

股票价格运行的幂律特征及幂律跳跃扩散模型^①

曹宏铎, 李 昊, 何 智
(中山大学管理学院, 广州 510275)

摘要: 在 Merton 提出的跳跃扩散模型的逻辑框架之下, 完成了两方面的修正工作: 将计数过程由 Poisson 过程修正为带有幂律性质的更新过程, 同时, 赋予股票价格运动过程发生跳跃的时间和幅度以幂律分布特征. 通过实证研究表明, 修正后可以更加准确地描述股票价格的运动过程, 同时得到具有尖峰胖尾的收益率分布和波动聚集性. 以此为基础可以更加准确地为期权等金融衍生品进行定价, 同时也为金融风险管理提供了有效工具.

关键词: 人类行为动力学; 跳跃扩散模型; 更新过程; 幂律分布

中图分类号: F830.91; O211.6 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2011)09-0046-14

0 引言

早在 20 世纪初, 法国数学家 Bachelier^[1] 开始利用 Brownian 运动来研究股票价格的运动. Fama^[2] 提出了著名的有效市场假说, Black 和 Scholes^[3] 基于该假说, 提出了期权定价模型, 可以得到欧式看涨期权和欧式看跌期权的价格解析解, 对金融理论和实务的发展产生了重大影响.

大量的实证研究对传统金融经济学的研究假设和框架提出了质疑与批评. Osborne^[4] 发现股票价格收益率分布具有胖尾的特征, 同时很多学者也发现股票收益率分布的尖峰胖尾特性. 因此, 假设股票收益率服从正态分布的 Black-Scholes 模型需要进行修正. 修正主要从两方面进行: 引入波动率的随机性和股票收益的非连续性.

Engle^[5] 提出 ARCH 模型, Bollerslev^[6] 将其推广得到 GARCH 模型. Cox 和 Ross^[7] 提出价格依赖的波动率扩散模型, Hull 和 White^[8] 提出随机波动率模型, Heston^[9] 建立仿射随机波动率模型, 而 GARCH 模型则可以被看作随机波动率模型的特殊形式. Peters^[10] 提出分数布朗运动, 但 Rogers^[11] 指出该模型存在套利机会. Merton^[12] 提出

要在股票价格的运动中加入属于非系统风险跳跃的过程, 认为股票价格的运动过程不是连续的, Kou^[13] 提出期权定价的双指数跳跃扩散模型. Bates^[14] 认为将随机波动率模型和跳跃扩散模型相互结合, 则可以更好的刻画出股票价格运动方式. Scott^[15]、Duffie 等^[16] 以及 Bakshi^[17] 提出了各自的结合模型. Barndorf-Nielsen^[18] 提出广义双曲分布, Eberlein 和 Keller^[19] 将广义双曲分布的子族双曲分布用于金融模型分析, Blattberg 和 Gonedes^[20]、Bibby 和 Sørensen^[21] 也进行了相关的研究.

叶中行等^[22]、陈收和杨宏林^[23] 通过实证研究发现, 股票价格收益率的尾部分布呈现出幂律特征. 幂律分布为股票收益率的尾部分布赋予了较高的概率, 这样就可以使 VaR 更好地应用于金融风险管理的.

同时, Barabási^[24]、Vázquez 等^[25] 发现个体的行动也具有幂律特征, 即事件的发生具有在长时间的“了无一事”中存在高频度阵发活动的特点. 个体行动的幂律性体现在两次事件发生之间的等待时间, 等待时间的长短则具有幂律分布的特点. 股票价格的运动也符合这样的结论, 即允许股票

① 收稿日期: 2010-01-06; 修订日期: 2011-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70801066; 71071168); 中央高校科研基本业务费资助项目(1009028).

作者简介: 曹宏铎(1972—) 男, 河北秦皇岛人, 博士, 副教授. Email: caohd@mail.sysu.edu.cn

价格可以在较长的时间里不发生跳跃,也可以在短时间内密集的发生跳跃.相比之下,广泛地运用在对事件发生的描述的 Poisson 过程则无法刻画出这样的规律.本文将人类行为动力学引入到金融学理论中,更确切地说是股票价格的跳跃扩散模型进行修正.

1 模型介绍

实证研究表明股票价格的变化并不服从对数正态分布,而这正是 Black-Scholes 模型的重要假设.这一假设隐含认为股票价格的变化路径是连续的. Merton^[12]将路径连续的扩散过程和随机发生的跳跃过程相结合,提出跳跃扩散模型,如下式

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu(t) dt + \sigma(t) dW(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (J_i - 1)\right) \quad (1)$$

其中: $\mu(t)$ 和 $\sigma(t)$ 为 R 上可积函数,分别表示风险资产收益率和风险资产收益率波动率; $W(t)$ 是标准 Brownian 运动; $N(t)$ 是一个计数过程,表示发生跳跃的次数; J_i 表示股票价格发生跳跃的幅度, $\{J_i\}$ 是具有独立同分布的非负随机变量序列.

S_t 是不确定性定义在完备概率空间 (Ω, F, F_t, P) 上的市场中 t 时刻的股票价格.该完备概率空间由计数过程 $N = \{N(t), F_t, t \geq 0\}$ 、标准 Brownian 运动 $W = \{W(t), F_t, t \geq 0\}$ 和独立同分布的随机变量列 $\{J_i, i = 1, 2, \dots\}$ 组成.简言之, Merton 模型由线性漂移、布朗运动和复合泊松过程 3 部分构成.

Merton^[12]提出的模型中 $N(t)$ 是 Poisson 过程, J_i 服从对数正态分布.该模型形式简洁、逻辑清晰,因此,自发表后便成为分析标的资产价格不连续变化的标准模式.在此框架下的后续研究一般接受 $N(t)$ 的假设,而针对 J_i 的分布进行研讨.其中 Kou^[13]提出的双指数跳跃扩散模型影响最大.

大量实证研究结果表明资产价格行为中幂律的存在,同时,在其他领域中的研究也表明幂律是人类行为规律的普适的现象.本文认为 $N(t)$ 是个更新过程,更新过程的事件间隔时间服从含有幂律性质的分布 F ,其概率密度函数为

$$f(x) = Ax^{-\alpha}e^{-\beta/x} (\alpha > 1, \beta > 0) \quad (2)$$

即 Fokker-Planck 方程.

Poisson 过程假设股票市场历史上的波动情况与现在的波动情况无关,关注于等待时间的长短,而不是起始时刻的初始状态.但是,市场中的交易主体会对市场信息反映过度或者反映不足,他们对股票市场走势的预期往往基于历史交易资料和当前市场的宏观环境以及所有能够掌握的信息,而任何信息的不完备或是具有偏差的解读都会造成事件发生的时间记忆特点.从这个角度来讲,本文所定义的更新过程比 Poisson 过程可以更加准确地模拟出股票价格的跳跃情况.

跳跃幅度也具有幂律性质.令 $Y = \ln J$, Y 则是非对称的分布,其概率密度函数为

$$f_Y(y) = pA_+ y^{-\alpha_+} e^{-\beta_+/y} 1_{\{y \geq 0\}} + qA_- (-y)^{-\alpha_-} e^{-\beta_-/y} 1_{\{y < 0\}} \quad (3)$$

其中 $\alpha_+ > 0, \alpha_- > 0, \beta_+ > 1, \beta_- > 1, p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$, p 和 q 分别为股票价格上跳和下跳的概率,价格向上和向下发生跳跃幅度的概率密度函数分别为

$$f(y) = A_+ y^{-\alpha_+} e^{-\beta_+/y} (y \geq 0),$$

$$f(y) = A_- (-y)^{-\alpha_-} e^{-\beta_-/y} (y < 0)$$

其中 A_+ 和 A_- 为常数.

经过以上定义后的式(1)称为幂律跳跃扩散模型,其所描述的股票价格运动过程可以得到收益率的胖尾特征,也可以得到波动聚集性,从而该模型对金融资产定价理论和实践具有重要的意义.

式(1)的解为

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s) \right\} \prod_{i=1}^{N(t)} J_i \quad (4)$$

利用式(4),可以得到收益率的表达式

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \exp \left\{ \int_t^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(s) dW(s) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} Y_i \right\} - 1 \quad (5)$$

为了分析的简便,假设资产期望收益率和波动率为常数,将式(5)进行幂级数展开,利用 $e^x \approx 1 + x$,可以得到

$$\Delta S(t) / S(t) \approx \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} + BY \quad (6)$$

其中: Z 为服从标准正态分布的随机数; B 为服从伯努利分布的随机数, 即有 $P\{B = 1\} = \theta(\Delta t)$ 和 $P\{B = 0\} = 1 - \theta(\Delta t)$; Y 的概率密度函数由式(3)定义. 式(6)中 $\Delta S(t) / S(t)$ 的概率密度函数可以表示为

$$g(x) = \frac{1 - \theta(\Delta t)}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{e^{-\frac{(x-\mu \cdot \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}}{\sqrt{2\pi}} + \theta(\Delta t) \left\{ pA_+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y-\mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}} \frac{\beta_+}{y}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} y^{-\alpha_+} dy + qA_- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x-y-\mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}} \frac{\beta_-}{y}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} (-y)^{-\alpha_-} dy \right\} \quad (7)$$

可以看出, 式(7)所展示的股票收益率概率密度函数实际上是对正态分布的修正, 修正的幅度由下式所示

$$m(x) = \theta \Delta t \left\{ pA_+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y-\mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}} \frac{\beta_+}{y}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} y^{-\alpha_+} dy + qA_- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x-y-\mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}} \frac{\beta_-}{y}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} (-y)^{-\alpha_-} dy - \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{e^{-\frac{(x-\mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}}{\sqrt{2\pi}} \right\} \quad (8)$$

将修正函数 $m(x)$ 加入到正态分布中, 即可得到股票收益率的概率密度函数, 修正函数的图形通常呈现出 M 形. 图 1 所展示的股票日收益率的概率密度函数呈现出明显的胖尾特征.

2 模型参数估计及实证研究

股票价格跳跃扩散模型认为跳跃行为是带有幂律特征的更新过程, 跳跃幅度的分布也具有幂律特征. 本文以上证综合指数从 2006-1-4 ~ 2009-7-2 共 849 个交易日的收盘点数为样本, 对模型进行实证检验并进行参数估计.

2.1 $N(t)$, 具有幂律特征的更新过程

本文对 $N(t)$ 的定义, 蕴含股票价格收益率在经过极短或极长的等待时间后发生跳跃的概率较小, 而每两次跳跃的间隔时间则更加倾向于某一段时间的假设. 以上证综合指数为对象, 将样本按照周分为 173 组.

1) 根据式(2)构造待检验的模型, 为

$$\ln f(x) = \ln A - \alpha \ln x - \frac{\beta}{x} + \varepsilon \quad (9)$$

为了分析的简便, 式(9)中的 x 为每两次跳跃之间的等待天数, $f(x)$ 为等待 x 天后发生跳跃的频率.

2) 跳跃识别. 每周第 i 天的收益率 u_i 可由下式得到

$$u_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) \quad (10)$$

其中 S_i 为每周第 i 天的收盘点数. 每周的指数波动率 σ_n^2 可由下式得到

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2 \quad (11)$$

通过构造 GARCH(1, 1) 模型来得到预期的指数波动率, 有

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta_1 U_{n-1}^2 + \beta_2 \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon \quad (12)$$

其中: U_{n-1} 为第 $n-1$ 周的收益率; σ_n 和 σ_{n-1} 分别为第 n 周和第 $n-1$ 周的指数波动率; ω 为代表长期波动因素的常数项; ε 为残差项.

利用第 3 周到第 173 周共 171 组数据对式(12)进行拟合, 回归结果见表 1.

表 1 历史收益率和波动率对当期波动率的回归结果

Table 1 regression results between historical rate of return and volatility to current volatility

系数	系数估计	T 检验值	P 值
ω	0.000 276	5.365 538	0.000 0
β_1	0.062 437	4.122 887	0.000 1
B_2	0.229 602	2.981 498	0.003 3
R_2		0.222 697	
修正 R^2		0.213 443	
F-统计值		24.065 95	

根据回归结果, 第 n 周的指数波动率可如下表示

$$E(\sigma_n^2) = 0.000 276 + 0.062 437 U_{n-1}^2 + 0.229 602 \sigma_{n-1}^2 \quad (13)$$

利用式(13)可以计算出对第 n 周的预期指数波动率, 然后将每周第 i 天的 u_i^2 与该周的 $E(\sigma_n^2)$ 相比较, 如果 $u_i^2 > E(\sigma_n^2)$, 则说明第 i 天的收盘指数发生了跳跃, 而如果 $u_i^2 \leq E(\sigma_n^2)$, 则说明第 i 天的收盘指数没有发生跳跃. 根据这一标准对从 2006-1-16 ~ 2009-7-2 共 841 个交易日进行收盘点数是否发生跳跃的判断, 并统计出两次跳跃之间的等待天数及其频数, 统计结果见表 2.

表 2 等待天数的频数及概率

Table 2 Frequency and probability of the waiting days

天数	频数	频率	分布 F 概率	累积概率	指数分布概率	累积概率
1	65	0.296 804	0.152 3	0.152 3	0.161 7	0.161 7
2	44	0.200 913	0.246 5	0.398 8	0.135 6	0.297 3
3	27	0.123 288	0.148 3	0.547 1	0.113 7	0.411 0
4	25	0.114 155	0.092 6	0.639 7	0.095 3	0.506 3
5	18	0.082 192	0.062 3	0.702 1	0.079 9	0.586 1
6	7	0.031 963	0.044 5	0.746 6	0.066 9	0.653 1
7	8	0.036 53	0.033 3	0.779 9	0.056 1	0.709 2
8	7	0.031 963	0.025 8	0.805 7	0.047 0	0.756 2
9	5	0.022 831	0.020 5	0.826 2	0.039 4	0.795 7
10	3	0.013 699	0.0167	0.842 9	0.033 1	0.828 7
11	2	0.009 132	0.013 9	0.856 8	0.027 7	0.856 4
12			0.011 7	0.868 5	0.023 2	0.879 6
13	2	0.009 132	0.000 9	0.878 5	0.019 5	0.899 1
14	1	0.004 566	0.008 6	0.887 1	0.016 3	0.915 4
15	1	0.004 566	0.007 5	0.894 5	0.013 7	0.929 1
16			0.006 6	0.901 1	0.011 5	0.940 6
17			0.005 8	0.906 9	0.009 6	0.950 2
18	1	0.004 566	0.005 2	0.912 2	0.008 1	0.958 2
19			0.004 7	0.916 8	0.006 8	0.965 0
20			0.004 2	0.921 1	0.005 7	0.970 7
21	1	0.004 566	0.003 8	0.924 9	0.004 7	0.975 4
22	1	0.004 566	0.003 5	0.928 3	0.004 0	0.979 4
23			0.003 2	0.931 5	0.003 3	0.982 7
24			0.003 1	0.934 4	0.003 0	0.985 5
25			0.002 7	0.937 1	0.002 3	0.987 9
26			0.002 5	0.939 6	0.002 0	0.989 8
27	1	0.004 566	0.002 3	0.941 9	0.001 6	0.991 5
合计	219	1	0.942 0	—	0.991 5	—

3) 等待时间分布的参数估计,由此,得到 18 组数据,根据式(9)进行回归分析,回归结果见表 3.

表 3 等待时间概率分布的回归分析

Table 3 Regression analysis of waiting time's probability distribution

系数	$\ln A$	α	β	$\ln \lambda$	λ
系数估计	0.839 324	2.064 301	1.983 040	-1.944 025	-0.176 437
T 检验值	1.422 957	9.730 175	2.483 533	-6.931 492	-8.221 085
P 值	0.175 2	0.000 0	0.025 3	0.000 0	0.000 0
R^2	0.949 222			0.808 581	
修正 R^2	0.942 451			0.796 617	
F 统计值	140.200 4			67.586 24	

根据回归结果,可以得到等待时间分布的概率密度函数为

$$f(x) = 2.3148x^{-2.064301}e^{-1.98304/x} \quad (14)$$

该概率密度函数的图形如图1所示.

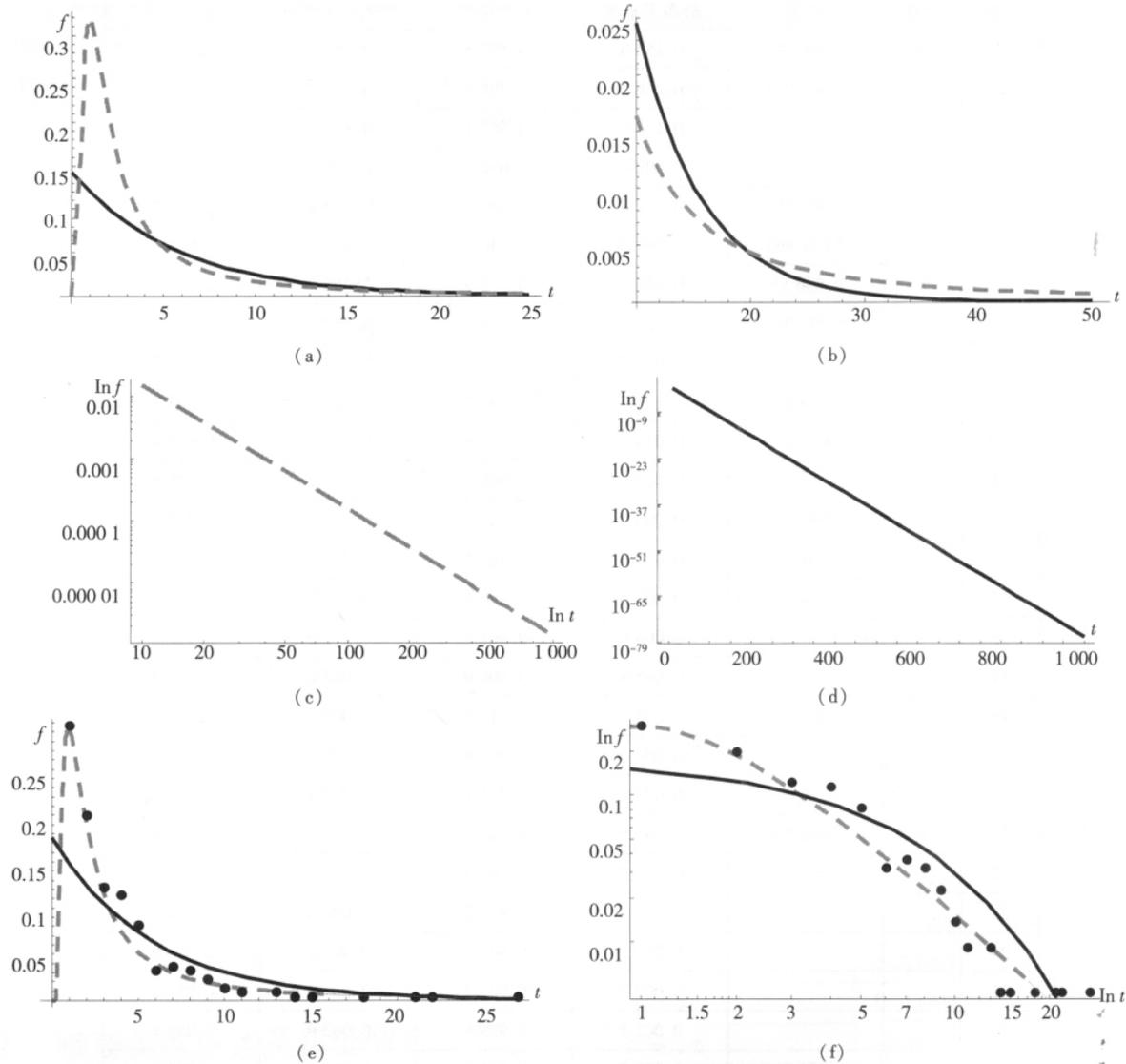


图1 等待时间分布的概率密度函数

Fig. 1 Probability density function of distribution of waiting time

注:图中虚线代表本文所定义的分佈 F ,实线代表指数分佈. a) 虚线为分佈 F 的概率密度函数,由式(15)给出其具体表达式,实线为指数分佈的概率密度函数,由式(16)给出其具体表达式;b) 显示出分佈 F 和指数分佈概率密度函数在尾部的图形,可以看到分佈 F 较指数分佈在尾部赋予更大的权重;c) 给出在双对数坐标下,分佈 F 概率密度函数的图形,可以看出其为一条斜率为 -2 的直线,显示出幂律分佈的特点;d) 在半对数坐标下,指数分佈的概率密度函数为一条斜率为负的直线;e) 将回归分析所使用的 18 个散点加入到 a) 中;f) 将 e) 放置在双对数坐标下所显示出的图形.

在此,注意到

$$\int_0^{\infty} 2.3148x^{-2.064301}e^{-1.98304/x} dx = 1.07988$$

为了保证定积分结果为 1,满足概率密度函数的性质,将式(14)修正为

$$f(x) = 2.14357x^{-2.064301}e^{-1.98304/x} \quad (15)$$

由 $\int_{T-1}^T 2.14357x^{-2.064301}e^{-1.98304/x} dx$ 计算在经过 T 天的等待后指数发生跳跃的概率,并由 $\int_0^T 2.14357x^{-2.064301}e^{-1.98304/x} dx$ 计算累积概率,计算结果见表 2.

4) 等待时间不同分佈比较 再来考虑等待时

间服从指数分布的情况,此时股票价格的跳跃是 Poisson 过程. 等待时间分布的概率密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (\lambda > 0) \quad (16)$$

实证分析的过程如前文所述,回归结果见表

3. 同样考虑到概率密度函数的性质,可以得到指数分布概率密度函数如下

$$f(x) = 0.176437e^{-0.176437x} \quad (17)$$

计算在经过 T 天的等待后收盘点数发生跳跃的概率及累积概率,见表 2.

表 2 显示本文所定义的分佈 F 存在一个缺点,即等待天数为 1 天的概率小于等待天数为 2 天的概率,这与频率统计结果不符,但等待天数在 2 天以内的累积概率达到 0.3988,较指数分布更加符合频率统计结果. 同样,由分佈 F 所得到的概率

比指数分布得到的结果更加符合频率统计结果. 而且,分佈 F 赋予尾部事件更高的概率:等待天数在 27 天以内的累积概率为 94%,而指数分布却达到了 99%.

将指数跳跃事件描绘在时间轴上可以得到一个事件序列. 比较图 2 中真实发生的事件序列、Poisson 过程和前文得到的更新过程所模拟出的事件序列,可以发现,本文所定义的更新过程与真实事件序列更为接近,都呈现出在较长时间的等待中出现密集的阵发事件的特点. 从图 1 中也可以发现 F 的概率密度函数较指数分布而言,为密集的阵发事件和不活跃的偶发事件都赋予了较高的概率,这一点更接近真实世界的情况.

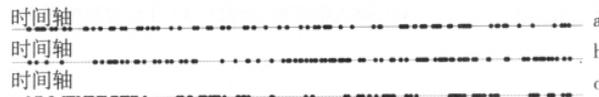


图 2 Poisson 过程、真实过程、更新过程的事件序列

Fig. 2 The events sequence of Poisson process, real process and renewal process

注:图中的横轴代表时间,每一个点代表在时刻 t 发生的指数跳跃,每两个点之间的线段长度则代表等待时间的长短. a) Poisson 过程所模拟出的 100 个连续事件的事件序列. 本图使用的等待时间分布的概率密度函数为实证所得到的式(17); b) 描绘出上证综合指数从 2006-1-16 ~ 2007-11-29 共 451 个交易日所发生的 100 次跳跃事件的序列; c) 由本文所定义的更新过程产生的模拟 100 个连续事件的事件序列,每两个点之间的等待时间的长度服从本文所定义的分佈 F ,其概率密度函数为实证所得到的式(15).

当等待时间分布服从分佈 F 时,期望值的存在取决于参数 α 的取值,即仅 $\alpha > 2$ 时存在期望值,否则

$$E(x) = \int_0^{\infty} Ax^{-\alpha+1} e^{-\beta/x} dx$$

不收敛. 根据实证分析结果,等待天数的期望值大约为 30.84 天,因而允许股票价格跳跃过程出现较长的等待时间. 同时,分佈 F 是具有时间记忆性的,在时刻 t_0 等待 n 天后股票价格出现跳跃的概率依赖于已经等待的天数. 由图 3 可以发现,当等待天数足够大的时候,函数 $h(x) = Ax^{-\alpha+1} e^{-\beta/x}$ 呈现出幂律分布的特点,如下式所示

$$h(x) \propto x^{-\alpha+1} \quad (18)$$

由式(18)所存在的关系,可以得到等待天数的条件期望为

$$E[x | y] \propto \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x/y)^\alpha} dx \quad (19)$$

其中: y 为自上一次跳跃发生之后已经等待的天数; x 为继续等待的天数,即在一次跳跃发生 $x+y$ 天之后股票价格会再次发生跳跃.

同理,也可以得到股票价格发生波动的条件概率为

$$P\{x | y\} \propto \frac{N^{1-\alpha}}{y^{1-\alpha}} \quad (20)$$

其中, N 为预期下一次跳跃距离此次跳跃的等待天数,即自一次跳跃发生 y 天之后,再等待 $N-y$ 天股票价格将会发生新的跳跃.

由式(20)可以发现,已知在第 t 期股票价格发生跳跃之后,随着时间的推移再发生第 2 次跳跃的概率在逐渐减少,即在一次跳跃发生之后往往会紧跟着另一次跳跃. 等待天数的概率存在幂率性是由等待时间概率密度函数的幂律性造成的,图 4 显示出等待天数的概率呈现出幂律性.

2.2 跳跃幅度的概率分布

由于股票价格向上和向下发生跳跃的幅度是不对称的,因此需要对向上跳跃和向下跳跃进行分别讨论. 从 2006-1-16 ~ 2009-6-30 上证综合指数收盘点数所发生的 220 次跳跃中,向上跳跃发生了 111 次,而向下跳跃发生了 109 次.

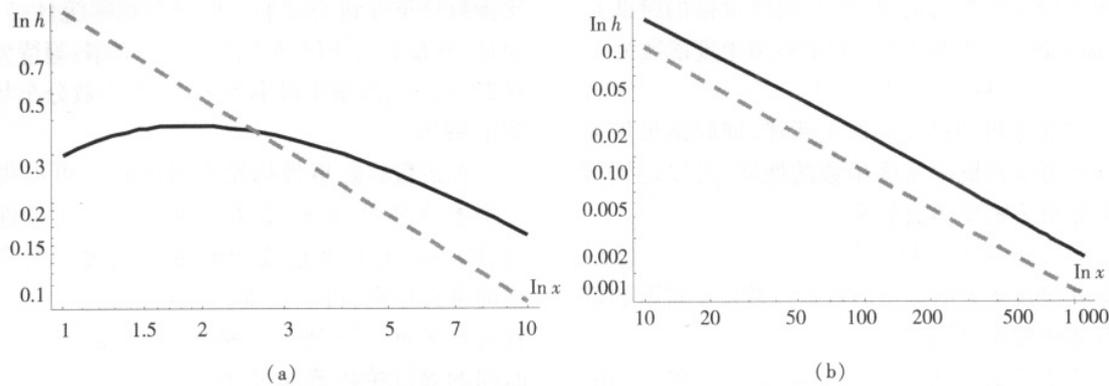


图3 等待时间期望在双对数坐标系中的函数关系

Fig. 3 Expected waiting time in double logarithmic coordinate

注:图中实线代表函数 $h(x) = Ax^{-\alpha+1}e^{-\beta/x}$, 将其在 $(0, +\infty)$ 上积分即可得到等待时间的数学期望 $E(x) = \int_0^{\infty} Ax^{-\alpha+1}e^{-\beta/x} dx$, 虚线代表函数 $y = x^{-1.064301}$. a) 在双对数坐标系中, 函数 $h(x)$ 在等待天数较小的阶段与函数 $y = x^{-1.064301}$ 有明显的不同, 其斜率(绝对值)在为0之后随着等待天数的增加而逐渐增加; b) 当等待天数足够大的时候, 函数 $h(x)$ 在双对数坐标系中成为斜率为 -1.064301 的直线, 即体现出幂律分布的特点.

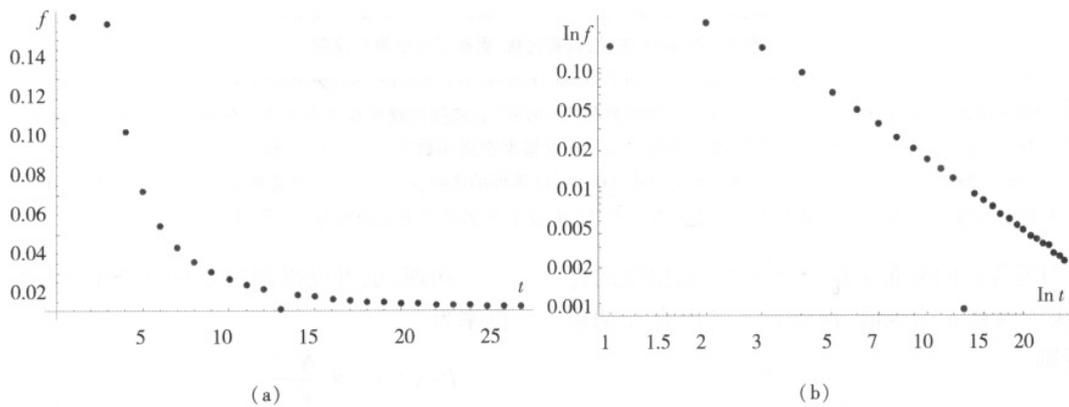


图4 F分布下跳跃等待天数概率的分布散点图

Fig. 4 probability distribution plot of waiting time for the next jump with F distribution

注: a) 展示了由等待时间概率密度函数(式(15))计算得到的跳跃发生等待天数的概率分布, 而 b) 是在双对数坐标系中的情形.

考虑式(10) 定义 x 为 $\ln u_i$, 即对第 i 天的收益率取自然对数, 定义 $f(x)$ 为股票价格发生幅度为 $\ln u_i$ 的跳跃的概率. 将上证综合指数收盘点数的跳跃幅度 $\ln u_i \in [0.015, 0.095]$ 以 0.0025 为步长划分为 28 个区间, 并按照跳跃方向的不同分别统计各个区间内跳跃发生次数的频率.

由统计结果可以发现, 随着跳跃幅度的增加, 跳跃发生的频率呈现出由小到大再到小的变化过程. 通过前文的实证分析, 分布 F 的概率密度函数也较好地拟合了真实世界所出现的情形. 因此, 识别跳跃的判断过程使得前半段呈现出上升趋势的分布 F 概率密度函数在描述跳跃幅度中表现出一

定的合理性.

对式(9) 进行回归分析, 其中 x 和 $f(x)$ 分别为区间中位数和由统计得出的各个区间内跳跃发生次数的频率, 回归结果见表4. 由此, 可以分别得到收盘点数向上跳跃和向下跳跃幅度的概率密度函数, 其图形见图5. 同时, 考虑到概率密度函数的性质, 可以得到收盘点数跳跃幅度的表达式为

$$f(x) = \frac{0.001525x^{-3.230466}e^{-0.0603/x}1_{\{x \geq 0\}}}{2} + \frac{0.00008(-x)^{-5.0571}e^{-0.155/x}1_{\{x < 0\}}}{2} \tag{21}$$

表 4 上证综合指数跳跃幅度的回归分析

Table 4 Regression analysis of jump amplitude of the SSE Composite Index

跳跃方向	向上跳跃			向下跳跃		
	$\ln A$	α	β	$\ln A$	α	β
系数估计	-12.038 22	3.230 466	0.060 289	-15.355 20	5.057 079	0.155 018
T 检验值	-5.164 447	2.004 270	1.414 449	-6.593 187	4.888 499	4.181 217
P 值	0.000 1	0.007 8	0.174 3	0.000 0	0.000 1	0.000 4
R^2	0.749 303			0.581 960		
修正 R^2	0.721 448			0.542 147		
F 统计值	26.899 97			14.617 21		

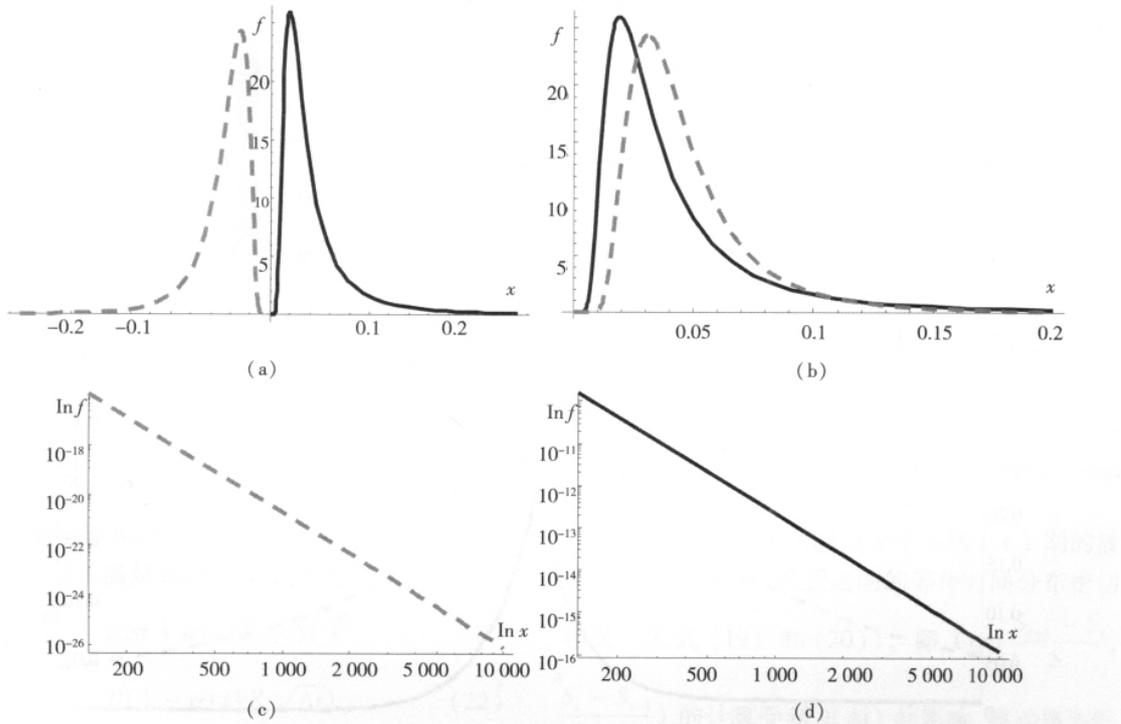


图 5 上证综合指数跳跃幅度的概率密度函数

Fig. 5 The probability density function of the SSE Composite Index's jump amplitude

注：图中虚线代表指数收盘点数向下跳跃的情形，实线代表指数收盘点数向上跳跃的情形。a) 收盘点数向上跳跃和向下跳跃幅度的概率密度函数；b) 将概率密度函数代表向下跳跃的左支和代表向上跳跃的右支重叠放置，可以更加清晰的分辨出两种情形的差异；c) 在双对数坐标中概率密度函数左支的图形，可以看出其为一条斜率为 -5 的直线，显示出幂律分布的特点；d) 在双对数坐标中概率密度函数右支的图形，可以看出其为一条斜率为 -3 的直线，也显示出幂律分布的特点，同时也可以看出左右两支的差异。

3 幂律跳跃扩散模型特征分析

对式(7)中的各个参数进行赋值以得到股票日收益率的概率密度函数。首先，结合前文的实证结果，股票收益率每日发生跳跃的概率为 $\theta(\Delta t) = 1/30.78 = 0.03$ ，时间 Δt 为 1 日(即 0.004 年)，股票市场向盈利方向发生跳跃的概率为 0.5。6 个方程

参数赋值为 $A_+ = 0.0019$ 、 $\alpha_+ = 3.2$ 、 $\beta_+ = 0.06$ 、 $A_- = 0.00008$ 、 $\alpha_- = 5.1$ 、 $\beta_- = 0.16$ ，然后再假设无风险年收益率为 5%，股票市场年波动率为 25%，由此可以画出概率密度函数 $g(x)$ 的图形(图 6)。

250 天(一个交易年)股票价格走势的数值模拟过程如下：

由表 3 确定服从分布 F 的等待天数序列，进而确定 250 个交易日中股票价格发生跳跃的日

期,并以相同的概率确定股票价格向上跳跃或者是向下跳跃.向上发生跳跃的幅度 D 由下式计算得出

$$\int_0^D 0.001525x^{-3.230466} e^{-\frac{0.0603}{x}} dx = u$$

向下发生跳跃的幅度 d 由下式计算得出

$$\int_d^0 0.00008(-x)^{-5.0571} e^{\frac{0.155}{x}} dx = u$$

其中 μ 为服从 $U \sim (0, 1)$ 的随机数.考虑到涨跌停板制度的影响,假设股票价格每日涨跌幅度不能超过 $\pm 10\%$,因此 D 的最大取值为 0.09531 , d 的最小取值为 -0.10536 ,即赋予股票价格发生跳跃以至于涨跌停板的概率分别为 0.094 和

0.058 .没有发生跳跃过程的股票价格则由 GARCH(1,1) 模型来生成,假设无风险年收益率始终为 5% ,第1周的波动率标准差为 25% ,之后每周的波动率方差 σ_t^2 则由上一周的收益率和方差 σ_{t-1}^2 共同确定,每日股票收益率就可以由服从正态分布的随机数模拟产生.

表5对模拟产生的股票收益率时间序列进行了描述性统计,可以看出股票收益率不服从正态分布,并具有左偏和尖峰胖尾的特征.图7给出了模拟得到的股票价格走势(假设股票初始价格为100元)、收益率统计直方图和波动率图.

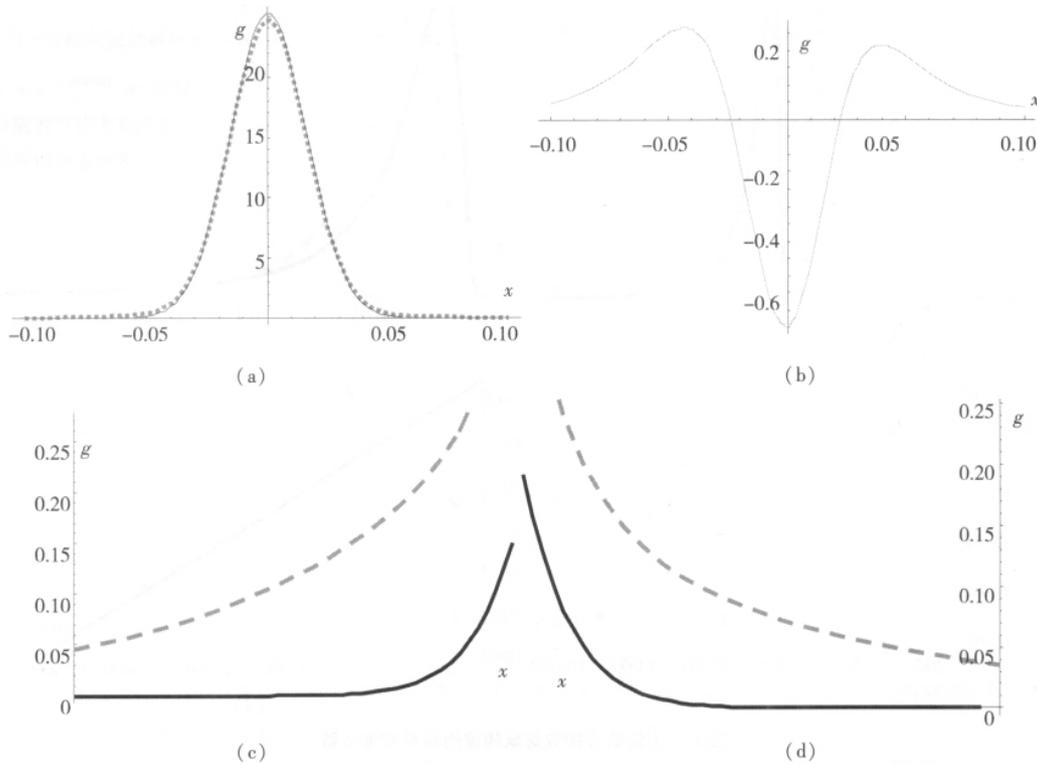


图6 股票日收益率的概率密度函数

Fig. 6 The probability density function of the stock daily yield

注:图中虚线代表股票收益率的概率密度函数 $g(x)$,实线代表具有相同均值与方差的正态分布概率密度函数. a) 同时描绘了股票收益率的概率密度函数和正态分布的图形; b) 修正函数 $m(x)$ 的图形,显示出对正态分布进行修正的幅度与方向; c) 显示出图形左尾的情形; d) 显示出图形右尾的情形,由此可以看到股票收益率所具有的胖尾特征.

表5 模拟股票收益率时间序列的描述性统计

Table 5 Simulated time series of stock returns Statistic description

均 值	- 0.000 895 916	中位数	0.000 150
标准差	0.019 627	方 差	0.003 852 05
最大值	0.095 310	最小值	- 0.086 250
偏 度	- 0.262 38	峰 度	10.800 3
Jarque-Bera 统计量	636.669 5	Jarque-Bera 概率	0.000 000

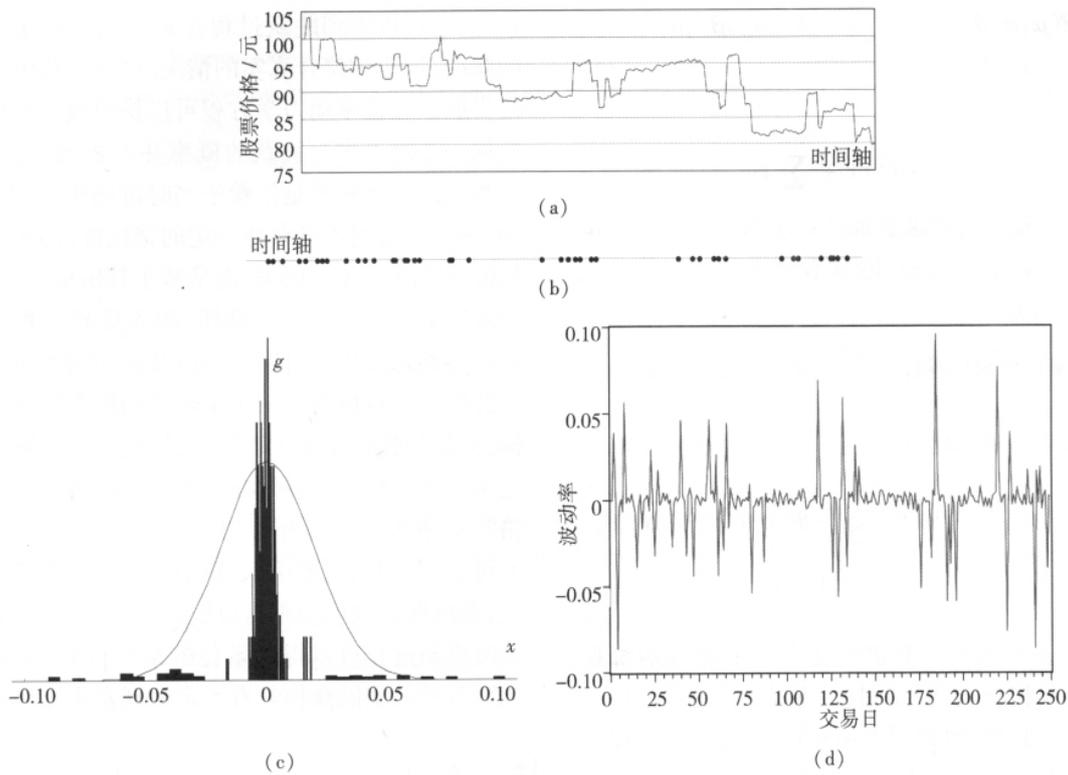


图 7 股票价格走势数值模拟

Fig. 7 Numerical simulation of stock price movements

注: a) 通过数值模拟得到的股票价格 250 个交易日的走势图; b) 在时间轴上描绘出模拟产生的在 250 个交易日中所发生的 42 次跳跃事件序列, 时间轴上每个圆点代表发生 1 次跳跃; c) 通过数值模拟得到的股票收益率统计直方图, 同时将其与正态分布进行比较, 可以发现模拟得到的股票收益率具有尖峰胖尾的特征; d) 通过数值模拟得到的 250 个交易日股票价格时间序列的波动图。

在数值模拟过程中, 本文实际使用的股票价格收益率并不满足式 (6), 而是满足

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t + \sigma(t) Z \sqrt{\Delta t} + B(Y - \sigma(t) Z \sqrt{\Delta t}) \quad (22)$$

这种处理方式与前文的实证过程相互一致, 并且在实际应用中更加简便, 不需要从股票价格跳跃幅度中剔除出波动率的影响。

当股票价格运动不考虑波动率的变化时, 即股票价格变化如下式所示

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW(t) + S d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (J_i - 1)\right) \quad (23)$$

通过进行 1 000 天 (4 个交易年) 股票收益率的数值模拟可以发现股票价格数列存在波动聚集性。在理论上, 由式 (6) 可以得到其方差为

$$\text{Var}\left(\frac{\Delta S(t)}{S(t)}\right) = \sigma^2 \Delta t + \theta(\sigma t) \text{Var}(Y) \quad (24)$$

可以看出, 第 t 期的波动率与第 $t + 1$ 期的波动率相关性与两次跳跃之间的等待时间分布密切相关 (见式 (19) 和 (20)), 即 $\text{Cov}\left(\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}, \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\right)$ 的计算受到 $\theta(\Delta t)$ 的影响, 波动聚集性的存在是状态依赖的。由此, 更新过程的引入可以带来状态依赖的波动聚集性。

以上研究表明, 本文所给出的幂律跳跃扩散模型可以同时得到股票价格收益率的尖峰胖尾特征和波动聚集性特征。

以上研究表明, 本文所给出的幂律跳跃扩散模型可以同时得到股票价格收益率的尖峰胖尾特征和波动聚集性特征。

4 幂律跳跃扩散模型的应用

在金融衍生品定价方面, 由于幂律跳跃扩散模型全面地反映了基础标的物价格运行特征, 因此, 该模型在无套利假设下可以更准确地为衍生品定价。

对于给定的概率 P ,定义

$$\Psi(\mu, \sigma, \theta, p, A_+, \alpha_+, \beta_+, A_-, \alpha_-, \beta_-; a, T) = P\{Z(T) > a\} \quad (25)$$

其中

$$Z(T) = \mu t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Y 的概率密度函数如式 (3) 所示, $N(t)$ 为本文所定义的更新过程. 欧式看涨期权的定价公式可以表示为

$$c(0) = S(0) \Psi\left(r + \frac{\sigma^2}{2} - \theta k, \sigma, \theta, p, A_+, \alpha_+, \beta_+, A_-, \alpha_-, \beta_-; \ln \frac{S(0)}{K}, T\right) - Ke^{-rT} \Psi\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \theta k, \sigma, \theta, p, A_+, \alpha_+, \beta_+, A_-, \alpha_-, \beta_-; \ln \frac{S(0)}{K}, T\right) \quad (26)$$

其中: S 为标的资产股票的价格; K 为欧式看涨期权执行价格; r 为无风险收益率; $k = E(e^Y - 1)$.

漂移幂律 (Shifted Power Law) 是介于幂律与指数函数之间的分布^[29]. 对于 $(1+x)^{-\alpha} e^{-\beta/x}$, 当 $\alpha \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$ 时, 带有幂律性的函数就会转化为典型的指数函数. 因此, 本文所定义的更新过程可以退化为 Poisson 过程, 跳跃幅度的幂律性分布也可以退化为指数分布, 由此本文所定义的模型可以退化到 Kou 所提出的指数跳跃扩散模型, 因此幂律跳跃扩散模型是指数跳跃扩散模型的更一般形式. 当股票价格跳跃幅度变得很小或更新过程的强度为 0 时, 本文所提出的幂律跳跃扩散模型则退化为 Black-Scholes 模型.

在风险管理方面, 更新过程的引入除了可以更加准确地描述股票价格的运动过程, 而且在实际应用中对金融风险的管理也是具有一定参考意义的. 如果将 Poisson 过程作为描述股票价格的跳跃过程, 实际上隐含着默认在任何一个时刻股票价格发生跳跃的概率都是相同的, 显然这与实际情况并不相符. 而本文所定义的更新过程则可以

模拟得到股票价格在较长时间不发生跳跃过程的情形, 也可以得到跳跃过程在短时间内密集发生的状况, 这更加符合真实的情况. 更新过程的引入使得股票收益率动力学方程可以描绘股票价格在任何一个时点发生跳跃的概率并不相同, 而这种不相同的概率赋予是依赖于当时市场所处的状态的——这表明市场存在一定的记忆性, 即今天市场的现状并非凭空而来, 而是基于其历史的, 而这与现实世界的情形更为贴切. 引入更新过程以后获得的跳跃发生的时间期望以及某一时间跳跃发生的概率可以成为运用于实际操作领域的指标, 而且该指标来源于市场本身, 获取和实际应用起来简便易行. 从实际操作角度来说, 基于股票价格收益率服从正态分布的 VaR 显得对极端事件无可奈何, 因而需要引入其他指标对 VaR 进行修正, 而跳跃扩散模型则可以较好地解决这个问题, 同时更新过程可以得到量化的结果, 因此对金融风险管理的实际操作具有一定的现实指导作用.

5 结束语

在全面研究股票价格运行的幂律特征的基础上, 本文对 Merton 跳跃扩散模型作了两方面的拓展, 提出了幂律跳跃扩散模型. 首先, 将计数过程由 Poisson 过程修正为带有幂律性质的更新过程, 可以描述股票价格运动过程中密集发生的跳跃, 同时也适用于较长时间内不出现跳跃的情形; 然后, 在考虑收益损失状态下跳跃幅度不同的同时, 也赋予跳跃幅度以幂律分布的特征. 通过实证研究发现, 幂律跳跃扩散模型可以更准确、更细致地描述股票价格的运动过程, 同时得到具有胖尾特征的收益率分布和波动聚集性, 为金融衍生资产定价奠定基础; 同时, 由于对股票价格运行更为合理细致的描述, 因此, 引入更新过程后也为金融风险管理提供了跳跃发生的时间期望以及某一时间跳跃发生的概率这两个来源于市场本身的可操作的指标.

参 考 文 献:

[1] Bachelier L. Théorie de la Spéculation [D]. Paris: Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1900: 21 - 86.
 [2] Fama E F. Efficient capital markets: A review of the theory and empirical work [J]. Journal of Finance, 1971, 25(2): 383 - 417.

- [3] Black F, M Scholes. The pricing of options and corporate liabilities [J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637 – 654.
- [4] Osborne M F M. Brownian motion in the stock market [J]. *Operations research*, 1959, 7(2): 145 – 173.
- [5] Engle R F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation [J]. *Econometrica*, 1982, 50(4): 987 – 1008.
- [6] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31(3): 307 – 327.
- [7] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes [J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1–2): 145 – 166.
- [8] Hull J C, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J]. *Journal of Financial Studies*, 1987, 4(4): 727 – 757.
- [9] Heston S L. A closed form solution for option with stochastic volatility with application to bond and currencies [J]. *Review of Financial Studies*, 1993, 6(3): 327 – 343.
- [10] Peters E E. *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1994.
- [11] Rogers L C G. Arbitrage from fractional brownian motion [J]. *Mathematical Finance*, 1997, 7(1): 95 – 105.
- [12] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1–2): 125 – 144.
- [13] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing [J]. *Management Science*, 2002, 48(8): 1086 – 1101.
- [14] Bates D. Jumps and stochastic volatility: Exchange rates processes implicit in deutsche mark options [J]. *Review of Financial Studies*, 1996, 9(1): 69 – 107.
- [15] Scott L O. Pricing stock option in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: Application of fourier inversion methods [J]. *Mathematical Finance*, 1997, 7(4): 413 – 423.
- [16] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and option pricing for affine jump-diffusions [J]. *Econometrica*, 2000, 68(6): 1343 – 1376.
- [17] Bakshi G, Cao C, Chen Z W. Pricing and hedging long-term options [J]. *Journal of Econometrics*, 2000, 94(3): 277 – 318.
- [18] Barndorf-Nielsen. Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size [C]. *Proceedings of the Royal Society London*, 1977, A(353): 401 – 419.
- [19] Eberlein E, Keller U. Hyperbolic distributions in finance [J]. *Bernoulli*, 1995, 1(3): 281 – 299.
- [20] Blattberg R C, Gonedes N J. A comparison of the stable and student distribution as statistical models for stock prices [J]. *Journal of Business*, 1974, 47(2): 244 – 280.
- [21] Bibby B M, Sørensen M. A hyperbolic diffusion model for stock price [J]. *Finance and Stochastics*, 1997, 1(1): 25 – 41.
- [22] 叶中行, 姚奕, 陈珊敏, 等. 股票价格和收益变化中的幂律 [J]. *系统仿真学报*, 2002, 14(10): 1395 – 1399.
Ye Zhong-xing, Yao Yi, Chen Shan-min, et al. Power law for stock return [J]. *Journal of System Simulation*, 2002, 14(10): 1395 – 1399. (in Chinese)
- [23] 陈收, 杨宏林, 李双飞. 中国股票市场幂率特征和临界现象 [J]. *中国管理科学*, 2008, 16(6): 8 – 15.
Chen Shou, Yang Hong-lin, Li Shuang-fei. Multiscale power-law properties and criticality of Chinese stock market [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2008, 16(6): 8 – 15. (in Chinese)
- [24] Barabási A L. The origin of bursts and heavy tails in human dynamics [J]. *Nature*, 2005, 435(7039): 207 – 211.
- [25] Vázquez A, Oliveira J G, Dezsö Z, et al. Modeling bursts and heavy tails in human dynamics [J]. *Physical Review*, 2006, 73(3): 036127.

Stock pricing model: Jump diffusion model of power law

CAO Hong-duo, LI Ying, HE Zhi

Business School of Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: Based on the Merton's jump diffusion model, two amendments are carried out. Firstly, the counting process (Poisson process) will be amended by the renewal process with power-law nature. Secondly, the magnitude of the jump has also been given the characteristics of power-law nature. By empirical research, it is found that the model could accurately describe the process of the stock price movement, and get a yield with fat-tailed distribution and volatility clustering. As a basis, the model can be used to more accurately price financial derivatives products such as options, and also provide effective tools in financial risk management.

Key words: dynamics of human behavior; jump diffusion model; renewal process; power-law distribution

附录:

公式 5 的推导: 根据跳跃扩散模型, 有

$$\frac{\Delta s(t)}{s(t)} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{s(t)} = \frac{s(t + \Delta t)}{s(t)} - 1$$

其中

$$\begin{aligned} s(t + \Delta t) &= s(0) \left\{ \int_0^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^{t+\Delta t} \sigma(s) dw(s) \right\} \prod_{i=1}^{N(t+\Delta t)} J_i = \\ &= s(0) \exp \left\{ \int_0^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^{t+\Delta t} \sigma(s) dw(s) \right\} \exp \left\{ \ln \prod_{i=1}^{N(t+\Delta t)} J_i \right\} \quad (Y = \ln J) = \\ &= s(0) \exp \left\{ \int_0^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^{t+\Delta t} \sigma(s) dw(s) + \sum_{i=1}^{N(t+\Delta t)} y_i \right\} \end{aligned}$$

同理

$$s(t) = s(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dw(s) + \sum_{i=1}^{N(t)} y_i \right\}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{s(t + \Delta t)}{s(t)} - 1 &= \frac{s(0) \exp \left\{ \int_0^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^{t+\Delta t} \sigma(s) dw(s) + \sum_{i=1}^{N(t+\Delta t)} Y_i \right\}}{s(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dw(s) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right\}} - 1 \\ &= \exp \left\{ \left[\int_0^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds - \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[\int_0^{t+\Delta t} \sigma(s) dw(s) - \int_0^t \sigma(s) dw(s) \right] + \left[\sum_{i=1}^{N(t+\Delta t)} Y_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right] \right\} - 1 \\ &= \exp \left\{ \int_0^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(s) dw(s) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} Y_i \right\} - 1 \end{aligned}$$

公式 6 的推导: 假设风险资产收益和风险资产波动率为常数, 即 μ, σ 为常数, 利用 e^x 的 Maclaurin 展开, 并略去 t 的高阶无穷小, 由式 (5) 有

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S(t)}{S(t)} &= \exp \left\{ \int_t^{t+\Delta t} \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(s) dw(s) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} Y_i \right\} - 1 \\ &= 1 + \left(\int_t^{t+\Delta t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma dw(s) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} Y_i \right) + \frac{1}{2} \left(\int_t^{t+\Delta t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma dw(s) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} Y_i \right)^2 + \dots - 1 \\ &\approx \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} + BY \end{aligned}$$

其中 B 的取值为 0 或 1, 其概率分别为 $1 - \theta(\Delta t)$ 和 $\theta(\Delta t)$, 即均为关于 Δt 的函数 $Z \sim N(0, 1)$.

注: 此时

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = 1 + \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} + BY \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 Z^2 \Delta t + \dots - 1$$

其中 $Z \sim N(0, 1)$, 而 Z^2 均值为 1 (由 $E(Z^2) = (E(Z))^2 + D(Z) = 1$ 而得), 故可与前面的 $-\sigma^2 \Delta t / 2$ 项抵消, 从而得到公式 6 的近似结果.

对于 $\sum_{i=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} Y_i$ 从 $N(t)$ 到 $N(t + \Delta t)$ 时间间隔为 Δt ,而对于从 $N(t) + 1$ 到 $N(t + \Delta t)$ 的直观理解即是事件发生或事件不发生 其各自的概率是关于 Δt 的函数.

公式 7 的推导:由式(6)

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \approx \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} + BY$$

其中: Z 为服从标准正态分布的随机数; B 为服从伯努利分布的随机数; Y 的概率密度函数由式(3) 定义.

由卷积公式知:若 X, Y 独立, f_X, f_Y 为 X, Y 的边缘概率密度函数, 则 $Z = aX + bY + c$ 的概率密度函数为

$$f_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} f_X(x) f_Y\left(\frac{z - ax - c}{b}\right) dx \text{ 或 } f_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} f_Y(y) f_X\left(\frac{z - by - c}{a}\right) dy$$

B 为服从伯努利分布的随机数, 有 $P\{B = 1\} = \theta(\Delta t)$ $P\{B = 0\} = 1 - \theta(\Delta t)$

1) $B = 0$ 时, 有

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \approx \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t}$$

其概率是 $1 - \theta(\Delta t)$. 令 $\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = K$ 则

$$K = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z$$

$$F(K \leq k) = F(\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \leq k) = F\left(Z \leq \frac{k - \mu \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}}\right)$$

$$f(k) = F'(k) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - \mu \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}}\right)^2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}$$

2) $B = 1$ 时, 此时

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = Y + \sigma \sqrt{\Delta t} Z + \mu \Delta t$$

其概率为 $\theta(\Delta t)$. 令 $\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = K$ 则 $K = Y + \sigma \sqrt{\Delta t} Z + \mu \Delta t$, Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = pA_+ y^{-\alpha} + e^{-\beta/y} 1_{(y \geq 0)} + qA_- (-y)^{-\alpha} e^{\beta/y} 1_{(y < 0)}$$

由卷积公式得出

$$\begin{aligned} f_k(k) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} pA_+ y^{-\alpha} e^{-\frac{\beta}{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - y - \mu \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}}\right)^2} dy + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} qA_- (-y)^{-\alpha} e^{\frac{\beta}{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - y - \mu \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}}\right)^2} dy \\ &= pA_+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(k - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} - \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} y^{-\alpha} dy + qA_- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(k - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} + \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} (-y)^{-\alpha} dy \end{aligned}$$

将上述结果进行整理, 令 $\frac{\Delta S(t)}{S(t)}$ 概率密度函数为 $g(x)$ 则

$$g(x) = \frac{1 - \theta(\Delta t)}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{e^{-\frac{(x - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}}{\sqrt{2\pi}} + \theta(\Delta t) \left\{ pA_+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} - \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} y^{-\alpha} dy + qA_- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} + \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} (-y)^{-\alpha} dy \right\}$$

公式 8 的推导:

$$\begin{aligned} m(x) &= g(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{\Delta t}} e^{-\frac{(x - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}} \\ &= \theta(\Delta t) \left\{ pA_+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} - \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} y^{-\alpha} dy + qA_- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} + \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} (-y)^{-\alpha} dy \right\} + \\ &\quad \frac{1 - \theta(\Delta t)}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{e^{-\frac{(x - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}} \\ &= \theta(\Delta t) \left\{ pA_+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} - \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} y^{-\alpha} dy + qA_- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} + \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} (-y)^{-\alpha} dy \right\} - \frac{\theta(\Delta t)}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \frac{e^{-\frac{(x - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \theta(\Delta t) \left\{ pA_+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} - \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} y^{-\alpha} dy + qA_- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x - y - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t} + \frac{\beta}{y}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} (-y)^{-\alpha} dy - \frac{e^{-\frac{(x - \mu \Delta t)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}}{\sigma \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} \right\} \end{aligned}$$