崩溃后, 其它与这个崩溃子系统有脆性联系的子系统会因伴随的脆性而相继崩溃<sup>[13]</sup>. 企业作为一个复杂系统, 除了具有开放性、巨量性、进化与涌现性, 同样还具有脆性特征<sup>[14]</sup>. 就多元化企业经营系统而言, 各项业务之间存在着千丝万缕的联系, 例如共享同一消费

① 收稿日期: 2009-08-10; 修订日期: 2010-06-24.

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NECT-04-0485); 教育部人文社会科学研究资助项目(09YJC630217).

作者简介: 王德鲁(1978—), 男, 山东邹城人, 博士, 副教授. Email: wdlzf7881@126.com

市场,共用同一品牌,甚至在资金链上相互支持,从而在一定程度上形成“一荣俱荣,一损俱损”的格局,极小的内外部干扰都有可能致整个业务体系的连锁崩溃.由此可见,按照复杂系统脆性理论的观点,系统脆性的激发是导致企业失败的重要原因,而脆性风险控制则是提高经营系统安全性的重要保障.目前,脆性作为复杂系统可靠性研究的新颖的理论方法,已经引起了各领域的关注,并在供应链<sup>[15]</sup>、交通系统<sup>[16]</sup>、灾害系统<sup>[17]</sup>、电力系统<sup>[18]</sup>等系统可靠性研究领域得到应用.

综上所述,本文将基于多元化企业经营系统脆性扩散动力学分析,借鉴文献[19]研究思路,建立企业脆性风险综合控制模型,并探讨相应的最优控制策略,以期为企业战略风险管理提供一个全新的视角.

## 1 多元化企业经营系统脆性扩散路径分析与研究假设

### 1.1 多元化企业经营系统脆性扩散路径分析

按照 Dombrowsky<sup>[20]</sup>的理解,灾难事件本身的危害往往有限,但灾难事件一旦扩散将会引发连锁响应从而造成严重危害.依据这一思路,对近年来发生的多家多元化企业经营失败的原因进行分析,得到简化的企业经营系统脆性风险扩散路径(图1).

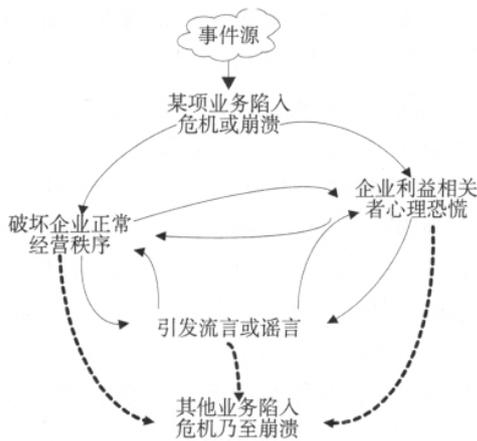


图1 多元化企业经营系统脆性风险扩散路径图

Fig. 1 The path of brittle risk spread in firm's business system

图1描述的扩散过程是抽象化的企业经营系统脆性风险扩散路径.由于某重大事件源的发生,导致企业某项业务陷入危机甚至崩溃,如果管理者处理不当,流言或谣言、企业利益相关者心理恐

慌和破坏企业正常经营秩序3种事件之间会相互作用和相互影响,形成放大式扩散效应.如果对“破坏企业正常经营秩序”进行细分,还可以分为资金链断裂、员工流失、生产停顿、组织失灵等.这些次生事件之间,次生事件与流言或谣言、利益相关者心理恐慌之间也会产生相互扩散和放大的反应,从而导致其他业务陷入危机或崩溃,在缺乏有效的脆性控制措施的情形下,企业最终将可能整体陷入困境.

### 1.2 研究假设

假设脆性风险在某一多元化企业中传播,可以将其业务划分为脆性源型、易感型和排除型3种类型.

脆性源型业务是指对环境有强烈的灵敏性,在受到内、外因素的扰动或冲击而陷入危机时,同时也会使其它业务受到严重影响的业务,它们是导致经营系统不稳定的关键所在.例如,巨人集团旗下的房地产业务属于资金密集型行业,随着巨人大厦投资预算从2亿元不断调整为12亿元,对集团资金链以及集团内部产权链上的相关企业产生较大压力,在重大自然事件的冲击下,其资金缺口陡然攀升,再加上中国加强宏观调控,最终演变成集团经营系统的脆性源.

易感型业务是指虽然暂时处于稳定状态,但与脆性源型业务具有直接或间接脆性联系的业务,它们是经营系统脆性的接受者,很容易受到脆性源型业务的感染而演变为系统脆性源,并加大经营系统的整体风险水平.例如,巨人集团在巨人大厦资金告急之时,将生物工程方面的大部分资金调往大厦,造成生物工程因“抽血”过量,销售急剧下滑,演变为经营系统的脆性源,使集团财务状况进一步恶化.因此,依托轰炸式广告宣传制胜而对资金同样有较高需求的生物工程属于易感型业务.

排除型业务是指因企业采取有效措施而具有较高的抗干扰能力,进而从脆性源型业务中移除的业务.如果不是巨人集团CEO史玉柱一向以零负债为荣,以不求银行自傲,完全可以凭借公司高额营业额和流动额陆续申请流动资金贷款,并逐渐转化为在建项目的分段抵押贷款,有效增强抵御自然灾害的能力,保证巨人大厦如期竣工,从而将房地产业务从脆性源型业务中移除,转变为排除型业务.

为了得到这 3 类业务规模发展变化的规律并建立相应的风险扩散控制模型,做出如下研究假设.

假设 1 脆性源型、易感型和排除型业务的规模分别记为  $H(t)$ 、 $S(t)$  和  $R(t)$ ;排除型业务既非脆性源型也非易感型,既不存在风险也不会再次受到该类风险影响,即它们因具有了免疫力而退出该扩散系统.

假设 2 风险在脆性源型与易感型业务所组成的复杂网络内具有较强的扩散能力,而且脆性源型业务规模越大,风险扩散能力也就越强.假设单位时间内,受单位脆性源型业务影响的易感型业务与其总体规模  $S(t)$  成正比,比例系数为  $\beta$ ,从而单位时间内受整个脆性源型业务影响的业务规模为  $\beta S(t) H(t)$ .

假设 3 单位时间内从脆性源型业务中排除的业务规模与其总体规模  $H(t)$  成正比,比例系数为  $\gamma$ ,则在  $t$  时刻排除业务的规模为  $\gamma H(t)$ .

假设 4 只有具有脆性风险的脆性源型业务的规模达到一定程度时,才引起企业重视并采取可行的控制策略实施脉冲控制,将其规模或所占比例降低到安全范围之内,即企业脆性风险控制具有状态依赖性.

## 2 基本脆性风险控制模型

### 2.1 模型构建

根据多元化企业脆性风险扩散简化路径分析,结合研究假设 1 - 4,可以得到基本的脆性风险控制模型

$$\left. \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) H(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \beta S(t) H(t) - \gamma H(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma H(t) \end{cases} \right\} H \neq RL \quad (1)$$

$$\left. \begin{cases} \Delta S(t) = -pS(t) \\ \Delta H(t) = -qH(t) \\ \Delta R(t) = pS(t) + qH(t) \end{cases} \right\} H = RL$$

$$S(0^+) = S_0 \quad H(0^+) = H_0 \quad R(0^+) = R_0$$

$$H_0 < RL$$

其中  $p, q(0 \leq p, q < 1)$  分别表示免疫和隔离;  $RL$  为控制阈值.由该模型可知  $\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dH(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} =$

0 这说明  $S(t) + H(t) + R(t) = N$  (常数).

企业经营系统脆性风险的控制方案主要包括对脆性源型业务进行隔离,对易感型业务实施免疫,或综合运用以上两种策略.下面分析 1 次免疫、隔离或者综合控制如何使脆性源型业务的规模不超过  $RL$ .由于排除型业务  $R(t)$  不影响模型 (1) 中的易感型和脆性源型业务,所以仅需考虑下面的系统

$$\left. \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) H(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \beta S(t) H(t) - \gamma H(t) \end{cases} \right\} H \neq RL \quad (2)$$

$$\left. \begin{cases} \Delta S(t) = -pS(t) \\ \Delta H(t) = -qH(t) \end{cases} \right\} H = RL$$

$$S(0^+) = S_0 \quad H(0^+) = H_0$$

$$H_0 < RL$$

由于企业 3 类业务规模总和为常数,不妨假设为 1,由此对前两个方程积分可得

$$\varphi(S, H) = S + H - \rho \ln H = \phi_0$$

其中  $\rho = \gamma/\beta$  为相对排除率;  $\phi_0 = S_0 + H_0 - \rho \ln S_0$ .因在  $S = \rho$  处  $dH/dt = 0$ ,故  $H(t)$  在该点处获得最大值

$$H_{max} = H_0 + S_0 - \rho + \rho \ln(\rho/S_0)$$

由该表达式可知,最大值  $H_{max}$  依赖于初始规模,如图 2 所示,其中参数  $\beta = 180, \gamma = 13, p = 0.5, q = 0.05$ .

### 2.2 控制策略的评估与比较

定义集合

$$D_h = \{ (S, H) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \varphi(S, H) < h, S + H \leq 1 \},$$

$$\Omega = \{ (S, H) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S + H \leq 1, H < H_R \}$$

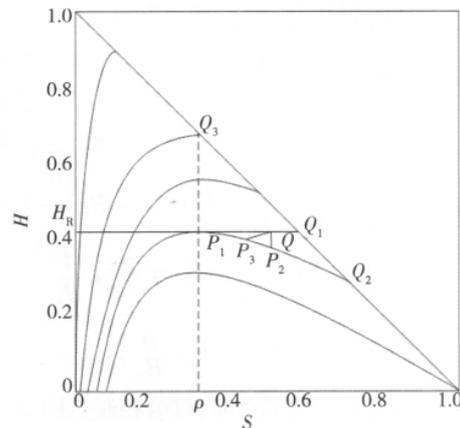


图 2 基本控制模型(2)的相平面轨线图

Fig. 2 The phase plane trajectory of basic control model (2)

和曲面

$$\Gamma_h = \{(S, H) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \varphi(S, H) = h, S + H \leq 1\}$$

其中  $h$  为正常数; 直线  $S = \rho$  和斜线  $S + H = 1$  相交于点  $Q_3 = (\rho, 1 - \rho)$ .

经分析可知, 一旦解轨线与直线  $H = H_R$  相交, 必须采用控制策略使脆性源型业务所占比例不超过  $H_R$ . 假设单位易感型业务的免疫成本为  $c_1$ , 单位脆性源型业务的隔离成本为  $c_2$ , 并且  $c_2 > c_1$ . 设  $(S_0, H_0) \in \Omega_1$ , 考虑以下 3 种可能的控制方案.

1) 仅利用免疫策略(免疫控制), 即  $q = 0$ .

1 次免疫策略使得易感型业务被免疫的最小规模为  $S_1 - \rho$ , 则总成本为

$$f_1 = c_1(S_1 - \rho)$$

此时, 免疫比率  $p = 1 - \frac{\rho}{S_1}$ . 从几何的观点来看, 是由于易感型业务的规模突然减少而使点  $Q$  跳到点  $P_1$ .

2) 仅利用隔离策略(隔离控制), 即  $p = 0$ .

1 次隔离策略使得脆性源型业务被隔离的最小规模为  $H_R - (\bar{h} - S_1 + \rho \ln S_1)$ , 则总成本为

$$\begin{aligned} f_2 &= c_2(H_R - \bar{h} + S_1 - \rho \ln S_1) \\ &= c_2 \rho \left( \frac{S_1}{\rho} - 1 - \ln \frac{S_1}{\rho} \right) \end{aligned}$$

容易验证  $f_2 > 0$ , 且隔离比率

$$q = \frac{\rho}{H_R} \left( \frac{S_1}{\rho} - 1 - \ln \frac{S_1}{\rho} \right)$$

由  $\Gamma_h$  和 Lambert W 函数定义可知  $0 < q < 1$ , 并且

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\rho}{H_R} \left[ \ln \left( \frac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho}(\phi_0 - H_R)} \right) + 1 \right] \\ &= -\frac{\rho}{H_R} \ln \frac{1}{\rho} + \frac{\phi_0}{H_R} - 1 - \frac{\rho}{H_R} \end{aligned}$$

由于  $\phi_0 < 1 - \rho \ln(1 - H_R)$ ,  $\rho e^{-1 + \frac{1}{\rho}(1 - H_R)} \leq 1$ , 所以

$$\begin{aligned} q &\leq -\frac{\rho}{H_R} \ln \frac{1}{\rho} + \frac{1}{H_R} - \frac{\rho}{H_R} \ln(1 - H_R) - 1 - \frac{\rho}{H_R} \\ &\leq -\frac{\rho}{H_R} \left[ -1 + \frac{1}{\rho}(1 - H_R) \right] + \frac{1}{H_R} - \\ &\quad \frac{\rho}{H_R} \ln(1 - H_R) - 1 - \frac{\rho}{H_R} < 1 \end{aligned}$$

3) 综合免疫与隔离策略(综合控制), 即  $p, q \neq 0$ .

假设存在点  $P_3 = (S, H) \in \Gamma_h$  使经过 1 次综合控制后从点  $Q$  跳到点  $P_3$ , 则点  $P_3$  的坐标满足方程

$$\begin{cases} S + H - \rho \ln S = \bar{h} \\ S - S_1 = -pS_1 \\ H - H_R = -qH_R \end{cases} \quad (3)$$

假设满足方程(3)的点  $(p, q) = (p^*, q^*)$  使总成本  $F = c_1 p^* S_1 + c_2 q^* H_R$  最小, 由方程(3)可得

$$\begin{aligned} q^* &= 1 - \frac{1}{H_R} [\bar{h} + \rho \ln((1 - p^*) S_1) - \\ &\quad (1 - p^*) S_1] \end{aligned} \quad (4)$$

如果  $c_2 > c_1 \frac{c_2 \rho}{S_1(c_2 - c_1)} < 1$ , 则存在唯一的  $p^* =$

$1 - \frac{c_2 \rho}{S_1(c_2 - c_1)}$  使得  $F(p^*)$  取得最小值, 且

$$F^* \triangleq F(p^*) = c_1 S_1 + c_2 \rho \ln \left( \frac{c_2 - c_1}{c_2} \right) \quad (5)$$

根据式(4)可得

$$\begin{aligned} q^* &= 1 - \frac{1}{H_R} \left[ H_R + \rho(1 - \ln \rho) + \right. \\ &\quad \left. \rho \ln \left( \frac{c_2 \rho}{c_2 - c_1} \right) - \frac{c_2 \rho}{c_2 - c_1} \right] \\ &= \frac{\rho}{H_R} \left[ \frac{c_2}{c_2 - c_1} - 1 - \ln \left( \frac{c_2}{c_2 - c_1} \right) \right] < 1 \quad (6) \end{aligned}$$

注意到  $q^* \geq 0$  且当且仅当  $c_1 = 0$  时  $q^* = 0$ , 因此有

$p^* = 1 - \frac{\rho}{S_1}$ . 如果  $\frac{\rho}{H_R} \left[ \frac{c_2}{c_2 - c_1} - 1 - \ln \left( \frac{c_2}{c_2 - c_1} \right) \right] < 1$ , 则  $q^* < 1$ .

综上所述分析, 可以得到如下命题.

**命题 1** 如果  $c_2 > c_1 \rho e^{-1 + \frac{1}{\rho}(1 - H_R)} < 1$ ,

$\frac{c_2 \rho}{S_1(c_2 - c_1)} < 1$  和  $\frac{\rho}{H_R} \left[ \frac{c_2}{c_2 - c_1} - 1 - \ln \left( \frac{c_2}{c_2 - c_1} \right) \right] < 1$ ,

那么对于任意  $(S_0, H_0) \in \Omega_1$  和综合控制方案存在解对

$$\begin{aligned} (p^*, q^*) &= \left( 1 - \frac{c_2 \rho}{S_1(c_2 - c_1)}, \frac{\rho}{H_R} \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{c_2}{c_2 - c_1} - 1 - \ln \left( \frac{c_2}{c_2 - c_1} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

使得综合控制的总成本达到最小.

下面比较 3 种不同的控制方案在相同控制目标下的总成本大小, 以探寻最优的脆性风险控制方案.

由式(5)可以得到

$$F^* = c_1(S_1 - \rho) + c_2 \rho \left[ \frac{c_1}{c_2} + \ln \left( \frac{c_2 - c_1}{c_2} \right) \right]$$

并且  $\frac{c_1}{c_2} + \ln\left(\frac{c_2 - c_1}{c_2}\right) < 0$  因此对于满足  $c_1 < c_2$  的任意  $c_1, c_2$  和  $S_1$  有  $F^* < f_1$ .

比较  $F^*$  和  $f_2$  有

$$F^* - f_2 = (c_1 - c_2) S_1 + c_2 \rho \left[ 1 + \ln\left(\frac{S_1(c_2 - c_1)}{\rho c_2}\right) \right] \\ = c_2 \rho \left[ \frac{c_1 - c_2}{c_2} \frac{S_1}{\rho} + 1 + \ln\left(\frac{c_1 - c_2}{c_2} \frac{S_1}{\rho}\right) \right] \quad (7)$$

根据  $\frac{\rho c_2}{S_1(c_2 - c_1)} < 1$  则对于满足  $c_1 < c_2$  的任意  $c_1, c_2$  和  $S_1$  有  $F^* < f_2$ .

比较  $f_1$  和  $f_2$  有

$$f_2 - f_1 = (S_1 - \rho)(c_2 - c_1) - c_2 \rho \ln \frac{S_1}{\rho} \\ = c_2 \rho \left[ \left(\frac{S_1}{\rho} - 1\right) \frac{c_2 - c_1}{c_2} - \ln \frac{S_1}{\rho} \right] \quad (8)$$

记  $\bar{c} = \frac{c_2 - c_1}{c_2} g\left(\frac{S_1}{\rho}\right) = \bar{c}\left(\frac{S_1}{\rho} - 1\right) - \ln \frac{S_1}{\rho}$  不难验证函数  $g\left(\frac{S_1}{\rho}\right)$  在  $\frac{S_1}{\rho} = \frac{1}{c}$  取得唯一的最大值, 并且

方程  $g\left(\frac{S_1}{\rho}\right) = 0$  存在两个根, 即

$$\frac{S_1}{\rho} = -\frac{1}{c} \text{Lambert W}(-k, -\bar{c} \exp(-\bar{c})), \quad k = 0, 1 \quad (9)$$

设

$$S_{\min} = -\frac{\rho}{c} \text{Lambert W}(0, -\bar{c} \exp(-\bar{c})), \quad S_{\max} = -\frac{\rho}{c} \text{Lambert W}(-1, -\bar{c} \exp(-\bar{c})) \quad (10)$$

并且  $S_{\min}, S_{\max}$  满足  $S_{\min} < \frac{\rho}{c} < S_{\max}$ .

由图 2 有  $\rho < S_1 < 1 - H_R$ , 因此根据  $f_1$  和  $f_2$  的关系有以下 5 种情形.

**情形 1** 如果  $S_{\min} \leq \rho < 1 - H_R \leq S_{\max}$ , 则对所有的  $S_1 \in (\rho, 1 - H_R)$  有  $f_2 > f_1$ ;

**情形 2** 如果  $\rho < S_{\min} < 1 - H_R \leq S_{\max}$ , 则对所有的  $S_1 \in (S_{\min}, 1 - H_R)$  有  $f_2 > f_1$ ; 对所有的  $S_1 \in (\rho, S_{\min})$  有  $f_2 < f_1$ ; 当  $S_1 = S_{\min}$  时有  $f_2 = f_1$ ;

**情形 3** 如果  $\rho < 1 - H_R \leq S_{\min}$ , 则对所有的  $S_1 \in (\rho, 1 - H_R)$  有  $f_2 < f_1$ ;

**情形 4** 如果  $\rho < S_{\min} < S_{\max} < 1 - H_R$ , 则对

所有的  $S_1 \in (S_{\min}, S_{\max})$  有  $f_2 > f_1$ ; 对所有的  $S_1 \in (\rho, S_{\min}) \cup (S_{\max}, 1 - H_R)$  有  $f_2 < f_1$ ; 当  $S_1 = S_{\min}$  (或  $S_{\max}$ ) 时有  $f_2 = f_1$ ;

**情形 5** 如果  $S_{\min} < \rho < S_{\max} < 1 - H_R$ , 则对所有的  $S_1 \in (\rho, S_{\max})$  有  $f_2 > f_1$ ; 对所有的  $S_1 \in (S_{\max}, 1 - H_R)$  有  $f_2 < f_1$ ; 当  $S_1 = S_{\max}$  时有  $f_2 = f_1$ .

综上所述, 可以得到命题 2.

**命题 2** 如果命题 1 的条件成立, 那么综合控制的总成本小于免疫控制或隔离控制的总成本, 即  $F^* < \min(f_1, f_2)$ ; 而免疫和隔离控制总成本的大小则依赖于初始值  $(S_0, H_0)$  和临界参数  $H_R$ .

命题 1 和命题 2 表明, 不同的控制策略对脆性风险控制而言能够得到完全相同的结果, 但在相同的目标下, 即通过 1 次控制使得脆性源型业务规模不超过给定的临界值, 不同的控制策略其总成本是不一样的, 这可以启发人们探寻最优的控制方案.

### 3 考虑业务增长与衰减的改进控制模型

#### 3.1 模型构建

在构建基本的企业经营系统脆性风险控制模型时, 本文假定 3 类业务的总规模为常数, 这在相对较短的时间区间内是适合的. 但长期而言, 企业依据自身核心能力发展具有一定的内禀增长率, 而且由于企业内部业务单元间的竞争等因素的影响, 各类业务规模按照一定的比率衰减. 同时由于脆性源型业务对干扰因子极为敏感, 其内禀增长率往往为负. 综合考虑, 假设 3 类业务中只有易感型业务具有成长能力且增长率为线性函数, 类似于模型 (1) - (2), 可以得到改进的脆性风险控制模型

$$\left. \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t) - \beta S(t) H(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \beta S(t) H(t) - \delta H(t) \end{cases} \right\} H \neq RL \\ \left. \begin{cases} \Delta S(t) = -p S(t) \\ \Delta H(t) = -q H(t) \end{cases} \right\} H = RL \\ S(0^+) = S_0, H(0^+) = H_0 \\ H_0 < RL \quad (11)$$

其中  $\mu = b - d_1$ ,  $\delta = d_2 + \gamma$ ,  $b$  表示业务增长率,  $d_1$

和  $d_2$  表示业务衰减率, 并且  $b > d_1$ . 由文献 [21] 可知, 当  $p = q = 0$  时, 模型 (11) 存在首次积分

$$J(S, H) = \beta H + \beta S - \mu \ln H - \delta \ln S + J_0$$

其中

$$J_0 = \mu \left( \ln \frac{\mu}{\beta} - 1 \right) + \delta \left( \ln \frac{\delta}{\beta} - 1 \right)$$

首次积分  $J$  对于研究模型 (11) 的最优控制策略具有重要作用. 下面分两种情况研究模型 (11), 即  $H_R > H_*$  和  $H_R \leq H_*$ .

如果  $H_R > H_*$ , 则存在一条闭轨道  $\Gamma_{\bar{\gamma}}$  与直线  $H = H_R$  相切, 其中

$$\bar{\gamma} = \mu \left[ \frac{\beta H_R}{\mu} - \ln \left( \frac{\beta H_R}{\mu} \right) - 1 \right] \quad (12)$$

显然有  $\bar{\gamma} > 0$ , 记

$$D_{\bar{\gamma}} = \{ (S, H) \in \mathfrak{R}_+^2 \mid J(S, H) \leq \bar{\gamma} \},$$

$$\Gamma_{\bar{\gamma}} = \partial D_{\bar{\gamma}} = \{ (S, H) \in \mathfrak{R}_+^2 \mid J(S, H) = \bar{\gamma} \},$$

$$\Omega = \{ (S, H) \in \mathfrak{R}_+^2 \mid 0 < S < \infty, H \leq H_R \}.$$

由模型 (11) 可知, 从  $(S_0, H_0) \in D_{\bar{\gamma}}$  出发的轨线将不会与直线  $H = H_R$  相交, 如图 3 所示.

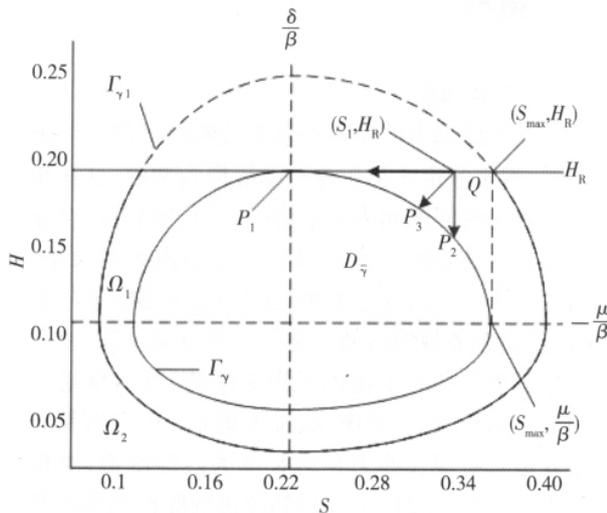


图 3 改进控制模型 (11) 的相平面轨线图

Fig. 3 The phase plane trajectory of modified control model (11)

### 3.2 控制策略的评估与比较

假设  $(S_0, H_0) \in \Omega_1$ , 并考虑以下 3 种可能的控制方案.

1) 免疫控制, 即  $q = 0$ .

1 次免疫策略使得易感型业务被免疫的最小规模为  $S_1 - \delta/\beta$ . 注意到任何从  $\Omega \setminus D_{\bar{\gamma}}$  和初始  $(S_0, H_0) \in \Omega_1$  出发的解与直线  $H = H_R$  相交, 则总成本为

$$f_1 = c_1(S_1 - \delta/\beta) \quad (13)$$

此时, 免疫比率  $p = 1 - \frac{1}{S_1} \frac{\delta}{\beta}$

2) 隔离控制, 即  $p = 0$ .

1 次隔离策略使得脆性源型业务被隔离的最小规模是  $H_R - H_1$ , 其中  $H_1$  满足方程

$$\beta(H_1 + S_1) - \mu \ln H_1 - \delta \ln S_1 = \delta \left[ 1 - \ln \frac{\delta}{\beta} \right] + \beta H_R - \mu \ln H_R$$

所以有

$$H_1 = -\frac{\mu}{\beta} \times$$

$$\text{Lambert W} \left( -1 - \frac{\beta}{\mu} H_R \exp \left( -\frac{\beta}{\mu} H_R + A \right) \right),$$

$$A = \frac{\delta}{\mu} \left( -1 + \frac{\beta}{\delta} S_1 + \ln \left( \frac{\delta}{\beta S_1} \right) \right)$$

则总成本为

$$f_2 = c_2(H_R - H_1) = c_2 \frac{\mu}{\beta} \left[ \frac{\beta}{\mu} H_R +$$

$$\text{Lambert W} \left( -1 - \frac{\beta}{\mu} H_R \exp \left( -\frac{\beta}{\mu} H_R + A \right) \right) \right]$$

此时, 相应的隔离比率为

$$q = 1 + \frac{\mu}{\beta H_R} \times$$

$$\text{Lambert W} \left( -1 - \frac{\beta}{\mu} H_R \exp \left( -\frac{\beta}{\mu} H_R + A \right) \right)$$

3) 综合控制, 即  $pq \neq 0$ .

假设存在点  $P_3 = (S, H) \in \Gamma_{\bar{\gamma}}$  使经过 1 次综合控制后由点  $Q$  跳到该点, 则点  $P_3$  的坐标满足

$$\begin{cases} \beta H + \beta S - \mu \ln H - \delta \ln S = \bar{h} \\ S - S_1 = -p S_1 \\ H - H_R = -q H_R \end{cases} \quad (14)$$

其中  $\bar{h} = -\delta \ln \frac{\delta}{\beta} - \mu \ln H_R + \delta + \beta H_R$ .

命题 3 对任意  $(S_0, H_0) \in \Omega_1$ , 如果  $\frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \geq$

$\frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}$ , 则存在一对  $(p^*, q^*)$  使得总成本达到最

小; 如果  $\frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} < \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}$  和  $g \left( \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta} \right) \leq 0$ , 则

存在解对  $(p^*, q^*)$  使总成本达到最小. 无论哪一种情况,  $\lambda^*$  是方程  $g(\lambda) = 0$  满足  $\lambda^* >$

$\max \left\{ \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}, \frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \right\}$  的唯一解, 其中

$$(p^* \ q^*) = \left( 1 + \frac{\lambda^* \delta}{S_1(c_1 - \lambda^* \beta)} \quad 1 + \frac{\lambda^* \mu}{H_R(c_2 - \lambda^* \beta)} \right)$$

证明 将式(14)中的第2和第3个方程代入第1个方程 得到点 $(p^* \ q^*)$  满足方程

$$\beta(1-p^*)S_1 + \beta(1-q^*)H_R - \mu \ln(H_R(1-q^*)) - \delta \ln(S_1(1-p^*)) = \bar{h}$$

定义 Lagrange 函数

$$L(p \ q \ \lambda) = c_1 p S_1 + c_2 q H_R + \lambda [\beta(1-p)S_1 + \beta(1-q)H_R - \mu \times \ln(H_R(1-q)) - \delta \ln(S_1(1-p)) - \bar{h}]$$

则

$$\frac{\partial L(p \ q \ \lambda)}{\partial p} = c_1 S_1 - \lambda \beta S_1 + \frac{\lambda \delta}{1-p}$$

$$\frac{\partial L(p \ q \ \lambda)}{\partial \lambda} = \beta(1-p)S_1 + \beta(1-q)H_R - \mu \ln(H_R(1-q)) - \delta \ln(S_1(1-p)) - \bar{h}$$

$$\frac{\partial L(p \ q \ \lambda)}{\partial q} = c_2 H_R - \lambda \beta H_R + \frac{\lambda \mu}{1-q}$$

如果 $(p^* \ q^*)$  是函数  $F$  在 Lagrange 乘子  $\lambda^*$  下的极小值点 则 Lagrange 乘子条件变为

$$\begin{cases} c_1 S_1 - \lambda^* \beta S_1 + \frac{\lambda^* \delta}{1-p^*} = 0 \\ c_2 H_R - \lambda^* \beta H_R + \frac{\lambda^* \mu}{1-q^*} = 0 \\ \beta(1-p^*)S_1 + \beta(1-q^*)H_R - \mu \ln(H_R(1-q^*)) - \delta \ln(S_1(1-p^*)) - \bar{h} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

因此有

$$p^* = 1 + \frac{\lambda^* \delta}{S_1(c_1 - \lambda^* \beta)}, \quad q^* = 1 + \frac{\lambda^* \mu}{H_R(c_2 - \lambda^* \beta)} \quad (16)$$

这里需要  $p^*$  和  $q^*$  满足  $0 < p^* < 1$  和  $0 < q^* < 1$ , 即 Lagrange 乘子  $\lambda^*$  满足不等式

$$\lambda^* > \max \left\{ \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}, \frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \right\} \quad (17)$$

这样得到  $\lambda^* > \max \left\{ \frac{c_1}{\beta}, \frac{c_2}{\beta} \right\}$ .

根据式(15)和式(16)有

$$\beta \frac{\lambda^* \delta}{c_1 - \lambda^* \beta} + \beta \frac{\lambda^* \mu}{c_2 - \lambda^* \beta} + \mu \ln \left( -\frac{\lambda^* \mu}{c_2 - \lambda^* \beta} \right) + \delta \ln \left( -\frac{\lambda^* \delta}{c_1 - \lambda^* \beta} \right) + \bar{h} = 0 \quad (18)$$

下面证明存在唯一的  $\lambda^*$  满足式(17)和(18). 定义函数  $g(\lambda)$  为

$$g(\lambda) = \beta \frac{\lambda \delta}{c_1 - \lambda \beta} + \beta \frac{\lambda \mu}{c_2 - \lambda \beta} + \mu \ln \left( -\frac{\lambda \mu}{c_2 - \lambda \beta} \right) + \delta \ln \left( -\frac{\lambda \delta}{c_1 - \lambda \beta} \right) + \bar{h}$$

如果  $\lambda > \max \left\{ \frac{c_1}{\beta}, \frac{c_2}{\beta} \right\}$  那么

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\delta c_1^2}{\lambda(c_1 - \lambda \beta)^2} + \frac{\mu c_2^2}{\lambda(c_2 - \lambda \beta)^2} > 0 \quad (19)$$

因此函数  $g(\lambda)$  关于  $\lambda$  是严格递增的. 进一步有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = -\delta - \mu + \mu \ln \frac{\mu}{\beta} + \delta \ln \frac{\delta}{\beta} + \bar{h} = \mu \left( -1 + \frac{\beta H_R}{\mu} + \ln \left( \frac{\mu}{\beta H_R} \right) \right) > 0 \quad (20)$$

如果  $\frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \geq \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}$  则

$$g \left( \frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \right) = \delta \times \left[ 1 + \frac{H_R c_2 \beta}{H_R \beta (c_1 - c_2) - c_1 \beta} + \ln \left( -\frac{H_R c_2 \beta}{H_R \beta (c_1 - c_2) - c_1 \beta} \right) \right]$$

由于不等式  $\frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \geq \max \left\{ \frac{c_1}{\beta}, \frac{c_2}{\beta} \right\}$  隐含  $H_R \beta (c_1 - c_2) - c_1 \mu < 0$  因此容易证明

$$1 + \frac{H_R c_2 \beta}{H_R \beta (c_1 - c_2) - c_1 \beta} + \ln \left( -\frac{H_R c_2 \beta}{H_R \beta (c_1 - c_2) - c_1 \beta} \right) \leq 0 \quad (21)$$

根据式(19) - 式(21)可知 如果  $\frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \geq$

$\frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}$ , 那么存在唯一的  $\lambda^* > \max \left\{ \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}, \frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} \right\}$  使  $g(\lambda^*) = 0$  故存在唯一的点

$$(p^* \ q^*) = \left( 1 + \frac{\lambda^* \delta}{S_1(c_1 - \lambda^* \beta)} \quad 1 + \frac{\lambda^* \mu}{H_R(c_2 - \lambda^* \beta)} \right)$$

使总成本  $F = c_1 p^* S_1 + c_2 q^* H_R$  最小.

如果  $\frac{H_R c_2}{H_R \beta - \mu} < \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}$  则有

$$g \left( \frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta} \right) = \mu \left[ 1 + \frac{S_1 c_1 \beta}{c_2 (S_1 \beta - \delta) - S_1 c_1 \beta} + \ln \left( -\frac{S_1 c_1 \beta}{c_2 (S_1 \beta - \delta) - S_1 c_1 \beta} \right) \right] + \mu$$

$$\left[-1 + \frac{\beta H_R}{\mu} + \ln\left(\frac{\mu}{\beta H_R}\right)\right] + \delta \left[1 - \frac{\beta S_1}{\delta} + \ln\left(\frac{\beta S_1}{\delta}\right)\right]$$

由于上式第1项和第3项小于零,第2项大于零,

因而如果  $g\left(\frac{S_1 c_1}{S_1 \beta - \delta}\right) \leq 0$ , 那么存在唯一的

$$(p^* \ q^*) = \left(1 + \frac{\lambda^* \delta}{S_1(c_1 - \lambda^* \beta)} \quad 1 + \frac{\lambda^* \mu}{H_R(c_2 - \lambda^* \beta)}\right)$$

使得总成本  $F = c_1 p^* S_1 + c_2 q^* H_R$  达到最小.

证毕.

**推论1** 如果  $(S_0, H_0) \in \Omega_2$  利用上面的方法, 可以考虑1次免疫控制、1次隔离控制、1次综合控制的最优控制策略, 但对于模型(11) 1次隔离措施已经达不到目的, 即使脆性源型业务的规模所占比例不超过  $H_R$  除非1次隔离所有该类型业务, 但这是不现实的. 如果此类情形发生, 那么控制脆性源型业务所占比例不超过  $H_R$  的最佳选择就是采取一个周期性的控制方案.

类似于命题2的推导过程, 可以得到如下命题.

**命题4** 如果  $c_2 > c_1$  且命题3的条件成立, 那么综合控制的总成本小于免疫控制或隔离控制的总成本, 即  $F^* < \min(f_1, f_2)$ ; 对于免疫和隔离方案的总成本, 其大小依赖于初始条件  $(S_0, H_0)$  和临界参数  $H_R$ .

对于第2种情况, 如果  $H_R \leq H^*$ . 任何从  $(S_0, H_0) \in \Omega$  出发的轨线将与直线  $H = H_R$  相交无限多次, 这说明任何1次控制都不可能维持脆性源型业务规模所占比例不超过  $H_R$ , 因此最佳的方案就是实施一个周期性的控制策略.

## 4 改进模型的最优周期控制策略

### 4.1 改进模型周期解的存在性及其周期

下面分析模型(11) 周期解的存在性及其周期表达式, 其中周期解表达式对于设计最佳的控制方案具有重要作用, 并有如下命题.

**命题5** 假设  $p, q < 1$ . 如果  $p > 0$  且

$$H_R < \frac{1}{\beta q} \left( \delta \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \mu \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) \right) \quad (22)$$

那么模型(11) 存在唯一的  $T$  周期解; 如果  $p = 0$

且  $H_R = \frac{\mu \ln \frac{1}{1-q}}{\beta q}$ , 那么对任意满足初始  $S_0 \geq \frac{\delta}{\beta}$  出发的解是周期解.

**证明** 设  $S(t) = \xi(t)$ ,  $H(t) = \eta(t)$  是所考虑的  $T$  周期解且  $\eta(0) = H_R$ . 记  $\xi_0 = \xi(0^+)$ ,  $\eta_0 = \eta(0^+)$ ,  $\xi_1 = \xi(T)$ ,  $\eta_1 = \eta(T) = H_R$ ,  $\xi_1^+ = \xi(T^+)$  和  $\eta_1^+ = \eta(T^+)$ . 根据解的  $T$  周期性有  $\xi_1^+ = \xi_0$ ,  $\eta_1^+ = \eta_0$ , 即

$$(1-p)\xi_1 = \xi_0, \quad (1-q)\eta_1 = \eta_0 \quad (23)$$

对  $\forall t \in (0, T]$ , 模型(11) 的解  $S(t) = \xi(t)$ ,  $H(t) = \eta(t)$  满足

$$\beta[\xi(t) - \xi_0] - \delta \ln\left(\frac{\xi(t)}{\xi_0}\right) = \mu \ln\left(\frac{\eta(t)}{\eta_0}\right) - \beta[\eta(t) - \eta_0]$$

特别地, 当  $t = T$  时有

$$\beta[\xi_1 - \xi_0] - \delta \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right) = \mu \ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) - \beta[\eta_1 - \eta_0]$$

根据式(23) 有

$$\beta p \xi_1 = \delta \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \mu \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) - \beta q H_R$$

因此当  $p > 0$  时, 有

$$\xi_0 = \frac{1-p}{\beta p} \left( \delta \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \mu \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) - \beta q H_R \right) \quad (24)$$

如果  $\delta \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \mu \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) - \beta q H_R > 0$ , 那么  $\xi_0 > 0$ , 即

$$H_R = RL < \frac{1}{\beta p} \left( \delta \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \mu \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) \right)$$

证毕.

**命题6** 如果  $\frac{2\delta}{\beta} \frac{1-p}{2-p} < \xi_0 < \frac{\delta}{\beta}$ , 那么模型

(11) 的周期解  $(\xi(t), \eta(t))$  的周期  $T$  满足方程

$$T = \int_{(1-q)H_R}^{H_{\min}} \frac{dH}{H[\beta g_0(H) - \delta]} + \int_{H_{\min}}^{H_R} \frac{dH}{H[\beta g_1(H) - \delta]} \quad (25)$$

如果  $\xi_0 \geq \frac{\delta}{\beta}$ , 模型(11) 的周期解  $(\xi(t), \eta(t))$  的周期  $T$  满足方程

$$T = \int_{(1-q)H_R}^{H_R} \frac{dH}{H[\beta g_1(H) - \delta]} \quad (26)$$

**证明** 由模型(11) 的第2个方程得到  $dt = \frac{dH}{H[\beta S(H) - \delta]}$ , 函数  $S(H)$  由下面的方程确定

$$\beta(S(t) - \xi_0) - \delta \ln\left(\frac{S(t)}{(1-p)\xi_1}\right) = \mu \ln\left(\frac{H(t)}{\eta_0}\right) - \beta(H(t) - \eta_0) \quad (27)$$

关于  $S$  求解该方程得到

$$S(H) = g_k(H),$$

$$g_k(H) = -\frac{\delta}{\beta} \text{Lambert W}\left(-k, -\frac{\beta}{\delta}(1-p)\xi_1 e^A\right),$$

$$k = 1, 2,$$

$$A = \frac{-\beta\xi_1(1-p) - \mu \ln\left(\frac{H}{\eta_0}\right) + \beta(H - \eta_0)}{\delta}$$

为了计算周期  $T$  考虑以下两种情况.

情形 1 如果  $\frac{2\delta(1-p)}{\beta} < \xi_0 < \frac{\delta}{\beta}$  那么从曲线  $S(H) = g_0(H)$  上的点  $(\xi_0, (1-q)H_R)$  逆时针方向到点  $(\frac{\delta}{\beta}, H_{\min})$  ( $t = t|_{p_2}$ ) 积分, 有

$$t|_{p_2} - t|_{p_1} = \int_{(1-q)H_R}^{H_{\min}} \frac{dH}{H[\beta g_0(H) - \delta]}$$

而沿着曲线  $S(H) = g_1(H)$  上的点  $(\frac{\delta}{\beta}, H_{\min})$  ( $t = t|_{p_2}$ ) 逆时针方向到点  $(\xi_1, \frac{\eta_0}{1-q})$  ( $t = t|_{p_3}$ ) 积分

$$\text{得到 } t|_{p_3} - t|_{p_2} = \int_{H_{\min}}^{H_R} \frac{dH}{H[\beta g_1(H) - \delta]}$$

其中

$$H_{\min} = -\frac{\mu}{\beta} \text{Lambert W}\left(-\frac{\beta}{\mu} \times \frac{-\delta + \beta(1-p)\xi_1 + \delta \ln\left(\frac{\delta}{\beta(1-p)\xi_1}\right) + \beta\eta_0}{\mu}\right)$$

因此, 周期  $T$  的表达式为

$$T = \int_{(1-q)H_R}^{H_{\min}} \frac{dH}{H[\beta g_0(H) - \delta]} + \int_{H_{\min}}^{H_R} \frac{dH}{H[\beta g_1(H) - \delta]} \quad (28)$$

情形 2 如果  $\xi_0 \geq \frac{\delta}{\beta}$  只需考虑右边的分支, 同理可得周期  $T$  的积分表达式为

$$T = \int_{(1-q)H_R}^{H_{\min}} \frac{dH}{H[\beta g_1(H) - \delta]} \quad (29)$$

由于  $-\frac{\beta}{\delta}(1-p)\xi_1 e^A < 0$  和  $-e^{-1} \leq -\frac{\beta}{\delta}(1-p)\xi_1 e^A$  等价于

$$f(H) \triangleq \frac{\mu}{\beta} \ln\left(\frac{H}{\eta_0}\right) - \frac{\beta}{\delta}(H - \eta_0) + \frac{\beta\xi_0}{\delta} - 1 - \ln\left(\frac{\beta\xi_0}{\delta}\right) \geq 0,$$

$$f'(H) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\mu}{H} - \beta\right),$$

$$f''(H) = -\frac{\mu}{\delta H^2} < 0$$

所以函数  $f(H)$  在  $H = \frac{\mu}{\beta}$  处得到唯一的最大值.

容易验证

$$f(H_{\min}) = 0,$$

$$f((1-q)H_R) = \frac{\beta\xi_0}{\delta} - 1 - \ln\left(\frac{\beta\xi_0}{\delta}\right) \geq 0$$

由于

$$f(H_R) = \frac{\mu}{\delta} \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) - \frac{\beta q H_R}{\delta} + \frac{\beta\xi_0}{\delta} - 1 - \ln\left(\frac{\beta\xi_0}{\delta}\right)$$

根据式 (24) 有

$$\frac{\mu}{\delta} \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) - \frac{\beta q H_R}{\delta} = \frac{\beta p \delta \xi_0}{1-p} - \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

这说明

$$f(H_R) = \frac{\beta\xi_0}{(1-p)\delta} - 1 - \ln\left(\frac{\beta\xi_0}{(1-p)\delta}\right) \geq 0$$

证毕.

#### 4.2 改进模型的最优周期控制策略

要讨论周期控制下成本最小的控制策略, 只需比较周期免疫和周期综合控制两种策略即可.

不失一般性, 在直线  $H = H_R$  上选取点  $(S_{\max}, H_R)$  满足  $S_{\max} > \frac{\delta}{\beta}$ , 则存在一条闭轨线  $\Gamma_\gamma$  与直线  $H = H_R$  相交于另一点  $(S_{\min}, H_R)$ , 其中  $S_{\min} = -\frac{\delta}{\beta} \text{Lambert W}\left(-\frac{\beta}{\delta} \exp\left(-\frac{\beta S_{\max} - \delta \ln S_{\max}}{\delta}\right)\right)$ . 下面分别考虑模型 (11) 两种不同的周期控制策略.

1) 周期免疫策略, 即  $q = 0$ .

在每一次控制中易感型业务成功免疫的比例为  $S_{\max} - S_{\min}$ , 记相应周期解的周期为  $T_1$ , 由式 (25) 有

$$T_1 = \int_{H_R}^{H_{\min}} \frac{dH}{H[\beta g_0(H) - \delta]} + \int_{H_{\min}}^{H_R} \frac{dH}{H[\beta g_1(H) - \delta]}$$

其中  $g_k(H) = -\frac{\delta}{\beta} \text{Lambert W}\left(-k, -\frac{\beta}{\delta} S_{\min} e^A\right),$

$$k = 0, 1,$$

$$A = \frac{-\beta S_{\min} - \mu \ln \frac{H}{H_R} + \beta(H - H_R)}{\delta}$$

因此 1 个周期内的平均成本为

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{1}{T_1} [c_1(S_{\max} - S_{\min})] \\ &= \frac{1}{T_1} \left[ c_1 \left( S_{\max} + \frac{\delta}{\beta} \text{Lambert W} \left( -\frac{\beta}{\delta} \exp \left( -\frac{\beta S_{\max} - \delta \ln S_{\max}}{\delta} \right) \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

此时, 每一个周期内相应的免疫比率  $p = 1 - \frac{S_{\min}}{S_{\max}}$ .

2) 周期综合控制策略 即  $pq \neq 0$ .

假设存在一点  $P = (S_1, H_1) \in \Gamma_\gamma$  使得点  $Q_1 = (S_{\max}, H_R)$  在 1 次脉冲控制实施后跳到该点, 如图 4 所示.

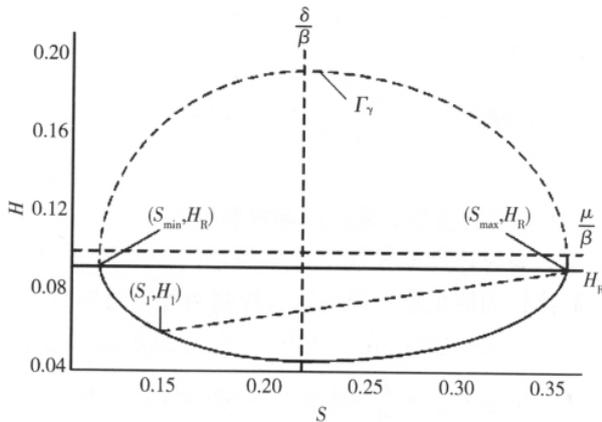


图 4 改进控制模型 (11) 的最优控制策略示意图

Fig. 4 The optimal control strategy of modified control model (11)

由此可知, 点  $P = (S_1, H_1)$  满足下面的等式

$$\begin{cases} \beta H_1 + \beta S_1 - \mu \ln H_1 - \delta \ln S_1 = \bar{h} \\ S_1 - S_{\max} = -p S_{\max} \\ H_1 - H_R = -q H_R \end{cases}$$

其中  $\bar{h} = -\delta \ln S_{\max} - \mu \ln H_R + \beta S_{\max} + \beta H_R$ , 每一个周期  $T$  内免疫和隔离的比率分别为  $p S_{\max}$  和  $q H_R$ .

有意义的问题是在 1 个周期内的平均成本

$$\bar{F} = \frac{1}{T} (c_1 p S_{\max} + c_2 q H_R) \quad (31)$$

如何随点  $P = (S_1, H_1)$  沿着轨道  $\Gamma_\gamma$  从点  $Q_1 = (S_{\max}, H_R)$  移到点  $Q_2 = (S_{\min}, H_R)$ , 其中当  $(1-p) \cdot$

$S_{\max} < \frac{\delta}{\beta}$  时周期  $T$  满足的方程由式 (25) 确定, 当  $(1-p) S_{\max} \geq \frac{\delta}{\beta}$  时由式 (26) 确定, 且初始值为  $((1-p) S_{\max}, (1-q) H_R)$ , 值对  $(p, q)$  满足

$$\beta(1-p) S_{\max} + \beta(1-q) H_R - \mu \ln((1-q) H_R) - \delta \ln((1-p) S_{\max}) = \bar{h}$$

上式关于  $q$  求解得

$$q = 1 + \frac{\mu}{\beta H_R} \text{Lambert W} \left( -\frac{\beta}{\mu} \exp \left( -\frac{\bar{h} + \delta \ln((1-p) S_{\max}) - \beta(1-p) S_{\max}}{\mu} \right) \right) \quad (32)$$

由图 4 和 Lambert W 函数的定义可知, 当  $0 < p < 1 - \frac{S_{\min}}{S_{\max}}$  时  $q$  是有定义的.

由式 (31) 可知, 如果  $p = 1 - \frac{S_{\min}}{S_{\max}}$ , 则  $\bar{F} = \bar{f}_1$ ;

类似于命题 2 分析, 可以证明对所有的  $0 < p < 1 - \frac{S_{\min}}{S_{\max}}$  和  $q$  (由式 (32) 确定) 有  $\bar{F} < \bar{f}_1$ , 也就是说, 周期综合控制策略是最优的.

## 5 结束语

本文研究发现, 模型初始区域可以分为两部分, 从一个部分出发的解脆性源型业务不可能达到临界水平  $RL$ , 此时对模型不会发生脉冲影响; 从另一个区域出发的解将在有限时间达到临界水平  $RL$ , 此时企业必须采取有效措施避免脆性风险的大范围传播. 为此, 文章针对基本模型和改进模型, 从最小成本的角度比较了免疫、隔离和综合控制等 3 种策略的效果. 同时研究还表明, 如果  $H_R < H^*$ , 为了控制脆性源型业务规模所占比例不超过  $H_R$ , 必须实施周期性的控制策略. 由于复杂系统具有开放性和自组织性, 当系统受到外力的突然打击时, 会尽力维持其原有的状态, 即从遭受外力到系统崩溃会有一段延时. 因此, 通过引入时滞变量, 构建相应的脆性风险控制模型, 将是接下来进一步研究的重点问题.

## 参考文献:

- [1]王正位,朱武祥. 市场非有效与公司投机及过度融资[J]. 管理科学学报,2010,13(2): 50-57.  
Wang Zheng-wei, Zhu Wu-xiang. Inefficient market, executive speculation and over-financing [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(2): 50-57. (in Chinese)
- [2]姜付秀. 上市公司多元化经营的决定因素研究[J]. 管理世界,2006,(5): 128-135.  
Jiang Fu-xiu. Study on the determinants of business diversification of listed companies [J]. Management World, 2006, (5): 128-135. (in Chinese)
- [3]Li Y C, Mi H H. Empirical research on relationship between corporate diversification and performance—from 1031 Chinese listed companies [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2008, 17(s): 89-93.
- [4]Wiersema M F, Bowen H P. Corporate diversification: The impact of foreign competition, industry globalization, and product diversification [J]. Strategic Management Journal, 2008, 29(2): 115-132.
- [5]Chang S C, Wang C F. The effect of product diversification strategies on the relationship between international diversification and firm performance [J]. Journal of World Business, 2007, 42(1): 61-79.
- [6]Barnes E, Hardie B G. The diversification Puzzle: Revisiting the value impact of diversification for UK firms [J]. Journal of Business Finance & Accounting, 2006, 33(9): 1508-1534.
- [7]Arocena P. Cost and quality gains from diversification and vertical integration in the electricity industry: A DEA approach [J]. Energy Economics, 2008, 30(1): 39-58.
- [8]Flipovic D, Kupper M. Optimal capital and risk transfers for group diversification [J]. Mathematical Finance, 2008, 18(1): 55-76.
- [9]Beckmann M J. Diversification versus concentration: A note on the allocation of effort among risky research projects [J]. Pacific Economic Review, 2000, 5(3): 291-298.
- [10]Anderson R C, Reeb D M. Founding-family ownership, corporate diversification, and firm leverage [J]. Journal of Law & Economics, 2003, 46(2): 653-680.
- [11]Wang H C, Barney J B. Employee incentives to make firm-specific investments: Implications for resource theories of corporate diversification [J]. Academy of Management Review, 2006, 31(2): 466-476.
- [12]吴红梅,金鸿章,林德明,等. 复杂系统脆性理论的风险分析 [J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(10): 2019-2022.  
Wu Hong-mei, Jin Hong-zhang, Lin De-ming, et al. Risk analysis of complex system brittleness [J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(10): 2019-2022. (in Chinese)
- [13]Eriksson E A, Weber K M. Adaptive foresight: Navigating the complex landscape of policy strategies [J]. Technological Forecasting and Social Change, 2008, 75(4): 462-482.
- [14]Lin D M, Jin H Z, Li Q. The brittleness model of complex system based on cellular automata [J]. Journal of Marine Science and Application, 2004, 3(2): 69-72.
- [15]Wang Y. Study of supply chains brittleness based on the complex system brittle theory [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services, New Jersey: IEEE, 2007: 1199-1203.
- [16]Guo J, Wu D J. Researching the brittleness of traffic system based on cusp catastrophe model [C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics, New Jersey: IEEE, 2008, 2796-2800.
- [17]韩传峰,陈建业,孙庆荣,等. 黄河中下游灾害系统的脆性源控制 [J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(6): 135-140.  
Han Chuan-feng, Chen Jian-ye, Sun Qing-rong, et al. Brittleness source control of disaster system about middle and lower reaches of the Yellow River [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2006, 26(6): 135-140. (in Chinese)
- [18]Yan L M, Zhang J, Chen J. Simulation of brittleness of electric power system based on chart theory [J]. Journal of System

Simulation, 2007, 19 ( 18 ): 4104 - 4106.

[19]唐三一,肖燕妮. 单种群生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 374 - 391.

Tang San-yi, Xiao Yan-ni. Biology Dynamics in Single Species[M]. Beijing: Science Press, 2008: 374 - 391.

[20]Dombrowsky W R. Again and again: Is a disaster what we call “Disaster”? [J]. International Journal of Mass Emergencies and Disasters, 1995, 13( 3 ): 241 - 254.

[21]Bailey N T J. The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications[M]. 2nd ed. London: Griffin, 1975: 120 - 123.

## Brittle control model and optimal strategy for diversified company

WANG De-lu, SONG Xue-feng

School of Management, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China

**Abstract:** The excitation of brittleness is the key to overall managerial difficulties, and brittle risk control is the important leverage to improve the security of management system. Based on the path analysis of brittle risk spread in firm's business system, the basic state-dependent model and modified control model considering growth rate and decline rate of business are put forward, and the effect of three strategies such as immunization, isolation and integrated control is evaluated and compared. In addition, the existence of periodic solutions of improved model and optimal cycle control strategy are discussed. The results show that different control strategies can provide the same results in terms of risk control. Under the same objective, the total cost of integrated control strategy is the lowest, while the total cost of immunization strategy and isolation strategy depends on the initial conditions and critical parameters. Moreover, the best option is to implement a cyclical comprehensive control strategy when none of the strategies can achieve the goal.

**Key words:** diversification strategy; brittle risk; control model; optimal strategy