

# 随机动态装卸混合问题的分区求解策略<sup>①</sup>

陈久梅<sup>1,2</sup>, 张旭梅<sup>2</sup>, 肖剑<sup>3</sup>, 但斌<sup>2</sup>

(1. 重庆工商大学商务策划学院, 重庆 400067; 2. 重庆大学经济与工商管理学院, 重庆 400044;  
3. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 400044)

**摘要:** 针对需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题, 提出一种求解该问题的分区求解策略, 分析了需求稀少和需求密集情况下该策略的渐近性. 仿真比较了需求服从一般分布情形下分区求解策略、随机队列中位策略、多车场随机队列中位策略和堆栈策略的求解效果, 以及需求服从一般分布和需求服从均匀分布情形下分区求解策略的求解效果. 结果表明, 对于需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题, 分区求解策略是一种有效的求解策略.

**关键词:** 随机动态装卸混合问题; 分区求解策略; 车辆路径问题; 排队论; 仿真

**中图分类号:** F224.3    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1007-9807(2012)01-0043-11

## 0 引言

过去五十年里, 车辆路径问题引起了运筹学、管理学、计算机应用、组合数学、图论等学科专家学者的浓厚兴趣, 并取得了基于组合优化、复杂理论和启发式算法的大量理论研究成果和实验分析成果(详见文献[1]). 然而, 这些成果大多以静态确定的车辆路径问题为对象, 研究如何根据已知信息, 求解满足一定约束条件的车辆行驶路径, 以最小化车辆运行成本. 而大多数实际的车辆路径问题却是动态且不确定的. 例如, 快递服务中顾客需求往往陆续到达, 且具体到达时间不确定; 紧急救援时, 行驶过程中的车辆可能损毁、预先安排的行车路线可能无法继续使用等. 其中, 具有随机性和动态性的车辆路径问题称为随机动态车辆路径问题. 由于更接近现实, 该问题自 Psaraftis<sup>[2]</sup> 提出以来, 引起了学术界越来越多的关注, 逐渐成为研究热点.

目前对随机动态车辆路径问题的研究主要集中在进化算法<sup>[3]</sup>、遗传算法<sup>[4]</sup>、模拟退火算法<sup>[5]</sup>、

禁忌搜索算法<sup>[6]</sup>、蚁群算法<sup>[7]</sup>、粒子群算法<sup>[8]</sup>等求解算法的设计与改进方面. 然而, 这些文献通常以最小化车辆运行成本为目标, 忽略了其中非常重要的时间因素, 往往为了追求更低的车辆运行成本, 却导致顾客较长时间的等待. 这是对时间要求比较高的随机动态车辆路径应用所不能接受的, 如紧急救援、快递服务、故障修理服务等. 考虑到其中存在排队现象, 有学者运用排队论对此类问题进行了讨论. 如 Bertsimas<sup>[9-11]</sup>、郭耀煌<sup>[12-13]</sup>、谢秉磊等<sup>[14]</sup> 分别对此类应用中的故障修理服务问题进行了研究, 推导出需求稀少和需求密集情况下期望系统时间的下界, 提出了先来先服务策略 (first come first serve, FCFS)、随机队列中位策略 (stochastic queue median policy, SQM)、多车场随机队列中位策略 (m stochastic queue median policy, mSQM)、旅行商策略 (traveling salesman policy, TSP)、G/G/m 旅行商策略 (G/G/m version of the traveling salesman policy, G/G/m TSP) 等, 并对各策略进行了渐近性分析. 故障修理服务问题中, 修理工是在某个具体的地

① 收稿日期: 2009-10-11; 修订日期: 2010-07-19.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71101159); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-10-0884); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC, 2010BB5422).

作者简介: 陈久梅(1976—), 女, 重庆梁平人, 博士生, 讲师. Email: chenjiumei@163.com

点为顾客提供服务,服务过程中修理工的地理位置不改变.对时间要求比较高的随机动态车辆路径问题应用中还存在另一类问题——随机动态装卸混合问题,如城市出租车服务等.该问题中,车辆需将顾客从出发地运送至其目的地.服务过程中车辆的地理位置发生改变.这使得该问题比故障维修服务问题更难求解. Swihart 等<sup>[15]</sup>针对随机动态装卸混合问题进行了研究,推导出需求稀少和需求密集两种情况下,期望系统时间的下界,提出了先来先服务策略、随机队列中位策略、堆栈策略(stacker crane policy, SCP)、双重旅行商策略(dual traveling salesman policy, DTSP)、最近邻策略(nearest neighbor policy, NNP)等,并对各策略进行了渐近性分析.

文献[15]假设顾客出发地在服务区域内均匀分布.但在实际应用中发现,顾客出发地在整个服务区域内往往不是均匀分布,有的子区域内相对较多,而有的子区域内相对较少.基于此,本文考虑需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题,提出一种求解该问题的分区求解策略(region partitioning policy, RPP),在推导出需求稀少和需求密集两种情况下期望系统时间下界的基础上,分析该策略的渐近性,并将该策略与已有文献中求解需求稀少情况效果较好的随机队列中位策略(SQMP)和多车场随机队列中位策略(mSQMP),以及求解需求密集情况效果较好的堆栈策略(SCP)进行了仿真比较,同时仿真比较需求服从一般分布和需求服从均匀分布两种情形下,分区求解策略的求解效果,以验证分区求解策略求解需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题的有效性.

## 1 问题描述

$m$  辆车服务于圆形区域  $\Lambda$  上顾客的运送需求(结论可以推广到任何有界区域,此处以圆形区域来讨论,仅为数学证明的方便).服务区域上点与点之间的距离采用欧几里德距离.顾客需求到达服从参数为  $\lambda$  的泊松分布,服务时间服从一般分布,其期望记为  $s$ .顾客出发地相互独立且服从概率密度为  $f(x_1, x_2)$  的概率分布,目的地相互独

立且服从均匀分布,出发地与目的地相互独立.车速恒定为一常数  $v$ .车载容量为单位容量,即一次只能服务一个顾客需求,且一旦开始服务,就必须服务至结束,不允许中断.此问题的目标是设计恰当的求解策略,以最小化期望系统时间.

## 2 分区求解策略

分区求解策略可描述如下:根据顾客出发地的概率密度函数  $f(x_1, x_2)$  将区域  $\Lambda$  分成概率相等的  $m$  个扇形,记为  $\Lambda_j (j = 1, 2, \dots, m)$ .  $m$  辆车空闲时分别停留在  $\Lambda_j$  的几何重心  $o_j (j = 1, 2, \dots, m)$  处.车辆  $j (j = 1, 2, \dots, m)$  仅为出发地在  $\Lambda_j$  中的顾客提供服务.出发地在  $\Lambda_j$  中的顾客需求到达后依次进入队列  $q_j (j = 1, 2, \dots, m)$  中等待.若车辆  $j$  空闲且队列  $q_j \neq \phi$ ,则将  $q_j$  中所有顾客需求形成一个集合,称为顾客集,运用优化方法找出车辆从  $o_j$  点出发、依次完成其中  $\|q_j\| - 1$  个顾客的运送任务后,到达最后一个顾客出发地的最短路径,车辆  $j$  沿最短路径依次为各顾客提供服务.服务过程中车辆  $j$  的状态为繁忙.服务结束后,车辆  $j$  返回  $o_j$  点,状态变为空闲.

为了对分区求解策略进行渐近性分析,引出如下符号:需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题及分区求解策略下,期望系统时间分别记为  $T$  和  $T^{\text{RPP}}$ ,等待车辆服务其它顾客的期望等待时间分别记为  $W_e$  和  $W_e^{\text{RPP}}$ ,等待车辆从上一个停留地行驶到顾客出发地的期望等待时间分别记为  $W_f$  和  $W_f^{\text{RPP}}$ ,顾客出发地与车辆空闲时的停留地之间的距离分别记为  $D(x_1, x_2)$  和  $D^{\text{RPP}}(x_1, x_2)$ ;需求稀少及需求密集情况下  $T$  的下界分别记为  $T_L^*$  和  $T_H^*$ ,车辆空闲时停留位置构成的集合记为  $\xi$ .

### 2.1 需求稀少情况

由排队论知,服务强度(traffic intensity)为相同时区内顾客到达的平均数与被服务的平均数之比,即

$$\rho = \frac{\lambda s}{m} \quad (1)$$

需求稀少情况下,即服务强度  $\rho \rightarrow 0$  时,期望系统时间  $T$  有如下结论.

**定理 1** 当  $\rho \rightarrow 0$  时,  $T \geq$

$$\min_{\xi} \frac{\iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} D(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} + s$$

**证明** 由排队论知, 期望系统时间

$$T = W_e + W_f + s \quad (2)$$

顾客需求到达服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 则车辆为某顾客提供服务的时间段  $\Delta t$  内到达顾客需求数为零的概率

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \quad (3)$$

则由式(1)知, 当  $\rho \rightarrow 0$  时,  $\lambda \rightarrow 0$ , 则

$$P_0(\Delta t) \rightarrow 1 \quad (4)$$

式(4)表明, 当  $\rho \rightarrow 0$  时, 车辆为某顾客提供服务的时间段内几乎没有顾客需求到达, 则系统中无等待服务的顾客需求. 因此, 每个顾客需求到达后, 均能立即得到服务而无需等待. 由此可知

$$W_e \geq 0 \quad (5)$$

同理,  $W_f$  应等于车辆从其空闲时的停留地行驶至顾客出发地的期望行驶时间, 则

$$W_f = \frac{\iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} D(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} \geq \min_{\xi} \frac{\iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} D(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} \quad (6)$$

将式(5)、式(6)代入式(2), 得

$$T \geq \frac{\min_{\xi} \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} D(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} + s \quad (7)$$

因此, 当  $\rho \rightarrow 0$  时, 期望系统时间  $T$  的下界

$$T_L^* = \frac{\min_{\xi} \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} D(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} + s \quad (8)$$

需求稀少情况下, 分区求解策略下期望系统时间  $T^{RPP}$  与  $T_L^*$  之间的渐近程度, 具有如下结论

**定理 2** 当  $\rho \rightarrow 0$  时,  $\frac{T^{RPP}}{T_L^*} \rightarrow 1$ .

**证明** 由排队论知, 期望系统时间

$$T^{RPP} = W_e^{RPP} + W_f^{RPP} + s \quad (9)$$

由式(4)可知, 当  $\rho \rightarrow 0$  时, 每个顾客需求到达后均能立即得到服务而无需等待. 因此

$$W_e^{RPP} \geq 0 \quad (10)$$

同理,  $W_f^{RPP}$  应等于车辆从其空闲时的停留地行驶至顾客出发地的期望行驶时间, 则

$$W_f^{RPP} = \frac{\sum_{j=1}^m \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} D^{RPP}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} \quad (11)$$

将式(10)、式(11)代入式(9), 得

$$T^{RPP} \geq \frac{\sum_{j=1}^m \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} D^{RPP}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} + s \quad (12)$$

由几何概率知, 圆形区域上, 当  $m$  个固定点为概率相等的  $m$  个扇形的重心位置时, 区域上各点与这  $m$  个固定点之间的期望距离近似为这些点与区域上任意  $m$  个固定点之间期望距离的最小值<sup>[16]</sup>. 即

$$\sum_{j=1}^m \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} D^{RPP}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx \min_{\xi} \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} D(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 得

$$T^{RPP} \geq \frac{\min_{\xi} \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} D(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{v} + s \quad (14)$$

由式(14)和式(8), 计算得

$$\frac{T^{RPP}}{T_L^*} \rightarrow 1 \quad (15)$$

证毕.

由定理 2 知, 需求稀少情况下, 分区求解策略近似为需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题的最优求解策略. 以下将分析需求密集情况下分区求解策略的渐近性.

### 2.2 需求密集情况

需求密集情况下, 即服务强度  $\rho \rightarrow 1$  时, 顾客出发地与车辆到达此地之前的上一个停留地之间的期望距离  $d$ , 有如下结论

**定理 3**  $d \geq \frac{\gamma}{\sqrt{(m/2+N)}} \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

其中  $\gamma = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}}$ ,  $N$  为系统中等待服务的顾客需

求数.

**证明** 由排队论知,需求密集时系统中存在等待服务的顾客.任意选定某个等待服务的顾客,记为  $C_0$ ,其出发地记为  $g_0$ ;  $C_0$  到达时,系统中已有顾客的目的地位置及车辆位置的集合记为  $\varphi_0$ ;  $C_0$  等待服务的过程中到达系统的顾客的目的地位置集合,记为  $\varphi_1 = \{g_1, g_2, \dots, g_{N_1}\}$ ;  $\varphi_0$  中各元素与  $g_0$  之间的最短距离记为  $Z_0^* = \min_{g \in \varphi_0} \|g - g_0\|$ ;  $\varphi_1$  中各元素与  $g_0$  之间的距离记为  $Z_i = \|g_i - g_0\|$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ;  $\varphi_0$  和  $\varphi_1$  中各元素与  $g_0$  之间的最短距离记为  $Z^* = \min\{Z_0^*, Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_1}\}$ ; 以  $g_0$  点为圆心,半径为  $z$  的圆记为  $c(g_0, z)$ , 其中,  $z$  为给定的一个大于零的数.

据问题描述知,顾客的出发地、目的地均相互独立,则

$$P\{Z_0^* \leq z\} \leq (m + N) \times \iint_{(x_1, x_2) \in c(g_0, z)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (16)$$

$$P\{Z_i \leq z\} \leq \iint_{(x_1, x_2) \in c(g_0, z)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (17)$$

定义一个 0,1 变量

$$I_G = \begin{cases} 1, & G \leq z \\ 0, & G > z \end{cases} \quad (18)$$

则

$$\begin{aligned} P\{Z^* \geq z\} &= P\{I_{Z_0^*} + \sum_{i=1}^{N_1} I_{Z_i} = 0\} = \\ &1 - P\{I_{Z_0^*} + \sum_{i=1}^{N_1} I_{Z_i} > 0\} \geq \\ &1 - E[I_{Z_0^*} + \sum_{i=1}^{N_1} I_{Z_i}] = 1 - E[I_{Z_0^*}] - \\ &E[N_1]E[I_{Z_i}] \end{aligned} \quad (19)$$

由问题描述知

$$E[N_1] \leq N \quad (20)$$

由于  $I_G$  是 0,1 变量,因此

$$E[I_{Z_0^*}] = P(I_{Z_0^*} = 1) = P(Z_0^* \leq z) \leq (m + N) \iint_{(x_1, x_2) \in c(g_0, z)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (21)$$

$$E[I_{Z_i}] = P(I_{Z_i} = 1) = P(Z_i \leq z) \leq \iint_{(x_1, x_2) \in c(g_0, z)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (22)$$

将式 (20)、式 (21) 和式 (22) 代入式 (19), 得

$$P(Z^* \geq z) \geq 1 - (m + 2N) \times \iint_{(x_1, x_2) \in c(g_0, z)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (23)$$

则对于顾客  $C_0$  来说,  $\varphi_0$  和  $\varphi_1$  中各元素与其出发地  $g_0$  之间的最短距离  $Z^*$  的期望值

$$E[Z^*] \geq \int_0^\infty (1 - (m + 2N) \times \iint_{(x_1, x_2) \in c(g_0, z)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2) dz \quad (24)$$

令  $h = (m + 2N) \pi f(x_1, x_2)$ , 由  $P(Z^* \geq z) \geq 0$  得

$$E[Z^*] \geq \int_0^{\sqrt{1/h}} (1 - hz^2) dz = \frac{2}{3} h^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3 \sqrt{(m + 2N) \pi}} f^{-\frac{1}{2}}(x_1, x_2) \quad (25)$$

由  $Z^*$  的定义知,  $Z^*$  即为顾客  $C_0$  出发地与车辆到达此地之前的上一个停留地之间的期望距离. 因此, 对于服务区域  $\Lambda$  中所有顾客来说, 顾客出发地与车辆到达此地之前的上一个停留地之间的期望距离

$$d \geq \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} \frac{2}{3 \sqrt{(m + 2N) \pi}} f^{-\frac{1}{2}}(x_1, x_2) \times f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (26)$$

令  $\gamma = \frac{2}{3 \sqrt{2\pi}}$ , 则

$$d \geq \frac{\gamma}{\sqrt{(m/2 + N)}} \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (27)$$

需求密集情况下, 即服务强度  $\rho \rightarrow 1$  时, 期望系统时间  $T$  有如下结论.

**定理 4** 当  $\rho \rightarrow 1$  时,  $T \geq \frac{\gamma^2 \lambda}{m^2 v^2 (1 - \rho)^2} \times$

$$\left[ \iint_{(x_1, x_2) \in \Lambda} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right]^2 - \frac{s(1 - 2\rho)}{2\rho}$$

**证明** 由排队论知, 需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题对应排队系统的稳定性条件为

$$s + \frac{d}{v} \leq \frac{m}{\lambda} \quad (28)$$

将式 (27) 代入式 (28), 得

$$s + \frac{\gamma}{v \sqrt{(m/2 + N)}} \iint_{(x_1, x_2) \in A} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \frac{m}{\lambda} \quad (29)$$

由排队论中 Little 公式知

$$N = \lambda W_H \quad (30)$$

其中  $W_H$  为期望等待时间.

将式(30)代入式(29), 计算得

$$W_H \geq \frac{\gamma^2 \lambda}{m^2 v^2 (1 - \lambda s/m)^2} \times \left[ \iint_{(x_1, x_2) \in A} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right]^2 - \frac{m}{2\lambda} \quad (31)$$

由排队论知, 期望系统时间

$$T = W_H + s \quad (32)$$

将式(31)代入式(32), 得

$$T \geq \frac{\gamma^2 \lambda}{m^2 v^2 (1 - \lambda s/m)^2} \times \left[ \iint_{(x_1, x_2) \in A} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right]^2 - \frac{m}{2\lambda} + s \quad (33)$$

将式(1)代入式(33), 计算得

$$T \geq \frac{\gamma^2 \lambda}{m^2 v^2 (1-\rho)^2} \left[ \iint_{(x_1, x_2) \in A} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right]^2 - \frac{s(1-2\rho)}{2\rho} \quad (34)$$

证毕.

由定理4可得, 当  $\rho \rightarrow 1$  时, 期望系统时间  $T$  的下界

$$T_H^* = \frac{\gamma^2 \lambda}{m^2 v^2 (1-\rho)^2} \left[ \iint_{(x_1, x_2) \in A} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right]^2 - \frac{s(1-2\rho)}{2\rho} \quad (35)$$

需求密集情况下, 分区求解策略下期望系统时间  $T^{\text{RPP}}$  与  $T_H^*$  之间的渐近程度, 具有如下结论.

**定理 5** 当  $\rho \rightarrow 1$  时,  $\frac{T^{\text{RPP}}}{T_H^*} \leq \frac{m\beta^2}{2\gamma^2}$ .

**证明** 由策略描述知, 若将顾客集当成顾客来处理, 需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题对应的排队系统就是  $m$  个  $G/G/1$  排队系统. 顾客集中的顾客数记为  $n$ , 则各排队系统中, 顾客集的到达服从  $n$  阶爱尔朗分布, 顾客集到达时间间隔的期望  $t = mn/\lambda$ , 方差  $\sigma_a^2 = mn/\lambda^2$ . 顾客集的期望服务时间  $S = E[L_n]/v + ns$ , 其中  $E[L_n]$  为

车辆在最短路径上空驶的期望行驶距离. 顾客集服务时间的方差  $\sigma_b^2 = \text{Var}[L_n]/v^2 + n\sigma_s^2$ , 其中  $\sigma_s^2$  为顾客集中顾客服务时间的方差. 由文献[10]知, 需求密集情况下,  $G/G/1$  的排队系统期望等待时间

$$W_{\text{set}} \leq \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2t(1 - S/t)} \quad (36)$$

因此, 当  $\rho \rightarrow 1$  时, 分区求解策略下顾客集期望等待时间

$$W_{\text{set}} \leq \frac{mn/\lambda^2 + \text{var}[L_n]/v^2 + n\sigma_s^2}{2mn/\lambda(1 - (E[L_n]/v + ns)\lambda/(mn))} = \frac{\lambda(1/\lambda^2 + \text{var}[L_n]/(mnv^2) + \sigma_s^2/m)}{2(1 - s\lambda/m - \lambda E[L_n]/(mnv))} = \frac{\lambda(1/\lambda^2 + 1/(mv^2) \cdot \text{var}[L_n]/n + \sigma_s^2/m)}{2(1 - \rho - \lambda/(mv) \cdot E[L_n]/n)} \quad (37)$$

由排队论知, 该排队系统的稳定性条件为

$$\rho + \lambda/(mv) \cdot E[L_n]/n < 1 \quad (38)$$

求解式(38)得到

$$n > \frac{\lambda E[L_n]}{mv(1 - \rho)} \quad (39)$$

由排队论中 Little 公式知, 当  $\rho \rightarrow 1$  时, 顾客集中的顾客数  $n$  趋于无穷, 则由文献[11]知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[L_n]}{n} = \frac{\beta}{\sqrt{n}} \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \beta \approx 0.72 \quad (40)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[L_n]}{n} = 0 \quad (41)$$

将式(40)、式(41)代入式(37), 计算得

$$W_{\text{set}} \leq \frac{\lambda(1/\lambda^2 + \sigma_s^2/m)}{2(1 - \rho - \frac{\lambda\beta}{mv\sqrt{n}} \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2)} \quad (42)$$

式(42)是分区求解策略下顾客集的期望等待时间, 不是顾客的期望等待时间. 由策略描述知, 分区求解策略下顾客的期望系统时间

$$T^{\text{RPP}} = W_{\text{set}} + W_1 + s \quad (43)$$

其中  $W_1$  为顾客等待车辆完成最短路径上其它顾客服务后, 行驶到该顾客出发地的期望等待时间. 由策略描述可知

$$W_1 + s = \frac{E[L_n]}{2v} + \frac{n}{2}s$$

$$\approx \frac{\beta\sqrt{n}}{2v} \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \frac{n}{2}s \quad (44)$$

将式(42)和式(44)代入式(43),得

$$T^{RPP} \leq$$

$$\frac{\lambda(1/\lambda^2 + \sigma_s^2/m)}{2(1-\rho - \frac{\lambda\beta}{mv\sqrt{n}} \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2)} +$$

$$\frac{\beta\sqrt{n}}{2v} \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \frac{n}{2}s \quad (45)$$

为分析分区求解策略的渐进性,引入变量  $y$ . 令

$$y = \frac{\lambda\beta}{mv(1-\rho)\sqrt{n}} \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (46)$$

从式(46)解出  $n$  并将其代入式(45),计算得

$$T^{RPP} \leq \frac{\lambda(1/\lambda^2 + \sigma_s^2/m)}{2(1-\rho)(1-y)} + \frac{\lambda\beta^2}{2mv^2(1-\rho)y} \times$$

$$\left( \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)^2 +$$

$$\frac{s\lambda^2\beta^2}{2m^2v^2(1-\rho)^2y^2} \left( \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)^2 \quad (47)$$

由式(46)知,变量  $y$  是车辆平均行驶时间  $\frac{\beta \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\sqrt{n}}$  /  $v$  与  $m(1-\rho)/\lambda$  的比值. 由排队论知,当  $\rho \rightarrow 1$  时,变量  $y$  的最优值  $y^*$  接近于1. 将式(47)中不等式的右边部分在  $y = 1$  处进行线性化处理得

$$y^* \approx 1 - \frac{v \sqrt{m(1/\lambda^2 + \sigma_s^2/m)(1-\rho)/(1+\rho)}}{\beta \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (48)$$

将式(48)代入式(47)计算得

$$T^{RPP} \leq \frac{\beta\lambda \sqrt{(1/\lambda^2 + \sigma_s^2/m)(1+\rho)}}{2v \sqrt{m}(1-\rho)^{3/2}}$$

$$\iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \frac{\lambda\beta^2}{2m^2(1-\rho)} \times$$

$$\left( \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)^2 + \frac{s\lambda^2\beta^2}{2m^2v^2(1-\rho)^2} \times$$

$$\left( \iint_{(x_1, x_2) \in A_j} f^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)^2 \quad (49)$$

由式(49)、式(35)及式(33)计算得

$$\frac{T^{RPP}}{T_H^*} \leq \frac{m\beta^2}{2\gamma^2} \quad (50)$$

证毕.

由定理5知,需求密集时分区求解策略下期望系统时间  $T^{RPP}$  与  $T_H^*$  之间的渐近程度不受服务强度增加的影响. 因此,需求密集情况下分区求解策略求解需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题具有一定的稳定性.

### 3 仿 真

为了验证分区求解策略求解需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题的有效性,在此利用VB编程,仿真比较需求服从一般分布情形下,随机队列中位策略(SQMP)、多车场随机队列中位策略(mSQMP)、堆栈策略(SCP)以及分区求解策略(RPP)在需求稀少、需求密集两种极端情况以及整个服务强度有效区间内的求解效果;仿真比较需求服从一般分布和需求服从均匀分布两种情形下,分区求解策略的求解效果.

参数设置如下,区域  $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 5^2\}$  (单位: km), 车辆数  $m = 2$ , 车辆运行速度  $v = 40\text{km/h}$ , 模拟总时间取 480min (即 8h), 模拟时间步长取 1min, 模拟次数取 50 次. 最短路径的优化方法采用车辆路径问题路径内各节点优化常用的 2-opt 法<sup>[17]</sup>. 假设顾客出发地的概率密度为

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\eta}, & (x_1, x_2) \in A_1 \\ \frac{1}{2(1-\eta)}, & (x_1, x_2) \in A_2 \end{cases},$$

$$\eta \in (0, 1) \quad (51)$$

子区域  $A_1$  和  $A_2$  的面积占区域  $A$  面积的百分比分别为  $\eta$  和  $1 - \eta$ .

#### 3.1 需求服从一般分布情形下,不同求解策略求解效果的仿真比较

该仿真分为两个部分,一是对公式(51)中  $\eta$  取特殊值进行仿真,以便就不同需求情况下各

求解策略的求解效果进行较为深入的比较分析;二是随机产生  $\eta$  的值进行仿真,以便将分区求解策略求解的有效性推广到更一般的情形进行验证.

1)  $\eta$  取特殊值进行仿真

取  $\eta = 1/3$ ,则由式(51) 得

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & (x_1, x_2) \in \Lambda_1 \\ \frac{3}{4}, & (x_1, x_2) \in \Lambda_2 \end{cases} \quad (52)$$

则子区域  $\Lambda_1$  和  $\Lambda_2$  的布局见图 1 所示. 需求稀少(即  $\rho \rightarrow 0$ )、需求密集(即  $\rho \rightarrow 1$ ) 两种极端情况以及整个服务强度有效区间(即  $\rho \in (0,1)$ ) 内,各策略系统时间见图 2、图 3 和图 4 所示,系统时间标准差见图 5、图 6 和图 7 所示. 其中,图 2、图 3、图 4 中系统时间的单位是 min.

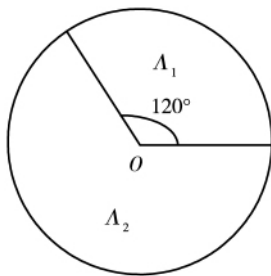


图 1 顾客出发地的区域分布

Fig. 1 Regional distribution of customers' departure places

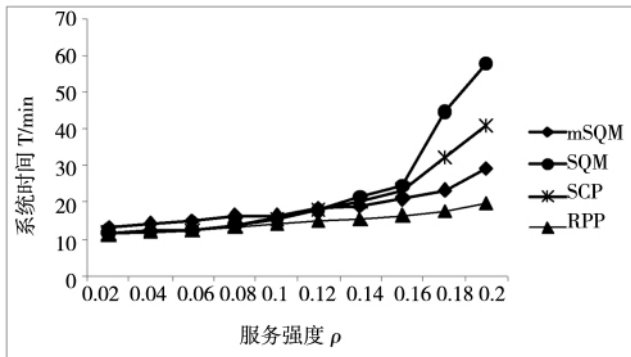


图 2 需求稀少情况下系统时间对比

Fig. 2 Comparison of system time in light traffic

由图 2 知,在需求非常稀少情况下(图中为  $\rho \leq 0.1$ ),四种求解策略的系统时间非常接近,但随着服务强度的增加,mSQM、SQM、SCP 策略下系统时间出现明显的增加,RPP 策略与这三种策略相比,优势越来越明显.

由图 3 知,需求密集情况下,四种求解策略中

mSQM、SQM 策略的系统时间较大,表明适合需求稀少情况的求解策略在需求密集情况下,解的质量较差;SCP 策略的系统时间相对较小;RPP 策略的系统时间最小.

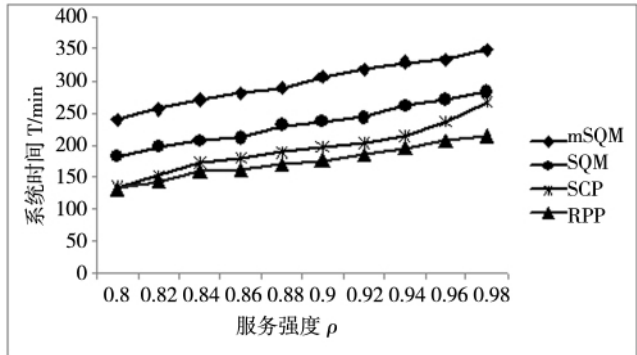


图 3 需求密集情况下系统时间对比

Fig. 3 Comparison of system time in heavy traffic

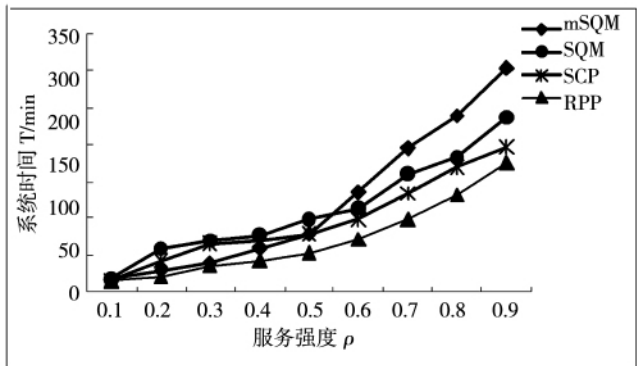


图 4 服务强度有效区间内系统时间对比

Fig. 4 Comparison of system time in effective range of traffic intensity

图 4 知,需求较为稀少情况下(图中为  $\rho \leq 0.5$ ),SQM 和 SCP 策略的系统时间较大,而 mSQM 和 RPP 策略的系统时间较小;需求较为密集情况下(图中为  $\rho > 0.5$ ) mSQM 和 SQM 策略的系统时间较大,而 SCP 和 RPP 策略的系统时间较小;整个服务强度有效区间内,四种求解策略中 RPP 下系统时间为最小.

总之,从系统时间的角度来看,无论需求稀少、需求密集两种极端情况下,还是在整个服务强度有效区间内,RPP 求解的质量均较好.

由图 5 知,在需求较为稀少情况下(图中为  $\rho \leq 0.16$ ),SQM 和 mSQM 的系统时间标准差相对较小,但随着服务强度的增加,两者均出现明显的增加. 这表明,在需求非常稀少情形下,SQM 和 mSQM 两种策略解的稳定性较好,但随着服务强

度的增加,解的稳定性较差. SCP 策略的系统时间标准差为四种求解策略中最大的. 这表明, 适合需求密集情况的 SCP 策略在需求稀少情况下, 解的稳定性非常差. RPP 策略的系统时间标准差是四种求解策略中最小的, 即便服务强度逐渐增加, 其值也能保持在较低水平. 这表明, RPP 策略解的稳定性较好, 且不受服务强度增加的影响.

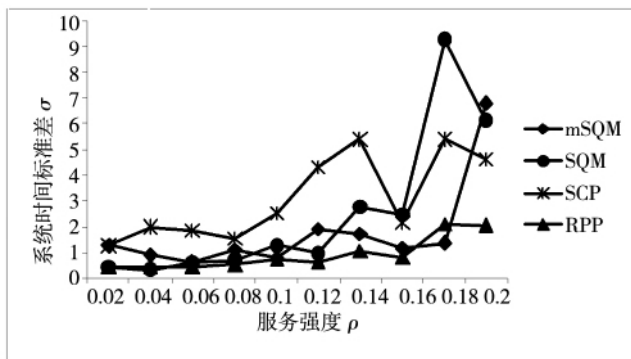


图5 需求稀少情况下系统时间标准差对比

Fig.5 Comparison of system time standard deviation in light traffic

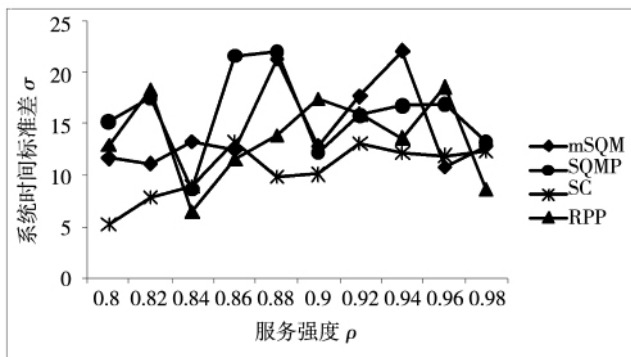


图6 需求密集情况下系统时间标准差对比

Fig.6 Comparison of system time standard deviation in heavy traffic

由图6知,需求密集情况下, SQM 和 mSQM 策略的系统时间标准差较大,而 SCP 和 RPP 策略的系统时间标准差较小. 这表明需求密集情况下, 适合需求稀少情况的求解策略解的稳定性较差, 而适合需求密集情况的求解策略解的稳定性较好. 与 SCP 相比, RPP 策略的系统时间标准差较大. 总之, 需求密集情况下, 从解的稳定性来看, RPP 策略虽比 SCP 稍差, 但比 SQM 和 mSQM 两种策略都好.

由图7知, 服务强度有效区间内, SQM 和 mSQM 策略的系统时间标准差较大, 而 SCP 和 RPP 策略的系统时间标准差较小, 且 SCP 和 RPP 策略无明显优劣之分.

因此, 从系统时间标准差的角度来看, 无论需求稀少、需求密集两种极端情况下, 还是在整个服务强度有效区间内, RPP 求解的稳定性均较好.

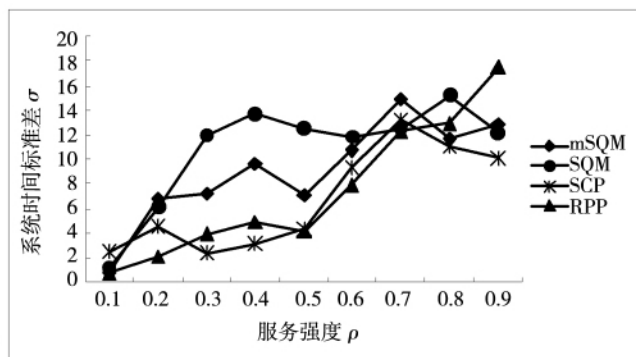


图7 服务强度有效区间内系统时间标准差对比

Fig.7 Comparison of system time standard deviation in effective range of traffic intensity

## 2) 随机产生 $\eta$ 值进行仿真

随机产生四个  $\eta$  的值, 分别为 0.21、0.44、0.59、0.85. 根据  $\eta$  的四个取值及式(51) 计算出对应的概率密度, 并据此仿真四种求解策略在需求稀少、需求中等和需求密集(其服务强度分别取  $\rho = 0.1$ 、 $\rho = 0.5$  和  $\rho = 0.9$ ) 时的求解结果, 见表1所示.

由表1知, 除服务强度  $\rho = 0.1$  情况下,  $\eta = 0.21$ 、 $\eta = 0.85$  时系统时间最小的求解策略分别是 SCP 策略和 mSQM 策略, 以及服务强度  $\rho = 0.9$  情况下, 系统时间标准差最小的求解策略是 mSQM 策略以外, 其余不同概率分布、不同服务强度下, 系统时间最小、系统时间标准差最小的求解策略均是 RPP 策略. 因此, 当顾客出发地为更一般的概率分布时, 不同服务强度下, 无论从系统时间的角度还是从系统时间标准差的角度来看, 与已有 SQM、mSQM、SCP 三种策略相比, RPP 策略均有较好表现.



表 1 系统时间及其标准差对比

Table 1 Comparison of system time and its standard deviation

服务强度	$\eta$ 取值	mSQM	SQM	SCP	RPP
0.1	0.21	15.78	16.96	<b>14.56</b>	15.44
	0.44	15.06	16.87	16.82	<b>14.98</b>
	0.59	15.36	18.43	16.81	<b>14.18</b>
	0.85	<b>14.46</b>	15.95	15.55	14.70
	平均值( min)	15.17	17.05	15.94	<b>14.83</b>
	标准差	0.56	1.03	1.09	<b>0.53</b>
0.5	0.21	82.18	118.95	84.17	<b>59.27</b>
	0.44	89.90	101.75	75.04	<b>60.41</b>
	0.59	87.85	116.67	80.76	<b>53.93</b>
	0.85	71.08	108.29	74.78	<b>53.02</b>
	平均值( min)	82.75	111.42	78.69	<b>56.66</b>
	标准差	8.44	7.91	4.58	<b>3.72</b>
0.9	0.21	315.41	246.08	196.07	<b>182.71</b>
	0.44	307.22	247.92	191.91	<b>171.15</b>
	0.59	305.65	232.58	214.12	<b>188.36</b>
	0.85	316.89	241.77	189.35	<b>192.15</b>
	平均值( min)	311.29	242.09	197.86	<b>183.59</b>
	标准差	<b>5.68</b>	6.84	11.19	9.16

注: 表中加粗项为该行中的最小值.

### 3.2 不同需求分布情形下分区求解策略求解效果的仿真比较

由式(52)可计算出顾客出发地出现在子区域  $A_1$  和  $A_2$  的概率均为 0.5. 由分区求解策略描述可知, 一般分布假设条件下, 两辆车空闲时分别停留在概率相等的两个子区域  $A_1$  和  $A_2$  的重心位置; 均匀分布假设条件下, 两辆车空闲时分别停留在图 1 中任意两个半圆(此处采用上下两个半圆, 分别记为  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ ) 的重心位置. 仿真计算 50 次的平均系统时间及各区域的顾客数, 分别见图 8、图 9 所示.

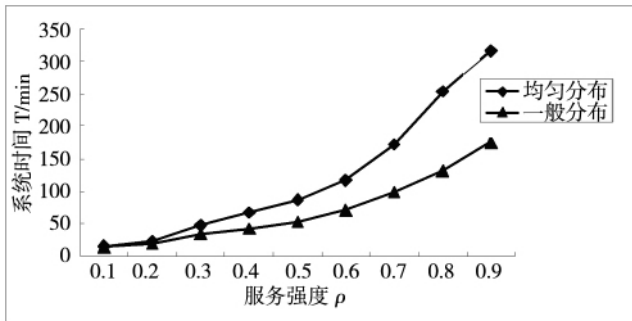


图 8 不同需求分布情形下系统时间对比

Fig. 8 Comparison of system time under different demand distribution

由图 8 可知, 当需求较为稀少的情况下(图中为  $\rho \leq 0.2$ ), 两种假设条件下的系统时间几乎相等; 但随着服务强度的增加, 均匀分布假设条件下的系统时间明显大于一般分布假设条件下的系统时间.

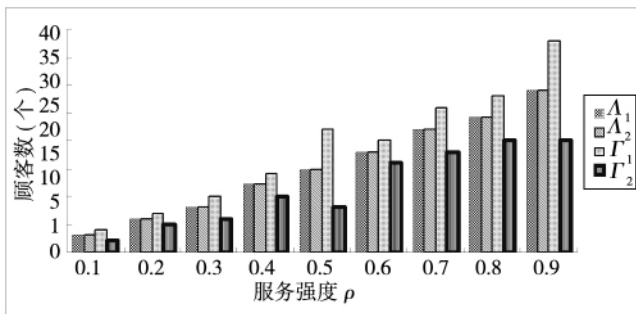


图 9 不同需求分布情形下各子区域顾客数对比

Fig. 9 Comparison of customers number in each subregion under different demand distribution

由图 9 可知, 在整个服务强度的有效区间, 均匀分布假设条件下, 出发地在子区域  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  的顾客数不等, 则两辆车服务的顾客数不相等, 即服务子区域  $\Gamma_1$  的车辆比服务子区域  $\Gamma_2$  的车辆相同时间的负荷出现了明显差异, 将导致某些时间段

里,一辆车很繁忙,另一辆车很空闲;而一般分布假设条件下,出发地在子区域  $A_1$  和  $A_2$  的顾客数相等,则在任意服务强度下两辆车的负荷都是均衡的。

## 4 结束语

在随机动态车辆路径问题中,合理安排车辆及其行车路线是提高服务水平、降低服务费用的重要手段。然而,在时间要求较高的一类随机动态车辆路径问题应用中,如紧急救援、快递服务、故障修理服务等,时间因素通常比成本因素重要得多,传统考虑成本因素的求解方法往往难以适用。根据此类应用中存在的排队现象,本文针对其中

需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题,利用排队论分别推导出需求稀少和需求密集情况下期望系统时间的下界,提出一种求解该问题的分区求解策略。据渐近性分析知,需求稀少时,分区求解策略近似为该问题的最优求解策略;需求密集时,分区求解策略为该问题的一种有效求解策略。据仿真结果知,求解需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题时,在需求稀少、需求密集两种极端情况以及整个服务强度有效区间内,相对于随机队列中位策略、多车场随机队列中位策略及堆栈策略而言,分区求解策略均能得到质量较高的解,且其解的稳定性较好。因此,分区求解策略是一种适合需求服从一般分布的随机动态装卸混合问题的求解策略。

## 参 考 文 献:

- [1] Bruce L, Golden, Raghavan S, et al. The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges [M]. Berlin: Springer, 2008: 3 - 199.
- [2] Psaraftis H N. Vehicle Routing: Methods and Studies [M]. North Holland: Elsevier Science Publishers, 1988: 223 - 248.
- [3] Tan K C, Cheong C Y, Goh C K. Solving multiobjective vehicle routing problem with stochastic demand via evolutionary computation [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 177(2): 813 - 839.
- [4] Xie Binglei, Aa Shi, Li Jun. Application of genetic algorithm in vehicle routing problem with stochastic demands [C]. Proceedings of 2006 Intelligent Control and Automation, Dalian, China: IEEE, 2006, 7405 - 7409.
- [5] 谢秉磊, 安 实, 郭耀煌. 随机车辆路径问题的多回路优化策略 [J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(2): 167 - 171.  
Xie Binglei, An Shi, Guo Yaohuang. Multi-tour optimization policy for stochastic vehicle routing problem [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2007, 27(2): 167 - 171. (in Chinese)
- [6] Wu Taihsi, Huang Chinchih, Yang Yishu. A tabu search approach for the deterministic and stochastic vehicle fleet mix and routing problem [J]. Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, 2001, 18(5): 102 - 112.
- [7] Montemanni R, Gambardella L, Rizzoli A, et al. Ant colony system for a dynamic vehicle routing problem [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2005, 10(17): 327 - 343.
- [8] 王 芳, 丁海利, 高成修. 改进的粒子群优化算法在随机需求车辆路径问题中的应用 [J]. 武汉大学学报(理学版), 2007, 53(1): 41 - 44.  
Wang Fang, Ding Haili, Gao Chengxiu. Advanced particle swarm optimization for the vehicle routing problem with stochastic demands [J]. Journal of Wuhan University: Natural Science Edition, 2007, 53(1): 41 - 44. (in Chinese)
- [9] Bertsimas D J, Ryzin G V. A stochastic and dynamic vehicle routing problem in the Euclidean plane [J]. Operations Research, 1991, 39(4): 601 - 615.
- [10] Bertsimas D J, Ryzin G V. Stochastic and dynamic vehicle routing in the Euclidean plane with multiple capacitated vehicle [J]. Operations Research, 1993, 41(1): 60 - 76.
- [11] Bertsimas D J, Van Ryzin G. Stochastic and dynamic vehicle routing with general demand and interarrival time distributions [J]. Advances in Applied Probability, 1993, 25(4): 947 - 978.
- [12] 郭耀煌, 谢秉磊. 一类随机动态车辆路径问题的策略分析 [J]. 管理工程学报, 2003, 17(4): 114 - 115.  
Guo Yaohuang, Xie Binglei. Policy analysis on a stochastic dynamic vehicle routing problem [J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2003, 17(4): 114 - 115. (in Chinese)

- [13] 郭耀煌, 钟小鹏. 动态车辆路径问题排队模型分析 [J]. 管理科学学报, 2006, 9(1): 33–37.  
Guo Yaohuang, Zhong Xiaopeng. Analysis of the queuing model of dynamic vehicle routing problem [J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(1): 33–37. (in Chinese)
- [14] 谢秉磊, 毛科俊, 安实. 应急物流运输中的车辆调度策略分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(3): 151–155.  
Xie Binglei, Mao Kejun, An Shi. Policy analysis of vehicle dispatching in emergency logistics [J]. Journal of Southwest University( Natural Science Edition), 2007, 29(3): 151–155. (in Chinese)
- [15] Swihart M R, Papastavrou J D. A stochastic and dynamic model for the single-vehicle pick-up and delivery problem [J]. European Journal of Operational Research, 1999, 114(3): 447–464.
- [16] Schleaf D, Parry M, Tu Shuju, et al. Application of geometric probability techniques to the evaluation of interaction energies arising from a general radial potential [J]. Journal of Mathematical Physics, 1999, 40(2): 1103–1112.
- [17] Lin S, Kernighan B W. An effective heuristic algorithm for the travelling salesman problem [J]. Operations Research, 1973, 21(2): 498–516.

## Region partitioning policy for stochastic dynamic pick-up and delivery problem

CHEN Jiu-mei<sup>1,2</sup>, ZHANG Xu-mei<sup>2</sup>, XIAO Jian<sup>3</sup>, DAN Bin<sup>2</sup>

1. Strategic Planning Department, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. College of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
3. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 400044, China

**Abstract:** Region partitioning policy is proposed to solve stochastic dynamic pick-up and delivery problem with general demand distributions. The asymptotic properties of this policy in light and heavy traffic are analyzed respectively. Simulation is made to compare the solution effect of region partitioning policy, stochastic queue median policy, m stochastic queue median policy and stacker crane policy under general demand distributions assumptions. Another simulation is made to compare the solution effect of region partitioning policy between general and uniformly demand distributions. Results indicate that region partitioning policy is an effective policy to solve stochastic dynamic pick-up and delivery problem with general demands distributions.

**Key words:** stochastic dynamic pick-up and delivery problem; region partitioning policy; vehicle routing problem; queuing theory; simulation