面向批量订货和多需求类的生产与库存配给①

叶涛锋[1,2]，达庆利[2]
(1. 江苏科技大学经济管理学院，镇江 212003; 2. 东南大学经济管理学院，南京 211189)

摘要: 针对一个面向两个需求类的生产企业，根据客户每次订货是否可分批交货，提出了当客户订货可分割和不可分割时供应商的最优生产和库存配给策略. 分析表明，供应商的最优生产控制策略可用一个取决于系统状态的基准库存水平表示，最优的库存配给策略则用一个多层的取决于状态的配给水平向量表示. 随后，该结论被推广至包含任意多个需求类的生产系统. 数值分析验证了文中最优策略的有效性.

关键词: 面向库存的生产系统; 积欠订货; 销售损失; 生产控制与库存配给

中图分类号: N945.12　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1007-9807(2012)01-0033-10

0 引 言

库存配给(inventory rationing)策略是指当某个库存量或产能受限的企业服务于多个客户时，每个客户的订货会使企业发生不同的成本或是对于企业而言具有不同价值，企业如何在这些客户之间分配有限的库存. 当客户的订货不能立刻得到满足时，企业会发生相应的积欠订货(back-order)成本和(或)销售损失(lost sales)成本. 在应用库存配给策略的过程中，企业需要根据每个客户的积欠订货成本和销售损失成本将其划分成若干个需求类，处于同一需求类的所有客户有相同或相近的积欠订货成本和销售损失成本. 此外，部分学者[1-3]在研究企业库存配给策略时，是按照顾客愿意支付的价格对其进行分类. 本文中考虑的是前一种情形.

库存配给在企业的实践中是一个常见的问题，具体的事例可参见文献[4]. 文献[5]于1965年首次提出并研究这一问题. 文献[4,6]对相关的研究成果进行了综述. 文献中一部分[5-8]研究纯粹的库存配给问题，假设企业的补货时间忽略不计，且补货量不受限制. 显然，这些假设并不适用于很多制造型企业. 文献[9]首次将生产控制和库存配给问题联系起来加以考虑. 文献[10]研究了一个面向两个需求类的系统中，所有不能立刻得到满足的需求均视为积欠订货时，企业最优的生产与库存配给策略. 文献[11]在文献[10]的基础上，将研究延伸至多需求类系统. 文献[12]分析了有效的生产控制和库存配给策略对企业利润的影响和作用. 文献[13]研究了由两种组件、三类顾客需求组成的按单装配系统的组件生产控制与库存分配问题，分析了生产与库存联合最优控制策略的结构性质. 文献[9-13]均假设每个客户单件订货. 对于批量订货的情形，文献[14]研究了两种类型的系统: 一个是面向多需求类的考虑销售损失的制造系统，另一个是面向两个需求类的考虑积欠订货的制造系统. 由于当未满足的需求被作为积欠订货处理时，企业的可用库存和积欠订货会出现同时为正的情况，在建模和分析过程中需要考虑更多的状态. 因此，上述关于积欠订货模型的研究主要考虑两个需求类的情况. 文献[15]在文献[14]的基础上，研究了当多类顾

① 收稿日期: 2009-03-20; 修订日期: 2011-09-19.
基金项目: 国家自然科学青年基金资助项目(70801033); 国家自然科学基金资助项目(70772059); 教育部人文社会科学青年基金资助项目(08JC630031).
作者简介: 叶涛锋(1978—)，男，江苏靖江人，博士生，讲师，Email: yetf@seu.edu.cn

客以批量形式订货，且未能得到立刻满足的顾客需求全部被企业当作积欠订货处理时，企业最优的生产与库存配给策略. 以上文献中建模的一个前提是当企业的库存不足时，到达的订货作为积欠订货或是拒绝掉而成为销售损失. 这个前提条件在大部分情形下和实际不相符合，因为前者意味着客户有无限的耐心进行等待，而后者则意味着客户毫无耐心. 为真实反映这一问题，文献[16]首次同时考虑积欠订货和销售损失，研究了将所有以单件订货的客户分为两个需求类时企业的最优生产和库存配给策略. 此外，文献[17]研究了包含多台串行服务器的生产系统中生产与库存配给策略.

本文在文献[16]的基础上，研究企业面向多个需求类时的生产控制和库存配给策略，处于不同需求类的企业均以批量形式订货. 企业以面向库存的方式组织生产，对于所有未能立刻得到满足的订货，一部分作为积欠订货，剩余部分则作为销售损失. 另外，当客户以批量形式订货时，客户可能会接受供应商分批进行交货，即对于供应商来讲，客户的订货是可分割的(order split) . 但是，当这种分批交货使得客户产生额外的成本时，客户可能不会接受分批交货，即订货不可分割. 本文针对这两种情形，分别研究供应商的最优生产控制与库存配给策略. 数值分析的结果验证了文中最优策略的有效性，同时说明了客户订货批量的大小对供应商最优成本的影响.

1 模型框架

考虑一个生产单一种类产品的制造型企业，企业根据每个客户的积欠订货成本和销售损失成本将客户划分成 n 个需求类. 同一时间内企业只能对一个产品进行加工，单位产品的生产时间服从均值为 $1/\mu$ 的指数分布. 每个产成品的单位时间库存成本用 h 表示. 类 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 需求的到达服从速率为 λ_i 的 Poisson 过程. 文中关于产出率和需求到达率的假设和大多数关于生产 — 库存系统的文献[11-16] 一致. 在以上假设条件下，系统可看作是无记忆性的，决策点可限制在系统状态发生变化的时刻. 为便于分析，文中不考虑生产准备成本.

需求类 i 的订货量为 d_i. 在任意时刻点，对于到达的需求类 i 的订货，企业可以选择: 部分或全部由可用库存即刻满足; 部分或全部作为积欠订货; 以及部分或全部作为销售损失. 下文中，“满足”表示企业用库存即刻满足订货，“接受”则表示“满足”或积欠订货. 对于积欠订货部分，企业发生积欠订货成本. 对于拒绝掉的订货，企业发生销售损失成本. 用 b_i 和 c_i 分别表示对应于需求类 i 的单位时间单位积欠订货成本和单位销售损失成本. 不失一般性，假设 $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ 和 $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$.

在任意时刻点，企业还需做出是否生产以及产成品如何分配的决策，即选择: 不生产; 生产以及产成品用于增加可用库存; 或生产并将产成品用于减少现有的积欠订货. 令 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 表示时刻 t 系统的可用库存量和积欠订货量，$x_1 \in \ $，$x_k \in {}^{+}$，$1 < k \leqslant n$. $x_1^+(t)$ 表示时刻 t 的可用库存量，$x_1^-(t)$ 表示时刻 t 需求类 1 的积欠订货量，$x_k(t)$ 表示时刻 t 需求类 $k(1 < k \leqslant n)$ 的积欠订货量. $S_n = \ \times(\ ^{+})^{n-1}$ 表示问题的状态空间，$x(t) \in S_n$.

定义策略 $\boldsymbol{\pi}$，其规定任意时刻点上给定 $x(t)$ 时应采取的行动. 令 $a^{\pi}(x) = (a_0^{\pi}(x), a_1^{\pi}(x), \cdots, a_n^{\pi}(x))$ 表示与 $\boldsymbol{\pi}$ 对应的控制行动. $a_0^{\pi}(x)$ 为状态 (x) 下的生产控制，$a_1^{\pi}(x)$ 表示当需求类 1 的订货到达时采取的控制行动，$a_k^{\pi}(x)$ 则表示需求类 k 的订货到达时应采取的行动. 给定控制策略 $\boldsymbol{\pi}$ 和初始状态 (x)，用 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 表示折扣因子，$N_i(t)$ 表示至时刻 t 需求类 i 被拒绝的订货量，则企业的长期期望总成本 $v^{\pi}(x)$ 为

$$v^{\pi}(x) = E_x^{\pi}\left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(hx_1^+ + b_1x_1^- + \sum_{k=2}^{n} b_k x_k\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}c_i\mathrm{d}N_i(t)\right] \tag{1}$$

由文献[18]，令 $\alpha + \mu + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$. $v^{\pi}(\boldsymbol{x})$ 的最优值 $v^*(\boldsymbol{x})$ 满足如下优化方程

$$v^*(x) = hx_1^+ + b_1x_1^- + \sum_{k=2}^{n} b_k x_k + \mu T_0 v^*(x) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i T_i v^*(x) \tag{2}$$

其中，e_i 表示 n 维空间上第 i 维单位向量

$$T_0 v(x) =$$

$$\begin{cases} \min\{v(x), v(x+e_1), v(x-e_k)\}, \ \exists x_k > 0, \\ \qquad 1 < k \leqslant n \\ \min\{v(x), v(x+e_1)\}, x_k = 0, \ \forall k, 1 < k \leqslant n \end{cases}$$

$$T_1 v(x) = \min_{0 \leqslant q_1 \leqslant d_1} \{v(x - q_1 e_1) + (d_1 - q_1) c_1\}$$

$$T_k v(x) =$$

$$\begin{cases} \min\limits_{\substack{0 \leqslant q_k^1 \leqslant \min\{x_1, d_k\} \\ 0 \leqslant q_k^2 \leqslant d_k - q_k^1 \\ 0 \leqslant q_k^1 + q_k^2 \leqslant d_k}} \{v(x - q_k^1 e_1 + q_k^2 e_k) + \\ \qquad (d_k - q_k^1 - q_k^2) c_k\}, x_1 > 0 \\ \min\limits_{0 \leqslant q_k \leqslant d_k} \{v(x + q_k e_k) + (d_k - q_k) c_k\}, \ x_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

2　两需求类系统的最优策略

本节首先分析订货不可分割情形下企业的最优生产控制和库存配给策略. 由文献[19－21]可知，在能力受限的系统中，当订货不可分割时，如果每个需求类的订货量不相等，则最优的控制策略不具备任何的单调性特征，在实际应用中很不方便. 因此，在本节第一部分，仅讨论每个需求类的订货量相等时的最优策略. 当订货可分割时，则放松这一条件. 本节中状态向量和状态空间变成了 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ 和 $S_2 = \quad \times \quad ^{+}$.

2.1　订货不可分割时的最优策略

对于一个量为 d 的需求类 $j(j = 1, 2)$ 的订货，其可能会全部被满足，全部被作为积欠订货或是全部被拒绝. 相应地，式(1)可改写为

$$\bar{v}^{\pi}(x) = E_x^{\pi}\Big[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h x_1^+ + b_1 x_1^- + b_2 x_2)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} c_j \mathrm{d}N_j(t)\Big] \tag{3}$$

对应的优化方程为

$$\bar{v}^*(x) = h x_1^+ + b_1 x_1^- + b_2 x_2 + \mu \bar{T}_0 \bar{v}^*(x) + \lambda_1 \bar{T}_1 \bar{v}^*(x) + \lambda_2 \bar{T}_2 \bar{v}^*(x) \tag{4}$$

其中

$$\bar{T}_0 \bar{v}(x) =$$

$$\begin{cases} \min\{\bar{v}(x), \bar{v}(x+e_1), \bar{v}(x-e_2)\}, x_2 > 0 \\ \min\{\bar{v}(x), \bar{v}(x+e_1)\}, x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{T}_1 \bar{v}(x) = \min\{\bar{v}(x - de_1), \bar{v}(x) + dc_1\}$$

$$\bar{T}_2 \bar{v}(x) =$$

$$\begin{cases} \min\{\bar{v}(x-de_1), \bar{v}(x+de_2), \bar{v}(x) + dc_2\}, x_1 \geqslant d \\ \min\{\bar{v}(x+de_2), \bar{v}(x) + dc_2\}, x_1 < d \end{cases}$$

首先引入以下几个函数 v 的算子：$\Delta_j v(x) = v(x+e_i) - v(x)$，$\Delta_{12} v(x) = v(x+e_1) - v(x-e_2)$，$\Delta_{1+2} v(x) = v(x+e_1+e_2) - v(x)$，$\Delta_1 \Delta_2 v(x) = \Delta_1 v(x+e_2) - \Delta_1 v(x)$. 令 V 表示定义在 S_2 上的函数集，其具备如下的性质. 各性质的解释可参考文献[10,16].

定义 1　如果有 $v \in V$，则有 1) 当 $x_1 < 0$ 时，$\Delta_1 v(x) \leqslant 0$；当 $x_2 > 0$ 时，$\Delta_1 v(x) - \Delta_{12} v(x) \leqslant 0$；2) 当 $x_1 < 0$ 且 $x_2 > 0$ 时，$\Delta_{12} v(x) \leqslant 0$；3) $\Delta_j \Delta_j v(x) \geqslant 0$；4) $\Delta_1 \Delta_2 v(x) \leqslant 0$；5) $\Delta_1 \Delta_{12} v(x) \geqslant 0$；6) $\Delta_{1+2} v(x) - \Delta_{12} v(x) \geqslant 0$；7) $\Delta_1 v(x) \geqslant -c_1$.

命题 1　如果 $\bar{v} \in V$，则有 $\bar{T}\bar{v} \in V$ 和 $\bar{v}^* \in V$，$\bar{T}\bar{v} = h x_1^+ + b_1 x_1^- + b_2 x_2 + \mu \bar{T}_0 \bar{v}(x) + \lambda_1 \bar{T}_1 \bar{v}(x) + \lambda_2 \bar{T}_2 \bar{v}(x)$.

证明　由于本命题的证明过程较为冗长，此处略去②.

在定义 1 和命题 1 的基础上，可得到如下的结论.

定理 1　对于两需求类系统，如果订货不可分割且每个需求类的订货量相等，则存在一个取决于状态的最优生产基准库存水平 $\bar{s}^*(x_2)$ 和对应于每个需求类且取决于系统状态的最优库存配给水平 $\bar{r}_j^*(x_2)$. 最优策略具有如下性质：

1) 当 $x_2 > 0$ 且 $0 \leqslant x_1 < \bar{s}^*(x_2)$，或 $x_2 = 0$ 且 $0 \leqslant x_1 < \bar{s}^*(0)$ 时，生产以增加可用库存

$$\bar{s}^*(x_2) =$$

$$\begin{cases} \min\{x_1 \mid \bar{v}^*(x+e_1) - \bar{v}^*(x-e_2) > 0\}, x_2 > 0 \\ \min\{x_1 \mid \bar{v}^*(x+e_1) - \bar{v}^*(x) > 0\}, x_2 = 0 \end{cases}$$

2) 当 $x_1 < 0$ 时，生产以减少需求类 1 的积欠订货；

3) 当 $x_2 > 0$ 且 $x_1 \geqslant \bar{s}^*(x_2)$ 时，生产以减少需求类 2 的积欠订货；

4) 当 $x_2 = 0$ 且 $x_1 \geqslant \bar{s}^*(0)$ 时，停止生产；

5) 对于需求类 1 的订货：当 $x_1 \geqslant d$ 时，由可用

② 此命题的证明过程可参考文献[9－11,16].

库存即刻满足; 当 $\bar{r}_1^*(x_2) < x_1 < d$ 时,全部作为积欠订货; 当 $x_1 \leqslant \bar{r}_1^*(x_2)$,全部拒绝,$\bar{r}_1^*(x_2) = \min\{x_1 \mid \bar{v}^*(x) - \bar{v}^*(x - de_1) \geqslant - dc_1\}$;

6) 对于需求类2的订货: 当 $x_1 \geqslant \bar{s}^*(x_2 + d)$ 时,由可用库存即刻满足; 当 $\bar{r}_2^*(x_2) < x_1 \leqslant \bar{s}^*(x_2+d)$ 时,全部作为积欠订货; 当 $x_1 \leqslant \bar{r}_2^*(x_2)$ 时,全部拒绝,

$$\bar{r}_2^*(x_2) = \begin{cases} \min\{x_1 \mid \bar{v}^*(x) - \min\{\bar{v}^*(x - de_1), \\ \qquad \bar{v}^*(x + de_2)\} \geqslant - dc_2\}, x_1 > 0 \\ \min\{x_1 \mid \bar{v}^*(x) - \bar{v}^*(x + de_2) \geqslant -dc_2\}, x_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

证明 性质P1－P4的证明和文献[16]中相同. 性质(5) 中第一部分是由于需求类1有最高的积欠订货成本和销售损失成本,因此,系统中只要有足够的可用库存,就应即刻满足其需求. 后面两个部分则根据 $\bar{v}$ 对 x_1 的凸性以及 $\bar{r}_1(x_2)$ 和订货分割的定义得到. 由 $\bar{r}_1(x_2)$ 的定义, 如果 $x_1 > \bar{r}_1^*(x_2)$,则有 $\bar{v}^*(x - de_1) + dc_1 \geqslant \bar{v}^*(x - de_1 - e_1)$,这意味着在接受了当前的 d 个需求类1的订货之后,至少还能接受一个单位来自于该类的订货. 因此,当 $x_1 > \bar{r}_1^*(x_2)$ 时,接受需求类1的订货是最优的. 同样,当 $x_1 \leqslant \bar{r}_1^*(x_2)$,拒绝需求类1的订货时最优的. 性质(6) 可根据 $\bar{v}$ 对 x_2 的凸性得到,但和P5中不一样. 给定状态 x,当且仅当 $\bar{v}(x - de_1) \leqslant \bar{v}(x + de_2)$ 时,需求类2的订货才会被即刻满足. 由 $\bar{s}^*(x_2)$ 的定义可得 $x_1 \geqslant \bar{s}^*(x_2 + d)$. 其余部分同(5).

定理1中,前四个性质定义了最优的生产控制策略,剩余的为最优库存配给策略. 最优生产控制策略和文献[16]相同. 令 $d = 1$,则能得到和[11]类似的库存配给策略. 此外,根据[16]中的定理2,可以推断上述最优策略在长期平均成本的优化标准下同样是有效的.

2.2 订货可分割时的最优策略

当各个需求类的订货可分割时,任意时刻需求类 j 的订货可以是部分或全部被满足,部分或全部被作为积欠订货,或部分或全部被拒绝掉. 此时可以有 $d_1 \neq d_2$. 相应地期望成本和最优值函数需满足的优化方程可表示为

$$\tilde{v}^{\pi}(x) = E_x^{\pi}\Big[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}(hx_1^+ + b_1x_1^- + b_2x_2)\,dt + \sum_{j=1}^{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}c_j dN_j(t)\Big] \quad (5)$$

$$\tilde{v}^*(x) = hx_1^+ + b_1x_1^- + b_2x_2 + \mu\tilde{T}_0\tilde{v}^*(x) + \lambda_1\tilde{T}_1\tilde{v}^*(x) + \lambda_2\tilde{T}_2\tilde{v}^*(x) \quad (6)$$

$$\tilde{T}_0\tilde{v}(x) = \begin{cases} \min\{\tilde{v}(x), \tilde{v}(x + e_1), \tilde{v}(x - e_2)\}, x_2 > 0 \\ \min\{\tilde{v}(x), \tilde{v}(x + e_1)\}, x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{T}_1\tilde{v}(x) = \min_{0\leqslant q_1\leqslant d_1}\{\tilde{v}(x - q_1e_1) + (d_1 - q_1)c_1\}$$

$$\tilde{T}_2\tilde{v}(x) = \begin{cases} \min\limits_{\substack{0\leqslant q_2^1\leqslant \min\{x_1,d_2\} \\ 0\leqslant q_2^2\leqslant d_2-q_2^1 \\ 0\leqslant q_2^1+q_2^2\leqslant d_2}}\{\tilde{v}(x-q_2^1e_1+q_2^2e_2)+(d_2-q_2^1-q_2^2)c_2\}, \\ \qquad x_1 > 0 \\ \min\limits_{0\leqslant q_2\leqslant d_2}\{\tilde{v}(x + q_2e_2) + (d_2 - q_2)c_2\},\ x_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

命题2 如果 $\tilde{v} \in V$,则有

$$1)\ \tilde{q}_1^*(x,d_1) = \begin{cases} 0, \Delta_1\tilde{v}(x) < -c_1 \\ \max\{\tilde{q}_1 \mid \Delta_1\tilde{v}(x-\tilde{q}_1e_1) \geqslant - c_1, \\ \qquad 0\leqslant\tilde{q}_1\leqslant d_1\}, \Delta_1\tilde{v}(x) \geqslant -c_1 \end{cases}$$

$$2)\ \tilde{q}_2^{1*}(x,d_2) = \begin{cases} 0, \Delta_1\tilde{v}(x) < - c_2 \\ \max\{\tilde{q}_2^1 \mid \Delta_1\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^1e_1) \geqslant -c_2, 0\leqslant \\ \qquad \tilde{q}_2^1\leqslant\min\{x_1,d_1\}\}, \Delta_1\tilde{v}(x) \geqslant - c_2 \end{cases}$$

$$\tilde{q}_2^{2*}(x,d_2,\tilde{q}_2^{1*}) = \begin{cases} 1, \Delta_2\tilde{v}(x - \tilde{q}_2^{1*}e_1) > c_2 \\ \max\{\tilde{q}_2^2 \mid \Delta_2\tilde{v}(x - \tilde{q}_2^{1*}e_1 + (\tilde{q}_2^2 - 1)e_2) \leqslant \\ \qquad c_2, 0\leqslant\tilde{q}_2^2\leqslant d_2-\tilde{q}_2^{1*}\}, \Delta_2\tilde{v}(x - \tilde{q}_2^{1*}e_1) \leqslant c_2 \end{cases}$$

$$3)\ \tilde{q}_2^*(x,d_2) = \begin{cases} 1, \Delta_2\tilde{v}(x) > c_2 \\ \max\{\tilde{q}_2 \mid \Delta_2\tilde{v}(x+(\tilde{q}_2 - 1)e_2) \leqslant c_2, \\ \qquad 0\leqslant\tilde{q}_2\leqslant d_2\}, \Delta_2\tilde{v}(x) \leqslant c_2 \end{cases}$$

$$4)\ \tilde{q}_1^*(x + e_1,d_1) = \begin{cases} \tilde{q}_1^*(x,d_1) = 0, \Delta_1\tilde{v}(x + e_1) < - c_1 \\ \tilde{q}_1^*(x,d_1) = d_1, \Delta_1\tilde{v}(x - (d_1 - 1)e_1) \geqslant - c_1; \\ \tilde{q}_1^*(x,d_1) + 1, \text{其它} \end{cases}$$

$$5)\ \tilde{q}_1^*(x-e_2,d_1)=\begin{cases}\tilde{q}_1^*(x,d_1),\Delta_1\tilde{v}(x-e_2)<-c_1\text{ 或 }\\ \Delta_1\tilde{v}(x-d_1e_1-e_2)\geqslant -c_1\\ \tilde{q}_1^*(x,d_1)+1,\text{其它}\end{cases}$$

6) $\tilde{q}_2^{1*}(x+e_2,d_2)$ 等于 $\tilde{q}_2^{1*}(x,d_2)$ 或 $\tilde{q}_2^{1*}(x,d_2)+1$, $\tilde{q}_2^{2*}(x+e_2,d_2,\tilde{q}_2^{1*}(x+e_2,d_2))$ 等于 $\tilde{q}_2^{2*}(x,d_2,\tilde{q}_2^{1*})$ 或 $\tilde{q}_2^{2*}(x,d_2,\tilde{q}_2^{1*})+1$, $\tilde{q}_2^*(x+e_2,d_2)$ 等于 $\tilde{q}_2^*(x,d_2)$ 或 $\tilde{q}_2^*(x,d_2)+1$.

证明

1) $\tilde{T}_1\tilde{v}(x)=\tilde{v}(x)+d_1c_1-\max\left\{\sum_{\gamma=1}^{q_1}(\Delta_1\tilde{v}(x-\gamma e_1)+c_1)\right\}$, $\arg\min_{0\leqslant q_1\leqslant d_1}\tilde{T}_1\tilde{v}(x)=\arg\min_{0\leqslant q_1\leqslant d_1}\sum_{\gamma=1}^{q_1}(\Delta_1\tilde{v}(x-\gamma e_1)+c_1)$. 由定义1中的3), 如果 $\Delta_1\tilde{v}(x)<-c_1$, 则有 $\Delta_1\tilde{v}(x-\gamma e_1)\leqslant\Delta_1\tilde{v}(x)<-c_1$ 对于所有 γ 都成立. 因此, 有 $\arg\min_{0\leqslant q_1\leqslant d_1}\sum_{\gamma=1}^{q_1}(\Delta_1\tilde{v}(x-\gamma e_1)+c_1)=0$. 如果 $\Delta_1\tilde{v}(x)\geqslant -c_1$, 由于 $\Delta_1\tilde{v}(x-\gamma e_1)$ 是 γ 的非增函数, 必然存在一个 $\tilde{q}_1^*(=\tilde{q}_1^*(x,d_1))$ 使得 $\Delta_1\tilde{v}(x-\tilde{q}_1^*e_1)\geqslant -c_1$ 和 $\Delta_1\tilde{v}(x-(\tilde{q}_1^*+1)e_1)<-c_1$ 成立.

2) 如果 $x_1>0$, 则 $\tilde{T}_2\tilde{v}(x)$ 可写成 $\tilde{T}_2\tilde{v}(x)=\min_{\substack{0\leqslant q_2^1\leqslant\min\{x_1,d_2\}\\ 0\leqslant q_2^2\leqslant d_2-q_2^1\\ 0\leqslant q_2^1+q_2^2\leqslant d_2}}\{\tilde{v}(x-q_2^1e_1+q_2^2e_2)+(d_2-q_2^1-q_2^2)c_2\}=\tilde{v}(x)+d_2c_2+\min\left\{0,\max\left\{0,\sum_{\xi=1}^{q_2^1}(\Delta_1\tilde{v}(x-\xi e_1)+c_2)-\sum_{\zeta=0}^{q_2^2-1}(\Delta_2\tilde{v}(x-q_2^1e_1+\zeta e_2)-c_2)\right\}\right\}$. 因此有 $\tilde{q}_2^{1*}(x,d_2)=\arg\min_{0\leqslant q_2^1\leqslant d_2}\sum_{\xi=1}^{q_2^1}(\Delta_1\tilde{v}(x-\xi e_1)+c_2)$ 和 $\tilde{q}_2^{2*}(x,d_2,\tilde{q}_2^{1*})=\arg\min_{0\leqslant q_2^2\leqslant d_2-\tilde{q}_2^{1*}}\sum_{\zeta=0}^{q_2^2-1}(\Delta_2\tilde{v}(x-q_2^1e_1+\zeta e_2)-c_2)$. 由于 $\tilde{q}_2^{1*}(x,d_2)$ 独立于 q_2^2, 因此可以运用1) 中相似的方法求得 $\tilde{q}_2^{1*}(x,d_2)$, 在此基础上再求解 $\tilde{q}_2^{2*}(x,d_2,\tilde{q}_2^{1*})$. 由定义1中的条件4), 如果 $\Delta_2\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^{1*}e_1)>c_2$, 则有 $\Delta_2\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^{1*}e_1+\zeta e_2)\geqslant\Delta_2\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^{1*}e_1)>c_2$ 对于所有的 ζ 都成立. 因此有 $\tilde{q}_2^{2*}(x,d_2,\tilde{q}_2^{1*})=1$. 如果 $\Delta_2\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^{1*}e_1)\leqslant c_2$, 由于 $\Delta_2\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^{1*}e_1+\zeta e_2)$ 是 ζ 的非减函数, 必然存在一个 $\tilde{q}_2^{2*}(=\tilde{q}_2^{2*}(x,d_2,\tilde{q}_2^{1*}))$ 使得 $\Delta_2\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^{1*}e_1+(\tilde{q}_2^{2*}-1)e_2)\leqslant c_2$ 和 $\Delta_2\tilde{v}(x-\tilde{q}_2^{1*}e_1+\tilde{q}_2^{2*}e_2)>c_2$ 成立.

3) 可由2) 中方法求得. 4) −6) 和文献[14]中引理1的证明相似, 此处略去.

根据命题2, 可得下述结论.

命题3　如果 $\tilde{v}\in V$, 则有 $\tilde{T}\tilde{v}\in V$ 和 $\tilde{v}^*\in V$, $\tilde{T}\tilde{v}=hx_1^++b_1x_1^-+b_2x_2+\mu\tilde{T}_0\tilde{v}(x)+\lambda_1\tilde{T}_1\tilde{v}(x)+\lambda_2\tilde{T}_2\tilde{v}(x)$.

证明　和命题1相似.

由此, 可以定义订货可分割时两需求类系统中的最优策略如下.

定理2　对于两需求类系统, 如果每个需求类的订货均可分割, 则存在一个取决于系统状态的最优生产基准库存水平 $\tilde{s}^*(x_2)$ 和对应于每个需求类且取决于系统状态的最优库存配给水平 $\tilde{r}_j^*(x_2)$. 最优策略具有如下性质:

1) 当 $x_2>0$ 且 $0\leqslant x_1<\tilde{s}^*(x_2)$, 或 $x_2=0$ 且 $0\leqslant x_1<\tilde{s}^*(0)$ 时, 生产以增加可用库存, $\tilde{s}^*(x_2)=\begin{cases}\min\{x_1\mid \tilde{v}^*(x+e_1)-\tilde{v}^*(x-e_2)>0\},x_2>0\\ \min\{x_1\mid \tilde{v}^*(x+e_1)-\tilde{v}^*(x)>0\},x_2=0\end{cases}$;

2) 当 $x_1<0$ 时, 生产以减少需求类1的积欠订货;

3) 当 $x_2>0$ 且 $x_1\geqslant\tilde{s}^*(x_2)$ 时, 生产以减少需求类2的积欠订货;

4) 当 $x_2=0$ 且 $x_1\geqslant\tilde{s}^*(0)$ 时, 不生产;

5) 需求类1的订货到达时, 被即刻满足的部分: $x_1\geqslant d_1$ 时, 为 d_1; $0<x_1<d_1$ 时, 为 x_1;

6) 需求类1的订货到达时, 被积欠订货的部分: $x_1>0$ 且 $\tilde{r}_1^*(x_2)<x_1-d_1<0$ 时, 为 d_1-x_1; $0<x_1\leqslant\tilde{r}_1^*(x_2)+d_1$ 时, 为 $-\tilde{r}_1^*(x_2)-1$; $x_1-d_1\leqslant\tilde{r}_1^*(x_2)$ 且 $\tilde{r}_1^*(x_2)<x_1\leqslant 0$ 时, 为 x_1-

$\tilde{r}_1^*(x_2)$；$\tilde{r}_1^*(x_2)+d_1<x_1<0$ 时，为 d_1，$\tilde{r}_1^*(x_2)=\min\{x_1 \mid \tilde{v}^*(x)-\tilde{v}^*(x-e_1)\geqslant -c_1\}$；

7) 需求类 1 的订货到达时，被拒绝的部分：$0<x_1\leqslant\tilde{r}_1^*(x_2)+d_1$ 时，为 $\tilde{r}_1^*(x_2)+d_1+1-x_1$；$x_1-d_1\leqslant\tilde{r}_1^*(x_2)$ 且 $\tilde{r}_1^*(x_2)<x_1\leqslant 0$ 时，为 $\tilde{r}_1^*(x_2)+d_1-x_1$；$x_1\leqslant\tilde{r}_1^*(x_2)$ 时，为 d_1；

8) 需求类 2 的订货到达时，被即刻满足的部分：$x_1\geqslant\tilde{s}^*(x_2+d_2)$ 时，为 d_2；$\tilde{s}^*(x_2+1)<x_1\leqslant\tilde{s}^*(x_2+d_2)$ 时，为 $x_1-\tilde{s}^*(x_2+1)-1$；

9) 需求类 2 的订货到达时，被积欠订货的部分：$\tilde{s}^*(x_2+1)<x_1\leqslant\tilde{s}^*(x_2+d_2)$ 且 $\tilde{s}^*(x_2+1)+1<\tilde{r}_2^*(x_2)$ 时，为 $\tilde{s}^*(x_2+1)+1$；$\tilde{s}^*(x_2+1)<x_1\leqslant\tilde{s}^*(x_2+d_2)$ 且 $\tilde{s}^*(x_2+1)+1\geqslant\tilde{r}_2^*(x_2)$ 时，为 $\tilde{r}_2^*(x_2)$；$\tilde{r}_2^*(x_2)<x_1\leqslant\tilde{s}^*(x_2+1)$ 且 $x_1<\tilde{r}_2^*(x_2)+d_2$ 时，为 $x_1-\tilde{r}_2^*(x_2)-1$；$\tilde{r}_2^*(x_2)+d_2<x_1\leqslant\tilde{s}^*(x_2+1)$ 时，为

$$d_2,\ \tilde{r}_2^*(x_2)=\begin{cases}\min\{x_1 \mid \tilde{v}^*(x)-\min\{\tilde{v}^*(x-e_1),\\ \quad\tilde{v}^*(x+e_2)\}\geqslant -c_2\},\ x_1>0\\ \min\{x_1 \mid \tilde{v}^*(x)-\tilde{v}^*(x+e_2)\geqslant -c_2\},\ x_1\leqslant 0\end{cases};$$

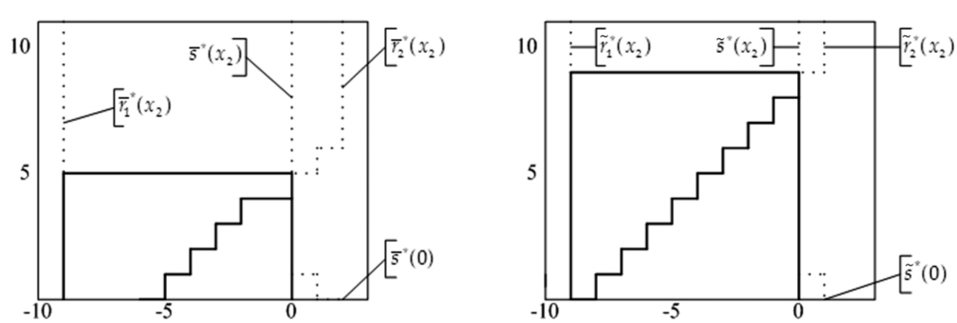
10) 需求类 2 的订货到达时，被拒绝的部分：$\tilde{s}^*(x_2+1)<x_1\leqslant\tilde{s}^*(x_2+d_2)$ 且 $\tilde{s}^*(x_2+1)+1\geqslant\tilde{r}_2^*(x_2)$ 时，为 $d_2+\tilde{s}^*(x_2+1)+1-\tilde{r}_2^*(x_2)-x_1$；$\tilde{r}_2^*(x_2)<x_1\leqslant\tilde{s}^*(x_2+1)$ 且 $x_1<\tilde{r}_2^*(x_2)+d_2$ 时，为 $d_2+\tilde{r}_2^*(x_2)+1-x_1$；$x_1\leqslant\tilde{r}_2^*(x_2)$ 时，为 d_2.

证明 性质(1) –(4) 和定理1 中相同. 性质(5) –(7) 可由定义 1 中的条件(3) 和(7)，命题 2，以及 $\tilde{r}_1^*(x_2)$ 的定义分析得到. 性质(8) –(10) 可根据定义 1 中的条件(4) 和(5)，命题 2，以及 $\tilde{s}^*(x_2)$、$\tilde{r}_2^*(x_2)$ 的定义分析得到.

3 数值算例

算例中假设各个需求类的批量都保持不变. 首先验证上面提出的最优策略的有效性，然后通过数值结果探讨订货量对最优策略的影响. 数值算例的结果直接应用值迭代法求得. 在求解过程中，状态空间截取为 $[-m_0,m_1]\times[0,m_2]$，其中 $m_\vartheta(\vartheta=0,1,2)$ 均为正整数. 运算过程中，一旦达到五位数的精度，即停止迭代. 相关参数为 $\mu=0.45$，$\lambda_1=0.24$，$\lambda_2=0.2$，$c_1=24$，$c_2=9$，$h=2$，$b_1=1.8$，$b_2=1$，$d_1=2$，$d_2=2$，$\alpha=0.01$.

数值结果见图 1 和图 2. 图 1 中所示的是最优策略，其中(a) 对应于订货不可分割时的情形. 由图可见，最优策略可以通过一些单调的开关曲线来进行表示. 令 $x_{2\max}=\max\{x_2: s^*(x_2)=r_2^*(x_2)\}$，可得图中实线所包含的区域为常返域，系统状态一旦进入这个域，即不会离开. 图 1(b) 对应的是单件需求的系统. 这里给出图1(b) 的目的是因为，当订货可分割时，无论是批量订货还是单件订货，供货企业会采用相同的生产控制和库存配给策略. 比较图 1(a) 和(b) 可知，低优先权需求类可能的积欠订货量会随所有需求类的订货量递减.



(a) (b)

图 1 最优策略

Fig. 1 The optimal policies

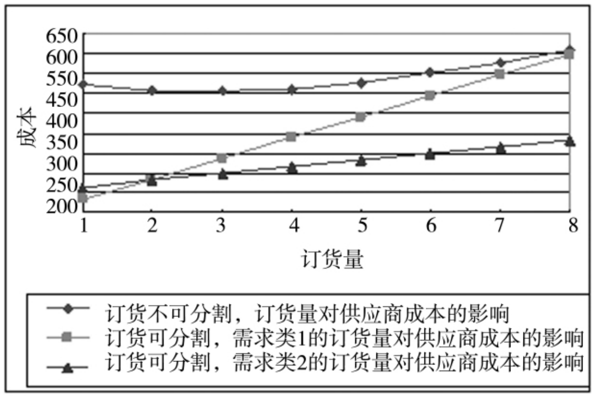


图 2　订货量对供应商成本的影响

Fig. 2 The effect of order size on the supplier's costs

图 2 表示的是订货量对供应商成本的影响. 当订货不可分割时,供应商成本是每个需求类订货量的拟凸函数. 当订货可分割时,供应商的成本则随需求类 1 和 2 的订货量线性增加. 这是因为订货不可分割时,供应商只能严格按照各个需求类的订货量进行交货,会存在一个使得供应商成本最小的订货量,这符合经济批量的基本思想. 当订货可分割时,供应商可以选择分批交货和接受订货,其会按照自己的最优策略来进行选择. 当每个需求类的订货量增加时,供应商只会发生额外的积欠订货或销售损失成本,这些成本是订货量的线性函数.

4　多需求类系统的最优策略

本节中相关的定义和命题和第 3 节中非常相似,因此在本节中将不再赘述,而是直接给出结论. 对于订货可分割的多需求类系统,优化方程如(2) 所示. 对于订货不可分割的多需求类系统,优化方程(2) 改写为

$$\hat{v}^*(x) = hx_1^+ + b_1x_1^- + \sum_{k=2}^{n} b_kx_k + \mu\hat{T}_0\hat{v}^*(x) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\hat{T}_i\hat{v}^*(x) \tag{7}$$

其中

$$\hat{T}_0\hat{v}(x) = \begin{cases}\min\{\hat{v}(x),\hat{v}(x+e_1),\hat{v}(x-e_k)\}, \exists x_k>0, \\ \qquad 1<k\leqslant n \\ \min\{\hat{v}(x),\hat{v}(x+e_1)\}, x_k=0\end{cases}$$

$$\hat{T}_1v(x) = \min\{\hat{v}(x-de_1),\hat{v}(x)+dc_1\}$$

$$\hat{T}_k\hat{v}(x) = \begin{cases}\min\{\hat{v}(x-de_1),\hat{v}(x+de_k),\hat{v}(x)+dc_k\}, x_1\geqslant d \\ \min\{\hat{v}(x+de_k),\hat{v}(x)+dc_k\}, x_1<d\end{cases}$$

定理 3　对于一个多需求类系统,当每个需求类的订货量都相等且不可分割时,存在一个取决于系统状态的最优生产基准库存水平 $\hat{s}^*(x_{-1})$, $x_{-1}=(x_2,x_3,\cdots,x_n)$, 以及对应于每个需求类且取决于系统状态的库存配给水平 $\hat{r}_i^*(x_{-1})$. 最优策略有如下性质:

1) 当存在 $k(1<k\leqslant n)$ 使得 $x_k>0$ 且 $0\leqslant x_1<\hat{s}^*(x_{-1})$, 或 $x_k=0$ 且 $0\leqslant x_1<\hat{s}^*(0)$ 时, 生产以增加可用库存,

$$\hat{s}^*(x_{-1}) = \begin{cases}\min\{x_1 \mid \hat{v}^*(x+e_1)-\hat{v}^*(x-e_k)>0\}, \\ \qquad \exists x_k>0 \\ \min\{x_1 \mid \hat{v}^*(x+e_1)-\hat{v}^*(x)>0\}, \\ \qquad x_k=0\end{cases}$$

2) 当 $x_1<0$ 时,生产以减少需求类 1 的积欠订货;

3) 当 $x_k>0$ 且 $x_1\geqslant\hat{s}^*(x_{-1})$ 时,生产以减少需求类 k 的积欠订货;

4) 当 $x_k=0$ 且 $x_1\geqslant\hat{s}^*(0)$ 时,不生产;

5) 对于需求类 1 的订货: 当 $x_1\geqslant d$ 时,由可用库存即刻满足;当 $\hat{r}_1^*(x_{-1})<x_1<d$ 时,全部作为积欠订货;当 $x_1\leqslant\hat{r}_1^*(x_{-1})$, 全部拒绝,这里 $\hat{r}_1^*(x_{-1})=\min\{x_1 \mid \hat{v}^*(x)-\hat{v}^*(x-de_1)\geqslant -dc_1\}$;

6) 对于需求类 k 的订货: 当 $x_1\geqslant\hat{s}^*(x_{-1}+de_k)$ 时,由可用库存即刻满足; 当 $\hat{r}_k^*(x_{-1})<$

$x_1 \leqslant \hat{s}^*(x_{-1}+de_k)$ 时,全部作为积欠订货; 当 $x_1 \leqslant \hat{r}_k^*(x_{-1})$ 时,全部拒绝,

$$\hat{r}_k^*(x_{-1}) = \begin{cases} \min\{x_1 \mid \hat{v}^*(x) - \min\{\hat{v}^*(x-de_1), \\ \qquad \hat{v}^*(x+de_k)\} \geqslant -dc_k\}, \ x_1 > d \\ \min\{x_1 \mid \hat{v}^*(x) - \hat{v}^*(x+de_k) \geqslant -dc_k\}, \\ \qquad x_1 \leqslant d \end{cases}$$

证明 和定理 1 类似.

定理 4 对于一个多需求类系统,当每个需求类的订货均可分割时,存在一个取决于系统状态的最优生产基准库存水平 $s^*(x_{-1})$,以及对应于各需求类并取决于系统状态的最优库存配给水平 $r_i^*(x_{-1})$. 最优策略有如下性质:

1) 当存在 $k(1<k\leqslant n)$ 使得 $x_k>0$ 且 $0\leqslant x_1<s^*(x_{-1})$,或 $x_k=0$ 且 $0\leqslant x_1<s^*(0)$ 时,生产以增加可用库存,

$$s^*(x_{-1}) = \begin{cases} \min\{x_1 \mid v^*(x+e_1) - \hat{v}^*(x-e_k) > 0\}, \\ \qquad \exists x_k > 0 \\ \min\{x_1 \mid v^*(x+e_1) - \hat{v}^*(x) > 0\}, \\ \qquad x_k = 0 \end{cases};$$

2) 当 $x_1<0$ 时,生产以减少需求类 1 的积欠订货;

3) 当 $x_k>0$ 且 $x_1\geqslant s^*(x_{-1})$ 时,生产以减少需求类 k 的积欠订货;

4) 当 $x_k=0$ 且 $x_1\geqslant s^*(0)$ 时,不生产;

5) 需求类 1 的订货到达时,被即刻满足的部分: $x_1\geqslant d_1$ 时,为 d_1; $0<x_1<d_1$ 时,为 x_1;

6) 需求类 1 的订货到达时,被积欠订货的部分: $x_1>0$ 且 $r_1^*(x_{-1})<x_1-d_1<0$ 时,为 d_1-x_1; $0<x_1\leqslant r_1^*(x_{-1})+d_1$ 时,为 $-r_1^*(x_{-1})-1$; $x_1-d_1\leqslant r_1^*(x_{-1})$ 且 $r_1^*(x_{-1})<x_1\leqslant 0$ 时,为 $x_1-r_1^*(x_{-1})$; $r_1^*(x_{-1})+d_1<x_1<0$ 时,为 d_1, $r_1^*(x_{-1}) = \min\{x_1 \mid v^*(x) - v^*(x-e_1) \geqslant -c_1\}$;

7) 需求类 1 的订货到达时,被拒绝的部分: $0<x_1\leqslant r_1^*(x_{-1})+d_1$ 时,为 $r_1^*(x_{-1})+d_1+1-x_1$; $x_1-d_1\leqslant r_1^*(x_{-1})$ 且 $r_1^*(x_{-1})<x_1\leqslant 0$ 时,为 $r_1^*(x_{-1})+d_1-x_1$; $x_1\leqslant r_1^*(x_{-1})$ 时,为 d_1;

8) 需求类 k 的订货到达时,被即刻满足的部分 $x_1\geqslant s^*(x_{-1}+d_ke_k)$ 时,为 d_k; $s^*(x_{-1}+e_k)<x_1\leqslant s^*(x_{-1}+d_ke_k)$ 时,为 $x_1-s^*(x_{-1}+e_k)-1$;

9) 需求类 k 的订货到达时,被积欠订货的部分 $s^*(x_{-1}+e_k)<x_1\leqslant s^*(x_{-1}+d_ke_k)$ 且 $s^*(x_{-1}+e_k)+1<r_k^*(x_{-1})$ 时,为 $s^*(x_{-1}+e_k)+1$; $s^*(x_{-1}+e_k)<x_1\leqslant s^*(x_{-1}+d_ke_k)$ 且 $s^*(x_{-1}+e_k)+1\geqslant r_k^*(x_{-1})$ 时,为 $r_k^*(x_{-1})$; $r_k^*(x_{-1})<x_1\leqslant s^*(x_{-1}+e_k)$ 且 $x_1<r_k^*(x_{-1})+d_k$ 时,为 $x_1-r_k^*(x_{-1})-1$; $r_k^*(x_{-1})+d_k<x_1\leqslant s^*(x_{-1}+e_k)$ 时,为 d_k,

$$r_k^*(x_{-1}) = \begin{cases} \min\{x_1 \mid v^*(x) - \min\{v^*(x-e_1), \\ \qquad v^*(x+e_k)\} \geqslant -c_k\}, \ x_1 > 0 \\ \min\{x_1 \mid v^*(x) - v^*(x+e_k) \geqslant -c_k\}, \\ \qquad x_1 \leqslant 0 \end{cases};$$

10) 需求类 k 的订货到达时,被拒绝的部分: $s^*(x_{-1}+e_k)<x_1\leqslant s^*(x_{-1}+d_ke_k)$ 且 $s^*(x_{-1}+e_k)+1\geqslant r_k^*(x_{-1})$ 时,为 $d_k+s^*(x_{-1}+e_k)+1-r_k^*(x_{-1})-x_1$; $r_k^*(x_{-1})<x_1\leqslant s^*(x_{-1}+e_k)$ 且 $x_1<r_k^*(x_{-1})+d_k$ 时,为 $d_k+r_k^*(x_{-1})+1-x_1$; $x_1\leqslant r_k^*(x_{-1})$ 时,为 d_k.

证明 和定理 2 相似.

在上述结论的基础上,可以得到一些特例的最优策略. 例如,在定理 3 中,令 $d=1$,则可以得到面向多个单件需求类且同时考虑积欠订货和销售损失的系统的最优生产控制和库存配给策略,其可以看作是对文献[9]和[11]中结论的合并和归纳.

5 结束语

本文研究了面向多个需求类的生产系统的最优生产控制和库存配给策略. 分析过程中,分别针对订货不可分割和可分割的情形进行讨论. 结论表明最优生产控制和库存配给策略可以通过一些单调的开关曲线进行表示. 因此,这些策略具有很强的实用性和可操作性,便于企业在生产实践中加以应用. 在本文的基础上,以下问题可作为下一步的研究内容和方向: 首先,文中数值算例的结论是通过动态规划来求解的,当需求类的数目很多或是订货量很大时,由于"维数灾"的存在,将很

难得到有效的结论,因此,必须设计一种有效的启发式方法来求解近似最优的各策略参数. 其次,在本文及现有文献中,各需求类通常是根据其积欠订货或/和销售损失成本来分类,这隐含地假设成本信息是对称的. 基于信息共享程度的需求类划分及相应的最优生产控制和库存配给策略可进一步研究.

参 考 文 献:

[1] Sen A, Zhang A X. The newsboy problem with multiple demand classes[J]. IIE Transactions, 1999, 31: 431 – 444.

[2] 汪小京, 刘志学, 郑长征. 多类顾客环境下报童模型中库存分配策略研究[J]. 中国管理科学, 2010, 18(4): 65 – 72.
Wang Xiaojing, Liu Zhixue, Zheng Changzheng. An inventory rationing policy in the newsboy problem with multiple customer classes[J]. Chinese Journal of Management Science, 2010, 18(4): 65 – 72. (in Chinese)

[3] 汪小京, 刘志学, 郑长征. 周期性补货系统中多类顾客的库存分配策略[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版), 2010, 32(4): 661 – 672.
Wang Xiaojing, Liu Zhixue, Zheng Changzheng. Inventory rationing policy in the periodic inventory system with multiple customer classes[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Information & Management Engineering), 2010, 32(4): 661 – 672. (in Chinese)

[4] Kleijn M J, Dekker R. An overview of inventory systems with several demand classes[R]. Econometric Institute Report 9838/A, Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands, 1998.

[5] Veinott A F. Optimal policy in a dynamic, single product, nonstationary inventory model with several demand classes[J]. Operations Research, 1965, 13(5): 761 – 778.

[6] Arslan H, Graves S C, Roemer T A. A single-product inventory model for multiple demand classes[J]. Management Science, 2007, 53(9): 1486 – 1500.

[7] Topkis D. Optimal ordering and rationing policies in a non-stationary dynamic inventory model with demand classes[J]. Management Science, 1968, 15(3): 160 – 176.

[8] Deshpande V, Cohen M A, Donohue K. A threshold inventory rationing policy for service-differentiated demand classes[J]. Management Science, 2003, 49(6): 638 – 703.

[9] Ha A Y. Inventory rationing in a make-to-stock production system with several demand classes and lost sales[J]. Management Science, 1997, 43(8): 1093 – 1103.

[10] Ha A Y. Stock-rationing policy for a make-to-stock production system with two priority classes and backordering[J]. Naval Research Logistics, 1997, 44: 457 – 472.

[11] de Véricourt F, Karaesmen F, Dallery Y. Optimal stock allocation for a capacitated supply system[J]. Management Science, 2002, 48(11): 1486 – 1501.

[12] de Véricourt F, Karaesmen F, Dallery Y. Assessing the benefits of different stock-allocation policies for a make-to-stock production system[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2001, 3(2): 105 – 121.

[13] 杨超林, 沈厚才, 高春燕. 按单装配系统中组件生产和库存分配控制策略研究[J]. 自动化学报, 2011, 37(2): 234 – 240.
Yang Chaolin, Shen Houcai, Gao Chunyan. Joint control of component production and inventory allocation in an assemble-to-order system with lost sales[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(2): 234 – 240. (in Chinese)

[14] Huang B, Iravani S M R. A make-to-stock system with multiple customer classes and batch ordering[J]. Operations Research, 2008, 56(5): 1312 – 1320.

[15] 叶涛锋, 达庆利. 考虑积欠订货的 MTS 系统的生产与库存配给[J]. 系统工程学报, 2011, 26(1): 98 – 104.
Ye Taofeng, Da Qingli. Production and inventory rationing in make-to-stock system with backorders[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(1): 98 – 104. (in Chinese)

[16] Benjaafar S, ElHafsi M, Huang T. Optimal control of a production-inventory system with both backorders and lost sales[J]. Naval Research Logistics, 2010, 57(3): 252 – 265.

[17] 周伟华, 吴晓波, 杜　健. 服务多类需求串行供应链的最优控制策略[J]. 管理科学学报, 2010, 13(3): 19 – 28.

Zhou Weihua, Wu Xiaobo, Du Jian. Optimal control of a series system with stochastic leadtime and multiple demand classes[J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(3): 19 – 28. (in Chinese)

[18] Lippman S. Applying a new device in the optimization of exponential queueing systems[J]. Operations Research, 1975, 23(4): 687 – 710.

[19] Örmeci E L, Burnetas A. Admission control with batch arrivals[J]. Operations Research Letters, 2004, 32: 448 – 454.

[20] Örmeci E L, Burnetas A. Dynamic admission control for loss systems with batch arrivals[J]. Advances in Applied Probability, 2005, 37(4): 915 – 937.

[21] Çil E B, Örmeci E L, Karaesmen F. Structural results on a batch acceptance problem for capacitated queues[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2007, 66(2): 263 – 274.

Production and inventory rationing with multiple batch demand classes

YE Tao-feng[1,2], *DA Qing-li*[2]

1. School of Economics & Management, Jiangsu University of Science & Technology, Zhenjiang 212003, China;
2. School of Economics & Management, Southeast University, Nanjing 211189, China

Abstract: We first focus on a system with only two demand types. The optimal production and inventory rationing policies are discussed according to whether the customers' orders can be split or not. Analytically, the supplier's optimal production control policy can be represented by a base stock level that depends on the state of the system. Similarly, the optimal inventory rationing policy con be shown as a multi-level rationing vector that also depends on the system state. Moreover, the results for the general system with multiple batch-demand classes are extended from that of the system with two demand types. Numerical studies, show that the optimal policies can be illustrated by several monotonic switching curves.

Key words: make-to-stock; backorder; lost sales; production and inventory rationing