

# 具有多元权值约束的鲁棒 LPM 积极投资组合<sup>①</sup>

凌爱凡<sup>1</sup>, 杨晓光<sup>2</sup>, 唐 乐<sup>3</sup>

(1. 江西财经大学应用金融研究中心, 金融学院, 南昌 330013;

2. 中国科学院管理、决策与信息系统重点实验室, 北京 100190; 3. 江西科技学院, 南昌 330098)

**摘要:** 在用方差控制投资组合风险的同时, 由于方差的对称性导致投资组合的收益也受到限制. 相比之下, 下偏距 (lower partial moment: LPM) 由于具有只控制风险, 而不限制收益的特点, 在近年来倍受关注. 但在非正态假设下, LPM 无法获得良好的解析性质. 在对资产收益分布未知的假设下, 通过使用最坏情形下的 LPM 来度量投资组合的损失, 提出了具有多元权值约束的鲁棒积极投资组合问题, 并获得了具有  $m(m=0, 1, 2)$ -阶 LPM 约束的鲁棒积极投资组合问题的解析解. 通过分析解的性质和比较问题的有效前沿, 得到了许多有趣的和新颖的结果. 数值结果比较表明, 鲁棒 LPM 模型比经典的均值-方差模型具有许多更好的性能.

**关键词:** 鲁棒投资组合; 积极投资组合管理; 跟踪误差; 下方风险度量; 权值约束

**中图分类号:** F830.59; F224.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2013)08-0031-16

## 0 引言

自 1992 年 Roll<sup>[1]</sup> 首次将 Markowitz<sup>[2]</sup> 的均值-方差投资理论应用于积极投资组合管理问题以来, 积极投资组合问题在基金管理和投资组合性能度量方面的应用得到了迅速的发展, 涌现出了许多研究成果, 如文献 [3-8]. 然而这些研究主要还是基于使用方差来度量投资组合的风险. 正如 Markowitz<sup>[9]</sup> 提到, 方差由于是关于均值对称的, 因此在控制损失的同时, 也控制了收益. 为了克服方差的这一不足, 许多学者做了大量研究, 如: Bawa<sup>[10]</sup> 提出使用下偏距 (lower partial moment: LPM) 来度量风险, 也可见文献 [11] 关于方差与 LPM 的比较.

与方差相比, LPM 不仅能有效控制投资组合的损失, 而且具有不限制组合收益的特点. 设  $X$

是随机变量  $\rho$  是预先确定的常数,  $m$  是固定的常数,  $m$ -阶 LPM 可以定义如下

$$LPM_m(\rho) = E[(\rho - X)_+]^m$$

其中  $(a)_+ = \max(a, 0)$ ,  $E[\cdot]$  表示期望. 根据这个定义, 不难发现, 当  $m=0, 1, 2$  时, 有

$$LPM_m(\rho) = E[(\rho - X)_+]^m = \begin{cases} P\{X \leq \rho\}, & m=0 \\ E[(\rho - X)_+], & m=1 \\ E[(\rho - X)_+]^2, & m=2 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $P[\cdot]$  表示概率. 这表明  $LPM_0$  表示随机变量  $X$  取值小于常数  $\rho$  的概率,  $LPM_1$  为  $X$  小于  $\rho$  的条件期望, 而  $LPM_2$  是  $X$  的下半方差 (semi-variance).

虽然 LPM 可以克服方差关于损失与收益对称的不足, 但应用 LPM 来度量风险时, 除非对资产收益作正态分布的假设, 否则不能像均值-方差模型那样能够获得问题的解析解. 大量的经验

① 收稿日期: 2011-05-04; 修订日期: 2013-03-03.

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(70933003); 国家自然科学基金青年基金资助项目(71001045); 中国博士后基金面上资助项目(2010048049; 2012T50147); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目(13YJCZH160); 江西省自然科学基金资助项目(20114BAB211008); 江西财经大学优秀青年学术人才支持计划资助项目.

作者简介: 凌爱凡(1977—), 男, 江西新建人, 博士后, 副教授, 研究员. Email: aifling@163.com

研究发现,资产收益具有“尖峰厚尾”的分布特点,因此正态分布假设并不符合资产收益的真实分布.资产分布不确定性情形下的鲁棒投资组合问题正是在这一背景下提出来的.鲁棒模型由于能有效处理概率分布或参数的不确定性,在近年来得到快速发展,出现了大批有意义的研究成果,如 Goldfarb 和 Iyengar<sup>[12]</sup> 在区间型参数不确定集下,研究了鲁棒因子投资组合模型;他们的模型后来被 Erdoğ an<sup>[13]</sup> 等进一步推广到鲁棒的积极投资组合管理问题中;El Ghaoui 等<sup>[14]</sup> 研究了分布不确定情形下的最坏 - VaR 投资组合模型;在多面体不确定性集情形下, Costa 和 Paiva<sup>[15]</sup> 研究了均值 - 方差下的鲁棒跟踪误差投资组合问题.最近 Zhu 等<sup>[16]</sup> 基于离散不确定分布的假设,研究了具有 LPM 约束的鲁棒投资决策问题. Glabadanidis<sup>[17]</sup> 应用序列逐点回归方法,研究了跟踪误差投资组合问题的有效前沿.更多关于鲁棒投资组合问题的研究可以参阅 Fabozzi 等<sup>[18]</sup> 的最近综述论文.

近年来,国内外基金行业发展非常迅速,基金品种极多,不同类型的基金,往往对其投资对象均有一定的限制.如在我国股票型基金中,一般限定其投资于股票的资金占总资金的比例不得低于 80% 或 85%.而在债券基金中,要求投资于股票的资金占总资金的比例不得高于 20% 等.类似的还有 ETF、QFII 和 QDII 等基金,均对其投资对象进行了一定的资金限制.本文将这种约束称为权值约束(weights constraints).然而,非常遗憾的是,在当前的积极投资组合管理研究文献中,很少有将权值约束结合到模型中.最近, Bajeux-Besnainou 等<sup>[19]</sup> 在 Roll 的均值 - 方差跟踪误差模型中引入了权值约束,研究发现,加入权值约束后,受到权值约束的资产投资比例会相应下降,权值约束无论是等式或不等式形式,最优解总是在权值约束的边界处取到,即权值约束总是取到等式.另外,对于整个投资组合来讲,权值约束会降低组合的超额收益率和信息比(information ratio)或夏普比(Sharpe ratio),因此在投资组合问题研究中,不能被忽略.

由于文献[19]是使用方差控制投资组合的

风险,因此仍然存在 Markowitz<sup>[9]</sup> 提到的不足.另外,均值 - 方差模型实际上是与资产收益服从正态分布情形下的二次效用最大化模型等价的,正如前文提到,资产收益分布与正态分布相差甚远.再有就是文献[19]仅仅考虑了单权值约束情形,但实践中会存在多元权值约束,即在限制某些资产的投资权重不超过某个常数比例的同时,也会限制另外一些资产的投资比例不会超过另一个常数比例.

基于文献[19]中的这些不足,本文提出了具有多元权值约束和分布不确定性的鲁棒跟踪误差投资组合问题.在假设最坏情形下的 LPM(worst-case LPM: WCLPM)不超过投资者能够承受的风险时,最大化投资组合的期望收益.本文的研究有两个特色,一是在鲁棒投资决策模型引入了多元权值约束,以使得模型更加符合现实,通过构造半定矩阵,能够很好地把权值约束吸纳到模型中去;二是获得了模型解析解.一般的鲁棒投资组合问题由于其考虑问题的复杂性,往往很难获得解析解,而通过对 WCLPM 进行等价变换,将问题转化为凸二次规划,可以很方便获得问题的解析解.通过有效前沿和数值分析发现,  $\rho$  - 阶 LPM 模型实际上等价于具有多元权值约束的最大信息比问题, 1 - 阶 LPM 模型在获得最大收益和信息比方面具有比较好优势,而 2 - 阶 LPM 模型相对比较保守,该模型在某些条件下与传统的均值 - 方差模型一致.

## 1 鲁棒跟踪误差投资组合问题

记  $n$  个风险资产的收益率向量为  $r = (r_1, \dots, r_n)^T \in R^n$ , 其中  $r_i$  表示第  $i$  个风险资产的毛收益率.投资者的头寸记为向量  $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in R^n$ ,  $w_i$  表示投资于第  $i$  个资产所占全部财富的比例.向量  $w_b \in R^n$  表示基准(benchmark)投资组合.定义投资组合  $w$  相对于基准  $w_b$  的跟踪误差为  $\Delta w = (w - w_b)^T r$ .下面,不对资产收益率  $r$  的分布  $F$  作任何假设,仅假设分布  $F$  属于一大类分布簇  $D$  中,投资者可以通过经验获得  $r$  的某些信息,如均值和方差.据此,有如下关于 WCLPM<sub>n</sub>

的定义.

定义 1 对于任意  $m \geq 0$  和预先给定的实数  $\rho$ , 随机变量  $X$  关于常数  $\rho$  在分布簇  $D$  下的 WCLPM<sub>m</sub> 定义为

$$WCLPM_m(\rho) = \sup_{F \in D} E [((\rho - X)_+)^m]$$

根据 WCPLM 的定义, 本文所考虑的具有多元权值约束的鲁棒均值 - WCLPM<sub>m</sub> 问题能表示为

$$\begin{aligned} & \max_w \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{s. t. } & \sup_{F \in D} E [((\mathbf{w}_b^T \mathbf{r} - \mathbf{w}^T \mathbf{r})_+)^m] \leq \sigma_m, \quad (2) \\ & \mathbf{e}_{I_i}^T \mathbf{w} = (\leq) q_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned}$$

在问题(2)中, 第2类约束中  $I_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  是投资组合的第  $i$  个约束资产集;  $q_i \in [0, 1]$  ( $i = 1, \dots, p$ ) 是预先给定的  $p$  个常数;  $\mathbf{e}_{I_i}$  为  $n$  维向量, 如果它的第  $j$  个元素在资产集  $I_i$  中, 则它的第  $j$  个元素取值为 1, 否则取值为 0; 符号 ‘ $= (\leq)$ ’ 表示可以取等式或不等式两种情形, 称这类约束为权值约束, 该约束表示资产集  $I_i$  中的资产权值之和不能超过预先设定的比例  $q_i$ . 当  $p = 1$ , 即得到单权值约束, 这是文献[19]中考虑过的情形. 下面, 为了探索简便, 仅考虑  $m = 0, 1, 2$  阶的 WCLPM 和只有等式约束情形的模型, 对于不等式约束, 相关结果可以用同样的方法获得.

因为感兴趣的是探索问题(2)的解析解, 为此, 假设分布不确定集  $D$  为如下形式

$$D = \{\mathbf{r} : E[\mathbf{r}] = \boldsymbol{\mu}, \text{Cov}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Sigma} > 0\}$$

按照文献[13]和[19]中的处理, 将基准投资组合权值  $\mathbf{w}_b$  标准化, 即假设其满足  $\mathbf{e}^T \mathbf{w}_b = 1$ , 其中  $\mathbf{e}$  为  $n$  维全 1 向量. 现引入新的变量  $\mathbf{y} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_b$ , 注意到  $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{w}_b^T \boldsymbol{\mu}$ , 那么, 问题(2)等价地表示成如下问题

$$\begin{aligned} & \max_y \mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{s. t. } & \sup_{r \in D} E [((-y^T \mathbf{r})_+)^m] \leq \sigma_m, \quad (3) \\ & \mathbf{e}_{I_i}^T \mathbf{y} = q_i - \mathbf{e}_{I_i}^T \mathbf{w}_b, \quad i = 1, \dots, p, \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

称  $\mathbf{y}$  为自融资 (self-financing) 组合, 而  $\mathbf{w}$  为全投资 (fully investing) 组合. 在下面的讨论中, 做如下两个假设:

1)  $p + 1$  个向量  $\mathbf{e}, \mathbf{e}_{I_i} (i = 1, \dots, p)$  是线性独立的, 而且  $n > p + 1$ ;

2) 问题(3) 是可行的.

假设 1 是合理的, 因为, 如果存在某个  $\mathbf{e}_{I_k}$ , 使得它能够表示成其他  $p$  个向量的线性组合, 那么  $\mathbf{e}_{I_k}^T \mathbf{y} = q_k - \mathbf{e}_{I_k}^T \mathbf{w}_b$  便是冗余约束, 可以删去. 另外, 根据独立性, 如果  $n = p + 1$ , 依等式权值约束, 所考虑的问题仅有唯一可行解.

假设 2 表示预设常数  $\sigma_m$  不能太小, 为了理论探索方便, 假设  $\sigma_m$  的选取使得问题(3) 是可行的. 下面引入几个引理和一些记号.

引理 1<sup>[20, 21]</sup> 设  $\xi$  是随机变量, 其均值和方差分别为  $\mu_\xi$  和  $\sigma_\xi^2$ ,  $\rho$  是任意的实数. 则下列结论成立:

1) 当  $m = 0$  时

$$\begin{aligned} & \sup_{\xi \sim (\mu_\xi, \sigma_\xi^2)} P\{\xi \leq \rho\} = \\ & \begin{cases} \frac{1}{1 + (\rho - \mu_\xi)^2 / \sigma_\xi^2}, & \rho < \mu_\xi \\ 1, & \rho \geq \mu_\xi \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

2) 当  $m = 1$  时

$$\begin{aligned} & \sup_{\xi \sim (\mu_\xi, \sigma_\xi^2)} E [(\rho - \xi)_+] = \\ & \frac{\rho - \mu_\xi + \sqrt{\sigma_\xi^2 + (\rho - \mu_\xi)^2}}{2} \quad (5) \end{aligned}$$

3) 当  $m = 2$  时

$$\begin{aligned} & \sup_{\xi \sim (\mu_\xi, \sigma_\xi^2)} E [((\rho - \xi)_+)^2] = [(\rho - \mu_\xi)_+]^2 + \sigma^2 \\ & = \begin{cases} \sigma_\xi^2, & \rho \leq \mu_\xi \\ (\rho - \mu_\xi)^2 + \sigma_\xi^2, & \rho > \mu_\xi \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

引理 2<sup>[22]</sup> 对于任意  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ , 记

$$S_1 = \{\mathbf{a}^T \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in D\},$$

$$S_2 = \{\eta \mid E(\eta) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}, \text{Var}(\eta) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}\}$$

则有  $S_1 = S_2$ .

引理 3 对于任意  $\mathbf{r} \in D$ ,  $\eta \in S_2$  和任意的实数向量  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ , 下列等式成立

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in D} E [(\rho - \mathbf{a}^T \mathbf{r})_+^m] = \\ & \sup_{\eta \sim (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a})} E [(\rho - \eta)_+^m] \quad (7) \end{aligned}$$

证明 设  $\tilde{\eta} = \mathbf{a}^T \mathbf{r}$ , 则根据引理 2 有

$$\sup_{r \in D} E [(\rho - \mathbf{a}^T \mathbf{r})_+^m] =$$

$$\sup_{\eta \in S_1} E [ ((\rho - \tilde{\eta})_+)^m ] =$$

$$\sup_{\tilde{\eta} \in S_2} E [ ((\rho - \tilde{\eta})_+)^m ] =$$

$$\sup_{\eta \in S_2} E [ ((\rho - \tilde{\eta})_+)^m ] =$$

$$\sup_{\eta \in \{a^T \mu, \tilde{a}^T \Sigma a\}} E [ ((\rho - \tilde{\eta})_+)^m ]$$

这即得到引理中的结论. 证毕.

引理3建立了单个随机变量  $\eta$  和多元随机向量  $r \in D$  之间的联系, 这种联系对获得问题(3)的解析表示非常有用. 除非特别说明, 用黑体小写字母表示向量, 大写字母表示矩阵, 在不会混淆的情形下  $\rho$  既表示实数, 也表示向量或矩阵. 为了简单, 记  $e_{i_k}$  为  $e_k, k = 1, \dots, p$ , 令  $d_i = q_i - e_i^T w_b$ . 设

$$M = [e_1, \dots, e_p] \in R^{n \times p} \quad d = (d_1, \dots, d_p)^T \in R^p$$

则根据假设1, 向量组  $e_1, \dots, e_p$  和  $e$  是线性独立的, 因此矩阵  $M$  具有列满秩. 设

$$A = M^T \Sigma^{-1} M \in R^{p \times p}$$

则易知, 矩阵  $A$  是正定的. 进一步, 记

$$B = I - MA^{-1}M^T \Sigma^{-1} \in R^{n \times n},$$

$$C = \Sigma^{-1}MA^{-1} \in R^{n \times p}$$

其中  $I$  是具有适当维数的单位矩阵. 根据上述记号, 有如下结论.

引理4

- 1)  $BM = 0$ ;
- 2)  $M^T \Sigma^{-1}B = 0$ ;
- 3)  $B^T C = 0$ ;
- 4)  $B^T \Sigma^{-1}B = \Sigma^{-1}B$ ;
- 5)  $C^T \Sigma C = A^{-1}$ ;
- 6) 矩阵  $B$  是正半定的.

证明 仅仅证明结论6) 其他结论通过直接计算即可得到. 根据结论4) 可知,  $\Sigma^{-1}B$  是正半定的. 因为  $\Sigma^{-1}$  为正定矩阵. 所以  $B$  为正半定矩阵. 证毕.

记

$$a = e^T \Sigma^{-1} e \quad b = e^T \Sigma^{-1} \mu, \quad c = \mu^T \Sigma^{-1} \mu,$$

$$a_0 = e^T C d \quad b_0 = \mu^T C d \quad c_0 = d^T A^{-1} d,$$

$$a_1 = e^T \Sigma^{-1} B e \quad b_1 = e^T \Sigma^{-1} B \mu \quad c_1 = \mu^T \Sigma^{-1} B \mu$$

$$a_2 = a_1 c_1 - b_1^2 \quad b_2 = a_1 b_0 - a_0 b_1 \quad c_2 = a_1 c_0 + a_0^2$$

不失一般性, 假设  $\Sigma^{-1}B \neq 0$ , 则有

$$ac > b^2 \quad a_1 > 0 \quad c_1 > 0 \quad a_2 > 0 \quad c_2 \geq 0.$$

## 2 模型求解

现在根据  $m = 0, 1, 2$ , 将问题(3) 分别转化为如下3个问题

$$\max_y \{y^T \mu : \sup_{r \in D} P[y^T r \leq 0]\} \leq \sigma_0,$$

$$M^T y = d \quad e^T y = 0 \tag{8}$$

$$\max_y \{y^T \mu : \sup_{r \in D} E [(-y^T r)_+]\} \leq \sigma_1,$$

$$M^T y = d \quad e^T y = 0 \tag{9}$$

$$\max_y \{y^T \mu : \sup_{r \in D} E [((-y^T r)_+)^2]\} \leq \sigma_2,$$

$$M^T y = d \quad e^T y = 0 \tag{10}$$

### 2.1 最大化信息比问题

首先, 考虑问题(8). 不等式约束  $P\{y^T r \leq 0\} \leq \sigma_0$  在文献中通常被称为机会约束或 Roy's 安全第一准则. 注意到  $\sigma_0$  的取值小于  $1/2$ , 所以  $\frac{1}{\sigma_0} - 1 > 0$

于是, 根据引理1, 1) 和引理3, 当  $y^T \mu \geq 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \sup_{r \in D} P\{y^T r \leq 0\} \leq \sigma_0 &\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{(-y^T \mu)^2}{y^T \Sigma y}} \leq \sigma_0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(-y^T \mu)^2}{y^T \Sigma y} \geq \left(\frac{1}{\sigma_0} - 1\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{y^T \mu}{\sqrt{y^T \Sigma y}} \geq \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_0} - 1\right)} \end{aligned} \tag{11}$$

上述不等式表明, 投资组合的信息比 (information ratio) 不小于预设的常数. 因此, 问题(8) 实际上是在信息比不小于预设值的情形下, 最大化其期望收益. 基于这个特点, 考虑问题(8) 的如下变形问题

$$\min_y \left\{ \sup_{r \in D} P[y^T r \leq 0] \mid \text{s. t. } M^T y = d \quad e^T y = 0 \right\} \tag{12}$$

应用不等式(11), 即得到如下最大化信息比问题 IR-MWC

$$MAX_{IR} = \max_y \left\{ \frac{y^T \mu}{\sqrt{y^T \Sigma y}} : M^T y = d \quad e^T y = 0 \right\} \tag{13}$$

当没有权值约束时, 容易获得问题(13) 的解析

解,见文献[7].但是,当加入了权值约束时,这些方法均不能直接应用到问题(13)中.本文将考虑两阶段方法,首先,引入一个参数,对问题(13)的解进行参数化,使问题(13)的解是这个参数的函数.然后,对该参数进行最大化,以获得问题(13)的解析解.

**定理 1** 对于问题(13),存在一个实数  $\tau_0$ , 使得其解能表示成如下形式

$$y_{\tau_0}^* = \frac{1}{\tau_0} \left( \Sigma^{-1} B \mu - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1} B e \right) + a_0 \left( \frac{C d}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1} B e}{a_1} \right) \quad (14)$$

**证明** 设  $y_0^*$  是问题(13)的最优解,则  $y_0^*$  满足问题(13)的一阶最优性条件.因此,有

$$\frac{\mu}{\sqrt{(y_0^*)^T \Sigma y_0^*}} - \frac{(\mu^T y_0^*)}{\sqrt{(y_0^*)^T \Sigma y_0^*}} \frac{\Sigma y_0^*}{\sqrt{(y_0^*)^T \Sigma y_0^*}} - \lambda_{01} e - M \lambda_{02} = 0 \quad (15)$$

其中  $\lambda_{01} \in R$  和  $\lambda_{02} \in R^p$  为 Lagrange 乘子. 设

$$\hat{\lambda}_{01} = \lambda_{01} \sqrt{(y_0^*)^T \Sigma y_0^*},$$

$$\hat{\lambda}_{02} = \lambda_{02} \sqrt{(y_0^*)^T \Sigma y_0^*}$$

则等式(15)能简化为

$$\mu - \tau_0 \Sigma y_0^* - \hat{\lambda}_{01} e - M \hat{\lambda}_{02} = 0 \quad (16)$$

其中  $\tau_0 = \frac{(\mu^T y_0^*)}{(y_0^*)^T \Sigma y_0^*}$  为常数. 因此,结合式(16)

和等式约束  $M^T y_0^* = d$  及  $e^T y_0^* = 0$ , 得到

$$y_0^* = \frac{b_1}{\tau_0} \left( \frac{\Sigma^{-1} B \mu}{b_1} - \frac{\Sigma^{-1} B e}{a_1} \right) + a_0 \left( \frac{C d}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1} B e}{a_1} \right)$$

显然  $y_0^*$  是  $\tau_0$  的函数,把  $y_0^*$  记为  $y_{\tau_0}^*$ ,即得到定理的结论. 证毕.

把  $y_{\tau_0}^*$  作为参数  $\tau_0$  的函数,因此,在第二阶段,把  $y_{\tau_0}^*$  代入到问题(13)的目标函数中,并记此时投资组合  $y_{\tau_0}^*$  的信息比为  $MAX_{\tau_0}$ . 显然,  $MAX_{\tau_0}$  也是参数  $\tau_0$  的函数. 因此通过参数  $\tau_0$  最大化  $MAX_{\tau_0}$ ,即可得到问题(13)的解,即

$$MAX_{IR} = \max_{\tau_0 > 0} MAX_{\tau_0} = \max_{\tau_0 > 0} \frac{(y_{\tau_0}^*)^T \mu}{\sqrt{(y_{\tau_0}^*)^T \Sigma y_{\tau_0}^*}} \quad (17)$$

设  $\tau_0^*$  是问题(17)的最优解,则投资组合  $y_{\tau_0^*}^*$  便是问题(13)的最优解,因此有如下结论,其证明

是直接的,略去.

**定理 2** 当  $a_1 b_0 - a_0 b_1 > 0$ , 问题(17)的最优解为

$$\tau_0^* = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1 c_0 + a_0^2}$$

其对应于问题(13)的最优解为

$$y_{IR}^* = \frac{(a_1 c_0 + a_0^2)}{a_1 b_0 - a_0 b_1} \left( \Sigma^{-1} B \mu - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1} B e \right) + a_0 \left( \frac{C d}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1} B e}{a_1} \right)$$

问题(13)通常和下面的具有多元权值约束的均值-方差决策问题(MV-MWC)联系在一起

MV-MWC:

$$\{y^T \mu : y^T \Sigma y \leq \sigma_0, M^T y = d, e^T y = 0\} \quad (18)$$

其中  $\sigma_0$  是个预设参数. 如果  $p = 0$ , 则式(18)是 Roll 研究的跟踪误差问题. 如果  $p = 1$ , 即  $M = e_1$ , 这是文献[19]所考虑的单权值约束问题. 因此问题(18)是这些问题的一般化. 下面的定理给出问题(13)和(18)的解之间的联系.

**定理 3** 设  $y_{\tau_0^*}^*$  是问题(13)的最优解,其对应的  $\tau_0^*$  是问题(17)的解. 则存在  $\sigma_0' > 0$ , 使得两个问题(13)和(18)具有相同的最优解.

**证明** 该定理的证明是直接的. 易见,问题(18)的最优解有如下形式

$$y_{\sigma_0'}^* = \frac{\sqrt{a_2(a_1 \sigma_0' - c_2)}}{a_2} \left( \Sigma^{-1} B \mu - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1} B e \right) + a_0 \left( \frac{C d}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1} B e}{a_1} \right)$$

因此,如果对于某个正数  $\tau_0^*$ ,  $y_{\tau_0^*}^*$  是问题(13)的最优解,那么令  $\frac{\sqrt{a_2(a_1 \sigma_0' - c_2)}}{a_2} = 1/\tau_0^*$ . 解这个关于  $\sigma_0'$  的方程,便得到了该定理所要的结论.

证毕.

设  $y_0^*$  是问题(13)的最优解,根据定理 1 的证明,如果  $\sigma_0'$  满足

$$\frac{\sqrt{a_2(a_1 \sigma_0' - c_2)}}{a_2} = \frac{(y_0^*)^T \Sigma y_0^*}{\mu^T y_0^*} \quad (19)$$

则问题(18)的最优解也是问题(13)的最优解. 因此问题(13)和(18)的联系能表示为: 求解问题(13)将能得到最大信息比投资组合,而问题

(18) 的解可能不具有最大信息比,但是如果选取满足式(19)的 $\sigma_0$ ,则所得问题(18)的最优解也能达到最大信息比.

### 2.2 WCLPM<sub>1</sub> 约束问题

考虑问题(9). 根据引理1和引理3, WCLPM<sub>1</sub> 约束能写成如下形式

$$\begin{aligned} \sup_{r \in b} E [(-y^T r)_+] &\leq \sigma_1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} [-y^T \mu + \sqrt{y^T \Sigma y + (-y^T \mu)^2}] &\leq \sigma_1 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y^T \Sigma y - 4\sigma_1 y^T \mu \leq 4\sigma_1^2, \\ y^T \mu \geq -2\sigma_1 \end{cases} & \quad (20) \end{aligned}$$

不难证明下式成立

$$\min_y \{y^T \mu : y^T \Sigma y - 4\sigma_1 y^T \mu \leq 4\sigma_1^2\} > -2\sigma_1$$

这表明不等式 $y^T \mu \geq -2\sigma_1$ 是冗余的. 因此对于任意预设常数 $\sigma_1 > 0$ , 问题(9)能表示成如下二次规划形式(在后文中记为 WCLPM<sub>1</sub>)

$$\begin{aligned} \text{WCLPM}_1 : \max_y \{y^T \mu : y^T \Sigma y - 4\sigma_1 y^T \mu \leq 4\sigma_1^2, \\ M^T y = d \quad e^T y = 0\} \quad (21) \end{aligned}$$

下面定理给出了问题(21)的解析解.

**定理4** 问题(21)的最优解能显式地表示成

$$\begin{aligned} y_1^* &= (\lambda_1 + 2\sigma_1) \left( \Sigma^{-1} B \mu - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1} B e \right) + \\ & a_0 \left( \frac{C d}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1} B e}{a_1} \right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_1 c_1 - b_1^2}} [4(a_1 c_1 - b_1^2 + a_1) \sigma_1^2 + \\ & 4(a_1 b_0 - a_0 b_1) \sigma_1 - (a_1 c_0 + a_0^2)]^{1/2} \end{aligned}$$

证明 设 $y_1^*$ 是问题(21)的最优解. 则根据KKT条件, 有

$$\begin{cases} (1 + 4\sigma_1 \lambda_1) \mu - 2\lambda_{11} \Sigma y_1^* - \lambda_{12} e - M \lambda_{13} = 0 \\ (y_1^*)^T \Sigma y_1^* - 4\sigma_1 y_1^T \mu = 4\sigma_1^2 \\ M y_1^* = d \\ e^T y_1^* = 0 \end{cases} \quad (22)$$

其中 $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_{11} \geq 0$ ,  $\lambda_{12} \in R$ 和 $\lambda_{13} \in R^p$ 分别是Lagrange乘子和乘子向量. 直接求解方程组(22), 能得到定理4中 $y_1^*$ 的解析表示. 证毕.

### 2.3 WCLPM<sub>2</sub> 约束问题

最后, 考虑问题(10). 类似地, WCLPM<sub>2</sub> 约束能转化为下面等价形式

$$((-y^T \mu)_+)^2 + y^T \Sigma y \leq \sigma_2 \quad (23)$$

于是, 问题(10)可以写成如下问题(在后文中记为 WCLPM<sub>2</sub>)

$$\text{WCLPM}_2 : \max_y \{y^T \mu : (23) \quad M y_1^* = d \quad e^T y_1^* = 0\} \quad (24)$$

**定理5** 问题(24)的解能显式地表示成如下形式

$$\begin{aligned} y_2^* &= \frac{a_1 v^* - (a_1 b_0 - a_0 b_1)}{a_1 c_1 - b_1^2} \left[ \Sigma^{-1} B \mu - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1} B e \right] + \\ & a_0 \left[ \frac{C d}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1} B e}{a_1} \right] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} v^* &= \begin{cases} \frac{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{(a_1 + a_2)(a_1 \sigma_2 - c_2) - ((-b_2)_+)^2} + \sqrt{a_2(a_1 \sigma_2 - c_2)}}{a_1(a_1 + a_2)} \left(1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 + a_2}}\right) \frac{(b_2)_+}{b_2} + \\ \frac{(a_1 + a_2) b_2 + a_2(-b_2)_+}{a_1(a_1 + a_2)}, \\ \sigma_2^* \leq \sigma_2 \leq \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1} \\ \frac{b_2}{a_1} + \frac{\sqrt{a_2(a_1 \sigma_2 - c_2)}}{a_1} \geq 0, \\ \sigma_2 > \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1} \end{cases} \quad (25) \end{aligned}$$

其中 $\sigma_2^*$ 为使得问题(24)可行的最小跟踪误差.

证明 记 $v = y^T \mu$ . 能重写式(24)为

$$\begin{aligned} \max_{y, v} \quad & \mu^T y \\ \text{s. t.} \quad & ((-v)_+)^2 + y^T \Sigma y \leq \sigma_2, \\ & M^T y = d, \\ & e^T y = 0, \\ & \mu^T y = v \end{aligned} \quad (26)$$

在此, 把 $v$ 作为辅助变量. 则该问题的Lagrange函数为

$$\begin{aligned} L(y, v; \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}) &= \\ & \mu^T y - \lambda_{21} e^T y - \lambda_{22}^T (M^T y - d) - \\ & \lambda_{23} [((-v)_+)^2 + y^T \Sigma y - \sigma_2] - \lambda_{24} (\mu^T y - v) \end{aligned}$$

其中  $\lambda_{21} \in R$ ,  $\lambda_{22} \in R^p$ ,  $\lambda_{23} \geq 0$  和  $\lambda_{24} \in R$  是 Lagrange 乘子. 设  $(y_2^*, v^*)$  是问题(26) 的最优解, 则解对  $(y_2^*, v^*)$  满足如下最优性条件

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} = -2\lambda_{23}\Sigma y_2^* - \lambda_{21}e - M\lambda_{22} + \\ (1 - \lambda_{24})\mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial v} = -2\lambda_{23}(-v^*)_+ + \lambda_{24} = 0 \\ ((-v^*)_+)^2 + (y_2^*)^T \Sigma y_2^* = \sigma_2 \\ M^T y_2^* = d, e^T y_2^* = 0, \mu^T y_2^* = v^* \end{cases} \quad (27)$$

根据式(27) 中的第 1 个方程, 有

$$y_2^* = -\frac{1}{2\lambda_{23}} [\lambda_{21}\Sigma^{-1}e + \Sigma^{-1}M\lambda_{22} - (1 - \lambda_{24})\Sigma^{-1}\mu]$$

将  $y_2^*$  代入到方程  $M^T y_2^* = d$  中, 得到

$$\lambda_{22} = -[\lambda_{21}A^{-1}M^T \Sigma^{-1}e + 2\lambda_{23}A^{-1}d - (1 - \lambda_{24})A^{-1}M^T \Sigma^{-1}\mu]$$

其中  $A = M^T \Sigma^{-1}M$ . 继续将  $\lambda_{22}$  代入  $y_2^*$  并应用引理 4, 则有

$$y_2^* = \frac{1}{2\lambda_{23}} [(1 - \lambda_{24})\Sigma^{-1}B\mu - \lambda_{21}\Sigma^{-1}Be + 2\lambda_{23}Cd]$$

结合方程  $e^T y_2^* = 0$ , 即有

$$\lambda_{21} = (1 - \lambda_{24}) \frac{b_1}{a_1} + \frac{2a_0}{a_1} \lambda_{23}$$

注意到  $1 - \lambda_{24} = 1 - 2\lambda_{23}(-v^*)_+$ . 因此  $y_2^*$  能够简化为

$$y_2^* = \left( \frac{1}{2\lambda_{23}} - (-v^*)_+ \right) \left( \Sigma^{-1}B\mu - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1}B\mu \right) + a_0 \left( \frac{Cd}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1}Be}{a_1} \right)$$

将  $y_2^*$  代入到式(27) 中的最后一个方程  $\mu^T y_2^* = v^*$  中, 得到

$$\frac{1}{2\lambda_{23}} = \frac{a_1 v^* - (a_1 b_0 - a_0 b_1)}{a_1 c_1 - b_1^2} + (-v^*)_+ \quad (28)$$

另外, 将  $y_2^*$  代入到式(27) 中的第 3 个方程中, 可

以得到  $\frac{1}{2\lambda_{23}}$  的另一个表达式为

$$\frac{1}{2\lambda_{23}} = \frac{1}{a_1 c_1 - b_1^2} \{ (a_1 c_1 - b_1^2) [a_1 \sigma_2 - (a_1 c_0 + a_0^2) - a_1 ((-v^*)_+)^2]^{1/2} + (-v^*)_+ \} \quad (29)$$

因此, 结合式(28) 和(29), 并注意到引理 4, 则  $v^*$  必定满足下面二次方程

$$a_1^2 (v^*)^2 + a_1 a_2 ((-v^*)_+)^2 - 2a_1 b_2 v^* + b_2^2 - a_2 (a_1 \sigma_2 - c_2) = 0 \quad (30)$$

下面根据  $b_2$  的符号讨论方程(30) 的解.

1)  $b_2 \geq 0$ . 注意到  $v^* = \mu^T y_2^* > 0$  是自融资策略  $y_2^*$  超额期望收益. 因此, 一般来讲  $v^*$  是  $\sigma_2$  的增函数. 于是方程(30) 只有唯一的有效正值解

$$v^* = \frac{b_2}{a_1} + \frac{\sqrt{a_2(a_1 \sigma_2 - c_2)}}{a_1} \geq 0 \quad (31)$$

2)  $b_2 < 0$ . 如果  $v^* \leq 0$ , 且  $\sigma_2$  满足  $\sigma_2^* \leq \sigma_2 \leq \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1}$  则方程(30) 的解为

$$v^* = \frac{b_2}{a_1 + a_2} + \frac{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{(a_1 + a_2)(a_1 \sigma_2 - c_2) - b_2^2}}{a_1(a_1 + a_2)} \leq 0 \quad (32)$$

如果  $\sigma_2 > \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1}$ , 方程(32) 右边是正的, 因此方程(32) 不是方程(30) 的解. 因此, 当  $\sigma_2 > \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1}$  时, 方程(30) 的解仍然是方程(31).

综上所述, 方程(30) 的解总能表示成式(25) 的形式. 证毕.

### 3 有效前沿比较

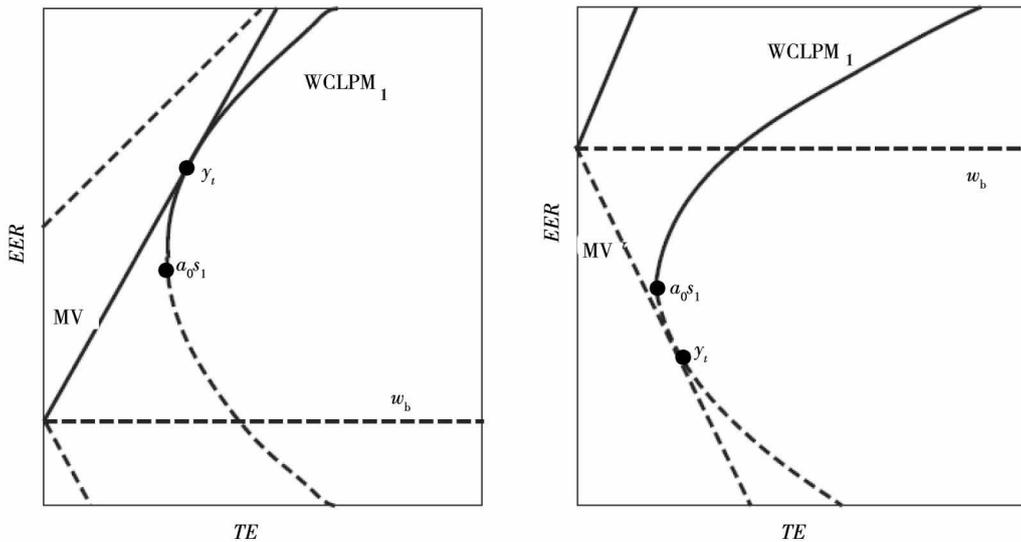
记 Roll 的均值 - 方差模型为 MV, 根据文献 [1] MV 模型的显式解可表示为

$$y_{mv} = \frac{b\sqrt{a}\sqrt{\sigma_{mv}}}{\sqrt{ac - b^2}} u_{mv}, \quad u_{mv} = \left( \frac{\Sigma^{-1}\mu}{b} - \frac{\Sigma^{-1}e}{a} \right)$$

于是  $y_{mv}$  的超额期望收益能写成

$$EER_{mv} = \mu^T y_{mv}^* = \frac{\sqrt{a(ac - b^2)}}{a} TE_{mv}$$

这是超额收益 - 跟踪误差平面(在后文记为  $EER-TE$  平面) 上一条半直线, 见下面图 1 和图 2 中标记为 MV 的半直线的上支, 其中  $TE_{mv} = \sigma_{mv}$  为预设的跟踪误差.

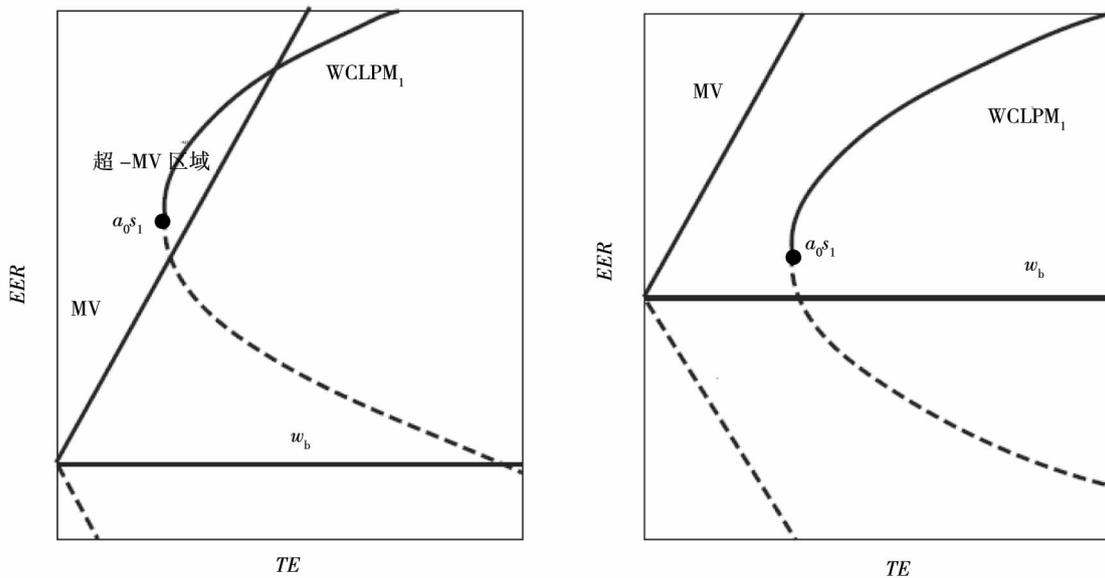


$$\Delta_1 = 0, F_1 > 0, b_2 > 0, \mu_0 > 0$$

$$\Delta_1 = 0, F_1 > 0, b_2 > 0, \mu_0 < 0$$

图1 WCLPM<sub>1</sub>和MV有效前沿相切的情形

Fig. 1 The tangent case of efficient frontiers of WCLPM<sub>1</sub> and MV



$$\Delta_1 > 0, F_1 > 0, b_2 > 0, \mu_0 > 0$$

$$\Delta_1 < 0, F_1 > 0, b_2 > 0, \mu_0 < 0$$

图2 WCLPM<sub>1</sub>和MV有效前沿相交的情形

Fig. 2 The intersectant case of efficient frontiers of WCLPM<sub>1</sub> and MV

### 3.1 模型 WCLPM<sub>1</sub>的有效前沿

根据定理4, 基于 WCLPM<sub>1</sub> 约束的跟踪误差投资组合问题(9)的超额期望收益为

$$\begin{aligned} EER_1 &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_1^* \\ &= \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} \sqrt{(a_1 + a_2) TE_1^2 + 2b_2 TE_1 - c_2} + \\ &\quad \frac{a_2 TE_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1} \end{aligned} \quad (33)$$

其中  $TE_1 = 2\sigma_1$  为跟踪误差. 容易证明 在  $EER -$

$TE$  平面上  $EER_1$  关于  $TE_1$  是一条双曲线. 因为方程(33)能转化为

$$\begin{aligned} a_1 a_2 TE_1^2 - a_1^2 EER_1^2 + 2a_1 a_2 TE_1 \cdot EER_1 + \\ 2a_1 b_2 EER_1 - (b_2^2 + a_2 c_2) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

方程(34)的二次项系数构成的行列式满足

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & -a_1^2 \end{vmatrix} = -a_1^2 a_2 (a_1 + a_2) < 0$$

因此 根据曲线理论<sup>[23]</sup>, 式(34)确实是双曲线方

程, 见图 1 和图 2. 在这两个图中  $a_0 s_1$  为 WCLPM<sub>1</sub> 模型的最小方差投资组合, 其中

$$s_1 = \frac{2\sigma_1}{a_0} \mathbf{u} + \nu = \frac{TE_1}{a_0} \mathbf{u} + \nu,$$

$$\nu = \frac{Cd - \Sigma^{-1}Be}{a_0 - a_1},$$

$$\mathbf{u} = \Sigma^{-1}B\boldsymbol{\mu} - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1}Be$$

记问题(9)的有效前沿为实曲线 WCLPM<sub>1</sub>, 即双曲线的上分支. 为描述 WCLPM<sub>1</sub> 与 MV 模型的有效前沿之间的关系, 需要考虑 WCLPM<sub>1</sub> 问题有效前沿的渐近线. 不难计算, 均值 - WCLPM<sub>1</sub> 的有效前沿的渐近线可表示为

$$EER_1 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2(a_1 + a_2)}}{a_1} TE_1 + \frac{\sqrt{(a_2 + b_2)^2 + a_1 a_2} - (\sqrt{a_2(a_1 + a_2)} - b_2)}{a_2} \quad (35)$$

令

$$s = \frac{\sqrt{a(ac - b^2)}}{a},$$

$$F_1 = s - \frac{a_2 + \sqrt{a_2(a_1 + a_2)}}{a_1},$$

$$Y_1 = \frac{\sqrt{(a_2 + b_2)^2 + a_1 a_2} - (\sqrt{a_2(a_1 + a_2)} - b_2)}{a_2}$$

易见,  $Y_1$  是渐近线(35)在  $EER$  轴的截距, 并满足

$$\begin{cases} Y_1 > 0, & \text{当 } b_2 > 0 \\ Y_1 = 0, & \text{当 } b_2 = 0 \\ Y_1 < 0, & \text{当 } b_2 < 0 \end{cases}$$

因此, 完全决定了渐近线在  $EER$  轴上截距的位置. 注意到  $b_2$  的符号依赖于权值向量  $\mathbf{d}$ , 因此, WCLPM<sub>1</sub> 的有效前沿的位置完全由向量  $\mathbf{d}$  确定. 基于  $F_1$  和  $b_2$ , 能得到如下简单的观察

**观察 1**  $F_1$  是个非负数.

因为  $F_1$  是半直线 MV 与渐近线(35)的斜率之差, 如果  $F_1 < 0$ , 这就意味着半直线  $EER_{mv}$  的斜率比渐近线(35)的小. 则在相同  $EER-ER$  平面上存在实数  $\hat{TE}$ , 对于所有  $TE > \hat{TE}$  时,  $EER_1 > EER_{mv}$  成立. 但是这是不可能的, 因为如果令  $TE \rightarrow \infty$ , 则均值 - WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的方差约束将不起作用. 此时

WCLPM<sub>1</sub> 问题的可行集实际上是 MV 问题的子集. 因此 MV 问题的有效前沿在 WCLPM<sub>1</sub> 的上方, 这与  $EER_1 > EER_{mv}$  矛盾. 这就得到观察 1 的结论.

**观察 2**  $F_1 = 0$  和  $b_2 > 0$  不能同时成立.

观察 2 可以通过类似观察 1 的方法分析.

**观察 3** 当  $b_2 \leq 0$  时, WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的有效前沿不相交.

当  $b_2 \leq 0$  时, 有  $Y_1 \leq 0$ , 则 WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的有效前沿相交的必要条件是  $F_1 < 0$ , 这与观察 1 矛盾.

现在, 考虑  $F_1 > 0$  的情形. 此时  $EER_{mv}$  的斜率比渐近线(35)斜率大. 令

$$\Delta_1 = (b_2^2 + a_2 c_2)(1 + 2s) - a_1 c_2 s^2$$

下面的命题描述了 WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的有效前沿之间的关系.

**命题 1** 1) 如果  $\Delta_1 = 0$ ,  $F_1 > 0$  且  $b_2 > 0$ , 则

WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的有效前沿在点  $TE = \frac{c_2 s}{b_2(1 + 2s)}$  处

相切, 切点所对应的投资组合为

$$y_i = \frac{c_2}{b_2} \left( \Sigma^{-1}B\boldsymbol{\mu} - \frac{b_1}{a_1} \Sigma^{-1}Be \right) + a_0 \left( \frac{Cd}{a_0} - \frac{\Sigma^{-1}Be}{a_1} \right)$$

2) 如果  $\Delta_1 > 0$ ,  $F_1 > 0$  且  $b_2 > 0$ , 则均值 - WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的有效前沿是相交的.

**证明** 根据  $EER_1$  和  $EER_{mv}$  的超额期望收益方程, 解如下方程组

$$\begin{cases} EER = \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} \sqrt{(a_1 + a_2) TE^2 + 2b_2 TE - c_2} + \frac{a_2 TE + b_2}{a_1}, \\ EER = sT \end{cases} \quad (36)$$

则方程组(36)有有效解的条件为  $\Delta_1 \geq 0$ ,  $F_1 > 0$  和  $b_2 > 0$ . 如果  $\Delta_1 = 0$ , 这表明 WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的有效前沿是相切的, 那么方程(36)有唯一解

$$TE^1 = \frac{c_2 s}{b_2(1 + 2s)}$$

将  $TE^1$  代入定理 2 的  $y_1^*$  中, 并令  $2\sigma_1 = TE^1$ , 可以得到切点投资组合, 记为  $y_i$ , 这即是命题的第 1 个结论. 第 2 个结论是显然的,

因为  $\Delta_2 > 0, F_1 > 0$  和  $b_2 > 0$ . 证毕.

对于 WCLPM<sub>1</sub> 的最优投资组合  $y_1^*$  定义其信息比为

$$IR = \frac{\mu^T y_1^*}{TE_1}$$

则容易证明命题1中的  $y_1$  即是 WCLPM<sub>1</sub> 问题最优解中最大信息比投资组合. 特别, 当  $p = 1$  且  $b_2 > 0$  时  $\Delta_1$  能简化为

$$\Delta_1 = \frac{2a_1 s d_1^2 (ac - b^2)}{e^T \Sigma^{-1} e_1} > 0.$$

由  $\Delta_1 > 0$  易知, WCLPM<sub>1</sub> 和 MV 的有效前沿在  $p = 1$  和  $b_2 > 0$  时必相交. 因此, 存在“超 - MV 区域”, 使得这个区域内所有投资组合均有超越 MV 问题的期望收益率, 见图 2(a). 这也表明, 在 WCLPM<sub>1</sub> 模型中, 即使某些资产被权值约束限制, 但是仍然能够获得较好的期望收益率.

### 3.2 模型 MV-MWC 和 WCLPM<sub>2</sub> 的有效前沿

根据定理 3 和定理 5, 问题 MV-MWC 和 WCLPM<sub>2</sub> 的超额期望收益能表示为

$$\begin{aligned} EER_{MV-MWC} &= \mu^T y_{\sigma_0}^* \\ &= \frac{b_2}{a_1} + \frac{\sqrt{a_2(a_1 TE_{MV-MWC}^2 - c_2)}}{a_1} \\ EER_2 &= \mu^T y_2^* = v^* \end{aligned} \tag{37}$$

其中  $TE_{MV-MWC} = \sqrt{\sigma_0}$ . 通过重新整理定理5中  $v^*$  的各项, 得到, 当  $b_2 \geq 0$  时, 有

$$EER_2 = \frac{b_2}{a_1} + \frac{\sqrt{a_2(a_1 TE_2^2 - c_2)}}{a_1} \tag{38}$$

其中  $TE_2 = \sqrt{\sigma_2}$ . 当  $b_2 < 0$  时, 有

$$EER_2 = \begin{cases} \frac{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{(a_1 + a_2)(a_1 TE_2^2 - c_2)} - b_2^2}{a_1(a_1 + a_2)} + \\ \frac{b_2}{a_1 + a_2}, \sigma_2^* \leq TE_2^2 \leq \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1} \\ \frac{b_2}{a_1} + \frac{\sqrt{a_2(a_1 TE_2^2 - c_2)}}{a_1}, \\ TE_2^2 > \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1} \end{cases} \tag{39}$$

易知, 当  $b_2 > 0$  时, WCLPM<sub>2</sub> 和 MV-MWC 具有相同的有效前沿, 均是一条双曲线的上分支(见图 3). 图中的  $a_0 v$  是 MV-MWC 的最小方差组合. 而当  $b_2 < 0$  时, 根据式(39), WCLPM<sub>2</sub> 的有效前沿由两曲线连接而成.

因为当  $b_2 \geq 0$  时, WCLPM<sub>2</sub> 和 MV-MWC 具有相同有效前沿, 而当  $b_2 < 0$  且  $TE_2^2 > \frac{b_2^2}{a_1 a_2} + \frac{c_2}{a_1}$  时, 两个模型仍然具有相同的有效前沿, 因此, 他们的有效前沿有相同的渐近线, 为

$$EER_2 = \frac{\sqrt{a_1 a_2} TE_2}{a_1} + \frac{b_2}{a_1} \tag{40}$$

令  $F_2 = s - \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{a_1}$ , 则对于  $F_2 \leq 0$  和  $b_2 \leq 0$ , 能够得到类似于 WCLPM<sub>1</sub> 的 3 个观察. 下面仅考虑  $p = 1$  的特殊情形, 注意到此时  $b_2$  能够简化为

$$b_2 = \frac{abd_1}{s} e_1^T u_{mv}$$

则定理 2 中的最大化信息比  $y_{IR}^*$  能进一步表示为

$$y_{IR}^* = \frac{d_1}{e_1^T u_{mv}} \left( \frac{\Sigma^{-1} \mu}{b} - \frac{\Sigma^{-1} e}{a} \right)$$

易知, 此时的  $y_{IR}^*$  事实上是当

$$TE = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}} \left| \frac{d_1}{be_1^T u_{mv}} \right|$$

时的模型 MV 的解. 注意到  $y_{IR}^*$  也是 MV-MWC 的解. 因此, 如果  $bd_1 e_1^T u_{mv} > 0$ , 即得到  $b_2 > 0$ , 则在  $EER - TE$  平面上, WCLPM<sub>2</sub>(或 MV-MWC) 和 MV 的有效前沿在

$$TE = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}} \frac{d_1}{be_1^T u_{mv}}$$

处相切, 见图 3(a). 如果  $bd_1 e_1^T u_{mv} < 0$ , 这时  $b_2 < 0$ , 则 WCLPM<sub>2</sub> 下半支将和 MV 的下半支在

$$TE = -\frac{\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}} \frac{d_1}{be_1^T u_{mv}}$$

处相切. 因此, 在单权值约束情形下, WCLPM<sub>2</sub> 和 MV 的有效前沿总是相切, 不会相交, 也不会相离. 那么在多元权值约束下是什么样的呢? 来看下面的命题, 其证明与命题 1 类似, 略去.

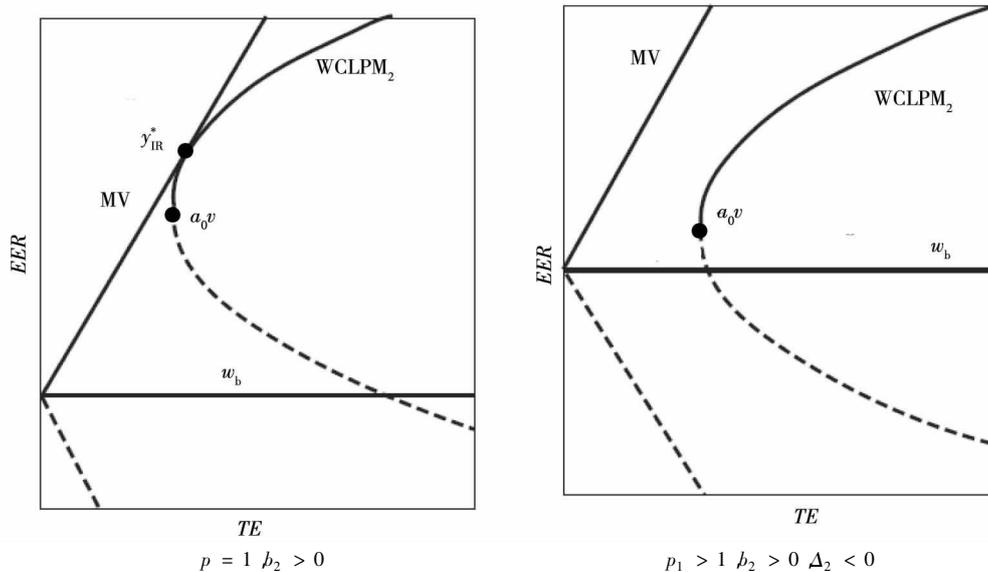


图 3 MV-MWC 和 MV 有效前沿相切的情形

Fig. 3 The tangent case of efficient frontiers of MV-MWC and MV

**命题 2** 当  $p > 1$  时, 如果  $\Delta_2 = 0, b_2 > 0$  和  $F_2 > 0$  成立, 则  $WCLPM_2$  和  $MV$  的有效前沿是相切的, 而且切点所对应的投资组合正是具有最大信息比的投资组合  $y_{IR}^*$ ; 在其他情形下, 两个有效前沿是相离的, 其中

$$\Delta_2 = (b_2^2 + a_2 c_2) - a_1 c_2 s^2$$

不像  $p = 1$  的情形, 当  $p > 1$  时,  $WCLPM_2$  和  $MV$  不总是相切的. 这种情形并不奇怪, 因为当  $p > 1$  时, 更多的资产受到权值限制, 这必能导致相对更小的超额期望收益. 值得一提的是, 切点处的投资组合  $y_{IR}^*$  与命题 1 中的投资组合  $y_1$  事实上是相同的. 这表明两个事实: 1) 如果  $MV$  的有效前沿和  $WCLPM_1$  或  $WCLPM_2$  的有效前沿相切, 则切点必定有最大的信息比; 2) 当  $b_2 > 0$  时,  $WCLPM_1$  和  $WCLPM_2$  具有相同的最大信息比投资组合, 但在两个问题中所对应的跟踪误差不相同.

最后, 考虑  $b_2 = 0$  的特殊情形. 根据前面的分析,  $WCLPM_m (m = 1, 2)$  的有效前沿完全由  $b_2$  的符号决定. 如果  $b_2 = 0$ , 则有  $Y_1 = Y_2 = 0$ . 这就意味着渐近线 (35)、(40) 和半直线  $MV$  在  $TE = 0$  处是相交的, 但  $WCLPM_m (m = 1, 2)$  的有效前沿和  $MV$  不会相交. 如果进一步有  $d = 0$ , 则  $WCLPM_m (m = 1, 2)$  的有效前沿就退化成了半直线. 特别当  $p = 1$  时,  $WCLPM_2$  (或  $MV-MWC$ ) 退化后的半直线与半直线  $MV$  会重合.

### 3.3 静态比较

为了进一步了解模型  $WCLPM_m (m = 1, 2)$  和

均值 - 方差模型, 比较两类模型随跟踪误差变化时, 收益率的变化情形. 因为 Roll 的  $MV$  模型没有考虑权值约束, 而  $WCLPM_2$  和  $MV-MWC$  两个模型有效前沿是重合的. 故为了简单, 在此仅考虑  $WCLPM_1$  和  $MV-MWC$  两个模型的静态比较. 根据方程 (33) 和 (37) 中关于  $EER_1$  及  $EER_{MV-MWC}$  的表达式, 不难得到如下收益率关于跟踪误差的导数表示式

$$\frac{\partial EER_1}{\partial TE} = \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} \frac{2(a_1 + a_2) TE}{\sqrt{(a_1 + a_2) TE^2 + 2b_2 TE - c_2}} + \frac{a_2}{a_1} \quad (41)$$

$$\frac{\partial EER_{MV-MWC}}{\partial TE} = \frac{1}{a_1} \frac{2a_1 a_2 TE}{\sqrt{a_2 (a_1 TE^2 - c_2)}} \quad (42)$$

基于式 (41) 和 (42), 有如下命题, 其证明是直接的, 略去.

**命题 3** 如果  $b_2 > 0$ , 则必定存在一个  $TE^*$ , 使得

$$\left. \frac{\partial EER_1}{\partial TE} \right|_{TE=TE^*} = \left. \frac{\partial EER_{MV-MWC}}{\partial TE} \right|_{TE=TE^*}$$

即当  $TE < TE^*$  时有

$$\frac{\partial EER_1}{\partial TE} < \frac{\partial EER_{MV-MWC}}{\partial TE}$$

而当  $TE > TE^*$  时有

$$\frac{\partial EER_1}{\partial TE} > \frac{\partial EER_{MV-MWC}}{\partial TE}$$

如果  $b_2 < 0$ , 则对于任意使得两个问题可行的

$TE > 0$  均有

$$\frac{\partial EER_1}{\partial TE} > \frac{\partial EER_{MV-MWC}}{\partial TE}$$

命题3表明,当  $b_2 > 0$  时,如果恰当控制  $TE$ , 使得  $TE < TE^*$ , 则模型  $WCLPM_1$  得到的组合收益变化随  $TE$  的变化要比模型  $MV-MWC$  小,因此相对更稳定,对应投资组合调整较小.但是如果跟踪误差继续增大时,模型  $WCLPM_1$  的收益随  $TE$

的变化增大,因此对应的投资组合调整会更大.图4和图5是这两个模型分别在  $b_2 > 0$  和  $b_2 < 0$  时,其有效前沿及收益对跟踪误差导数的变化图.在图4中,中间的间隔线是  $TE^*$  所在的位置.

使用第4节的实验例子表明,在  $p = 2, b_2 = 0.2498$  时,临界值  $TE^* = 0.0851 < 10\%$ .因此,如果跟踪误差不大时,模型  $WCLPM_1$  无论是跟踪性能还是超额收益,均比均值-方差模型优越.

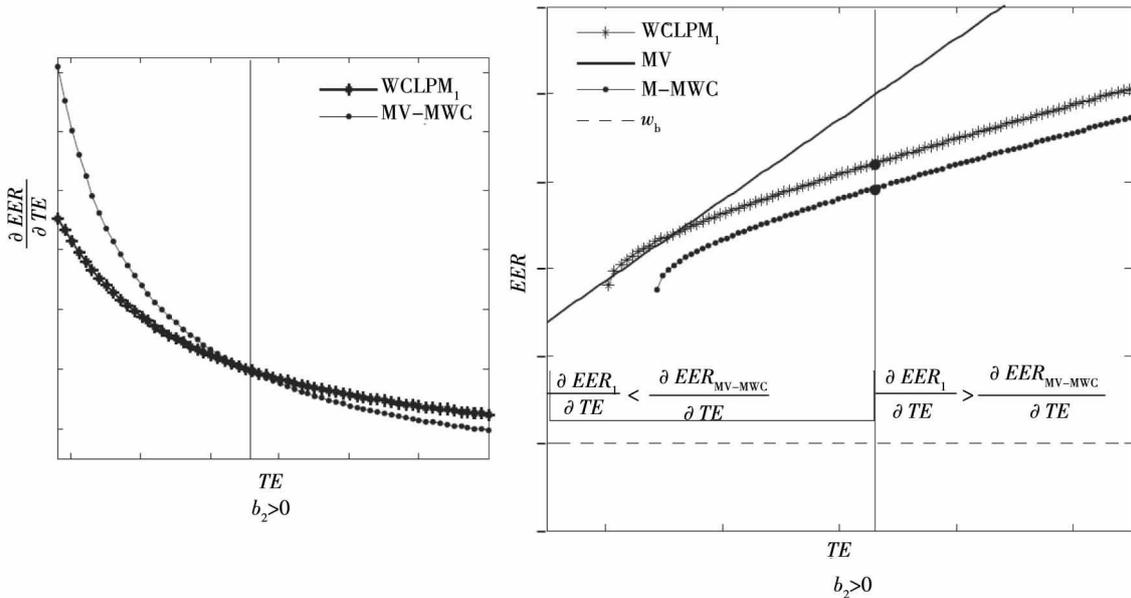


图4 模型  $WCLPM_1$  和  $MV-MWC$  的有效前沿及其收益对跟踪误差导数在  $b_2 > 0$  时的比较

Fig. 4 The comparisons of the efficient frontiers and the derivative of returns to error in models  $WCLPM_1$  and  $MV-MWC$  under the case of  $b_2 > 0$

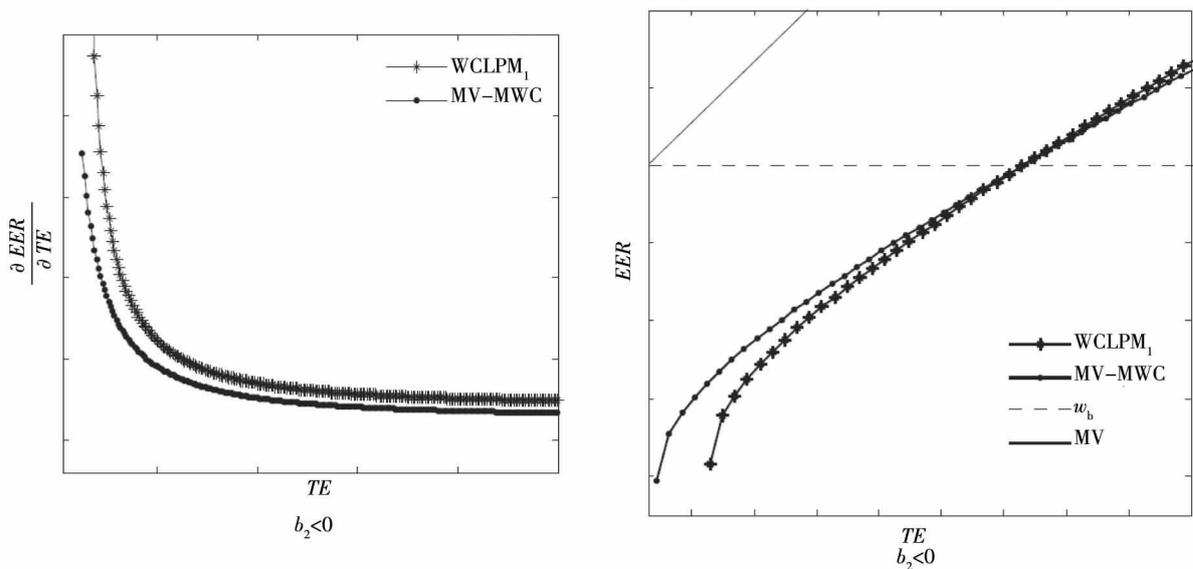


图5 模型  $WCLPM_1$  和  $MV-MWC$  的有效前沿及其收益对跟踪误差导数在  $b_2 < 0$  时的比较

Fig. 5 The comparisons of the efficient frontiers and the derivative of returns to error in models  $WCLPM_1$  and  $MV-MWC$  under the case of  $b_2 < 0$

### 4 数值试验

数值试验中, 比较了 WCLPM<sub>1</sub>, MV-MWC、IR-MWC(见问题(13)) 和 MV 模型的性能. 为了能和文献[19]中的单权值进行比较, 本文

的数值例子来自于文献[19], 并考虑了存在两个权值约束的情形. 在文献[19]所考虑的例子中, 假设存在 5 个国内资产, 分别记为 ( $w_1^d, \mu_1^d, w_2^d, \mu_2^d, w_3^d, \mu_3^d, w_4^d, \mu_4^d, w_5^d, \mu_5^d$ ) 和两个国外资产, 记为 ( $w_6^f, \mu_6^f, w_7^f, \mu_7^f$ ). 所有资产的期望年收益率和方差 - 协方差矩阵见表 1.

表 1 7 个资产的年收益率  $\mu$  和协方差矩阵  $\Sigma$

Table 1 Return  $\mu$  and covariance matrix  $\Sigma$  of seven assets

资产	$w_1^d$	$w_2^d$	$w_3^d$	$w_4^d$	$w_5^d$	$w_6^f$	$w_7^f$
$\mu$	0.12	0.11	0.12	0.12	0.14	0.16	0.17
$\Sigma$	0.048 4	0.023 1	0.016 5	0.013 2	0.023 1	0.008 8	0.012 3
	0.023 1	0.122 5	0.026 2	0.021 0	0.036 7	0.014 0	0.019 6
	0.016 5	0.026 2	0.062 5	0.015 0	0.026 2	0.010 0	0.014 0
	0.013 2	0.021 0	0.015 0	0.040 0	0.021 0	0.008 0	0.011 2
	0.023 1	0.036 7	0.026 2	0.021 0	0.122 5	0.014 0	0.019 6
	0.008 8	0.014 0	0.010 0	0.008 0	0.014 0	0.040 0	0.016 8
	0.012 3	0.019 6	0.014 0	0.011 2	0.019 6	0.016 8	0.078 4

考虑如下两种情形的权值约束

$$p = 1: w_6^f + w_7^f = 0.2;$$

$$p = 2: \begin{cases} w_6^f + w_7^f = 0.2 \\ w_1^d + w_3^d = 0.15 \end{cases}$$

相应的矩阵  $M$  分别为

$$M = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)^T$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

对于这两种情形的权值约束, 分别计算了  $a_0, b_2, F_1, F_2, \Delta_1$  和  $\Delta_2$ , 见表 2.

表 2  $a_0, b_2$  和其他相关量分别在  $p = 1$  和  $p = 2$  时的值

Table 2 The values of  $a_0, b_2$  and other parameters at  $p = 1$  or  $p = 2$

参量	$a_0$	$b_2$	$TE_{\min}$	$TE_{\max}$	$F_1$	$F_2$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
$p = 1$	0.121 8	0.334 4	0.039 3	0.056 8	0.141 7	0.148 8	0.059 5	0
$p = 2$	0.006 7	0.249 8	0.048 8	0.051 9	0.142 4	0.149 4	0.006 9	-0.027 9

因为  $b_2 > 0$ , 因此, WCLPM<sub>2</sub> 和 MV-MWC 是相同的. 由于  $F_1 > 0, b_2 > 0$  和  $\Delta_1 > 0$ , 根据命题 1, 对于 WCLPM<sub>1</sub> 的有效前沿, 存在“超 - MV 区域”, 因此, 如果跟踪误差满足  $TE \in [TE_{\min}, TE_{\max}]$ , WCLPM<sub>1</sub> 将能获得比 MV 更大的期望收益率, 其中

$$TE_{\min} = \max\{2\sigma_1^*, \sqrt{\sigma_{mv}^*}\},$$

$\sigma_1^*, \sigma_{mv}^*$  是使得 WCLPM<sub>1</sub> 可行的最小跟踪误差, 而  $TE_{\max}$  为 WCLPM<sub>1</sub> 的有效前沿与 MV 较大交点处对应的跟踪误差值. 选取  $TE_1 = 5\%$  和  $TE_2 =$

10% 两个跟踪误差进行数值试验, 所有数值结果分别见表 3 和表 4. 从这两个表中能有如下结论:

1) 当  $p = 1$  且跟踪误差取值较小时 ( $TE_1 = 5\%$ ), 在所有被考虑的模型中, WCLPM<sub>1</sub> 有最好的期望收益 ( $\mu^*$ ) 和信息比 ( $IR^*$ ), 并且比模型 IR-MWC 所得到的信息比更好, 这也证实了 WCLPM<sub>1</sub> 中确实存在“超 - MV 区域”. 当跟踪误差提高到 10% 时, 所有模型的期望收益均相应增加. 特别, MV 的期望收益从 13.36% 提高到 14.51%, 超过了 WCLPM<sub>1</sub> 的期望收益 13.95%.

另外,随着跟踪误差增加,WCLPM<sub>1</sub>和MV-MWC的信息比呈下降趋势,MV的信息比保持不变.这个现象并不奇怪,因为a)MV没有权值约束限制,其收益变化的空间较大;b)对于较大的跟踪误差,最坏情形下LPM模型实际上是更保守的.

2)与单权值相比较,当 $p = 2$ 时,除了IR-MWC外,与权值有关的WCLPM<sub>1</sub>和MV-MWC模型的期望收益均呈下降趋势,所有与权值有关的模型的信息比均呈下降趋势.这个结果是预料之中的,因为每增加一个权值约束,对资产配置就进行了相应限制,这直接影响配置性能.感到意外的是,在跟踪误差较小时,在所有被考虑的模型中,WCLPM<sub>1</sub>仍然具有最好的期望收益和信息比.这个事实进一步表明,鲁棒WCLPM<sub>1</sub>在跟踪误差

较小时比MV,MV-MWC和IR-MWC具有更好的性能.

3)在表3和表4的第10列中, $T_\sigma = \sqrt{(w^*)^T \Sigma w^*}$ 表示投资组合 $w^*$ 的标准差,根据 $T_\sigma$ 不难发现,WCLPM<sub>1</sub>所得到的最优组合具有相对最大的波动率,其次是模型IR-MWC.因此,如果单独考虑波动率,WCLPM<sub>1</sub>具有高风险性,则具有高收益是不足为奇的.但WCLPM<sub>1</sub>具有较好的信息比,这表明,WCLPM<sub>1</sub>的单位风险承载了更多的期望收益.

4)在对WCLPM<sub>1</sub>,MV-MWC和MV模型的超额收益关于跟踪误差和权值约束的进一步敏感性分析表明(见表5),WCLPM<sub>1</sub>模型的收益变化明显更稳定,并且权值约束个数变化对WCLPM<sub>1</sub>的超额收益的影响也最小.

表3 在 $p = 1$ 情形下的最优解和性能比较

Table 3 The optimal solutions and their comparisons under the case  $p = 1$

	$w_1^d$	$w_2^d$	$w_3^d$	$w_4^d$	$w_5^d$	$w_6^f$	$w_7^f$	$\mu^*$	$T_\sigma$	$IR^*$
$w_b$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0	0	0.122 0		
IR-MWC	0.137 9	0.160 9	0.154 9	0.121 8	0.224 4	0.115 2	0.084 8	0.131 7	0.173 1	0.231 4
$TE = 0.05$										
MV	0.126 2	0.153 5	0.146 4	0.107 0	0.229 1	0.137 1	0.100 8	0.133 6	0.172 3	0.231 4
MV-MWC	0.132 7	0.134 8	0.150 2	0.116 2	0.266 0	0.092 8	0.107 2	0.133 0	0.177 6	0.220 9
WCLPM <sub>1</sub>	0.127 5	0.108 9	0.145 6	0.110 6	0.304 7	0.070 5	0.129 5	0.134 4	0.183 4	0.247 1
$TE = 0.10$										
MV	0.052 4	0.107 0	0.092 8	0.014 0	0.258 2	0.274 2	0.201 6	0.145 1	0.175 4	0.231 4
MV-MWC	0.112 8	0.035 2	0.132 3	0.094 7	0.425 1	0.007 0	0.193 0	0.138 1	0.205 6	0.160 8
WCLPM <sub>1</sub>	0.101 7	0.006 8	0.127 2	0.088 5	0.470 4	-0.017 4	0.217 4	0.139 5	0.216 1	0.175 2

表4 在 $p = 2$ 情形下的最优解和性能比较

Table 4 The optimal solutions and their comparisons under the case  $p = 2$

模型	$w_1^d$	$w_2^d$	$w_3^d$	$w_4^d$	$w_5^d$	$w_6^f$	$w_7^f$	$\mu^*$	$T_\sigma$	$IR^*$
IR-MWC	0.058 0	0.175 1	0.092 0	0.204 9	0.270 0	0.105 5	0.094 5	0.132 6	0.180 7	0.197 6
$TE = 0.05$										
MV	0.126 2	0.153 5	0.146 4	0.107 0	0.229 1	0.137 1	0.100 8	0.133 6	0.172 3	0.231 4
MV-MWC	0.057 7	0.195 0	0.092 3	0.213 3	0.241 6	0.121 5	0.078 5	0.131 7	0.178 2	0.193 3
WCLPM <sub>1</sub>	0.058 3	0.150 9	0.191 7	0.194 7	0.304 3	0.086 0	0.114 0	0.133 7	0.184 7	0.234 3
$TE = 0.10$										
MV	0.052 4	0.107 0	0.092 8	0.014 0	0.258 2	0.274 2	0.201 6	0.145 1	0.175 4	0.231 4
MV-MWC	0.059 4	0.060 4	0.090 6	0.156 6	0.433 0	0.013 2	0.186 8	0.137 9	0.207 1	0.159 3
WCLPM <sub>1</sub>	0.059 8	0.028 5	0.090 2	0.143 2	0.478 3	-0.012 4	0.212 4	0.139 4	0.213 7	0.174 1

表 5 模型 MV, MV-MWC 及 WCLPM<sub>1</sub> 对 TE 及权值约束的灵敏性比较

Table 5 The sensitivity comparisons of models MV, MV-MWC and WCLPM<sub>1</sub> with respect to TE

模型	$\Delta\mu^*$	$\Delta T_\sigma$	$\Delta IR^*$
跟踪误差由 $TE = 0.05$ 变化到 $TE = 0.10$ , 其中 $p = 1$ 固定			
MV	0.011 5	0.003 1	—
MV-MWC	0.005 1	0.027 0	-0.060 1
WCLPM <sub>1</sub>	0.004 9	0.032 7	-0.071 9
权值约束由 $p = 1$ 变化到 $p = 2$ 其中 $TE = 0.05$ 固定			
MV-MWC	-0.001 3	0.000 6	-0.027 6
WCLPM <sub>1</sub>	-0.000 7	0.001 3	-0.012 8

## 5 结束语

本文研究了具有多元权值约束的鲁棒积极投资组合问题, 通过使用最坏情形下的  $m(=0, 1, 2)$  - 阶下偏距来度量投资组合的损失, 探索了问

题的解析解, 并分析各种情形下所考虑问题的有效前沿和性质. 通过投资组合问题的有效前沿, 给出 WCLPM<sub>m</sub> ( $m = 1, 2$ ), MV-MWC 和 MV 模型有效前沿相切、相交和相离的条件. 特别是, 发现在跟踪误差较小时, WCLPM<sub>1</sub> 能获得比无权值约束 MV 模型更好的期望收益和信息比. 因此, 总体来讲, WCLPM<sub>1</sub> 具有相对更好的吸引力. 本文所获得的结果对资产定价、投资组合性能度量和其他相关问题均是非常有价值的.

基于本文的研究, 能进一步开展一些有趣的工作, 如: 在本文提出的模型中加入无风险资产, 分析无风险资产对有效前沿的影响是非常有意义的. 在本文所得到的解析解中, 是否具有  $K$ -基金分离公式的特点, 最小的  $K$  是 2 吗? 另外, 为了探索解析解, 虽然没有对资产收益分布进行假设, 但是却假设资产收益和波动率是已知的, 如果引入参数不确定集, 并增加卖空限制, 那么, 如何进行数值求解, 也是非常有意义的问题.

## 参考文献:

- [1] Roll R. A mean-variance analysis of the tracking error [J]. *Journal of Portfolio Management*, 1992, 18(1): 13-22.
- [2] Markowitz H M. Portfolio selection [J]. *Journal of Finance*, 1952, 7: 77-91.
- [3] Rudolf M, Wolter H J, Zimmermann H. A linear model for tracking error minimization [J]. *The Journal of Banking and Finance*, 1999, 23(1): 85-103.
- [4] Jorion P. Portfolio optimization with tracking-error constraints [J]. *Financial Analyst Journal*, 2003, 59(1): 70-82.
- [5] Chena H H, Tsai H T, Linc D K J. Optimal mean-variance portfolio selection using Cauchy-Schwarz maximization [J]. *Applied Economics*, 2011, 43(21): 2795-2801.
- [6] Glode V. Why Mutual Funds "Under perform" [R]. Manuscript, April 21, 2010, available: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract-id=1121436&rec=1&srcabs=901023>.
- [7] S Liu, Xu R. The Effects of Risk Aversion on Optimization [R]. Manuscript, 2010, MSCI Barra Research. Available: <http://www.msibarra.com/research/articles/2010/>.
- [8] Guedj I, Huang J. Are ETFs Replacing Index Mutual Funds? [R]. Manuscript, March 2009, available: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract-id=1108728>.
- [9] Markowitz H M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment [M]. New York: John Wiley, 1959: 35-146.
- [10] Bawa V S, Lindenberg E B. Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework [J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 5: 189-200.
- [11] Grootveld H, Hallerbach W. Variance vs. downside risk: Is there really that much difference? [J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 114: 304-319.
- [12] Goldfarb D, Iyengar G. Robust portfolio selection problems [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2003, 28(1): 1-38.
- [13] Erdog̃any E, Goldfarb D, Iyengar G. Robust Active Portfolio Management [R]. Manuscript, Department of Industrial Engineering and Operations Research, Columbia University, New York, NY 10027-6699, USA, CORC Technical Report TR

- 2004-11, Nov. 2006: available: <http://www.corc.ieor.columbia.edu/reports/techreports/tr-2004-11.pdf>.
- [14] El Ghaoui L, Oks M, Oustry F. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach [J]. *Operations Research*, 2003, 51(4): 543-556.
- [15] Costa O L V, Paiva A C. Robust portfolio selection using linear-matrix inequalities [J]. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2002, 26(6): 889-909.
- [16] Zhu S S, Li D, Wang S Y. Robust portfolio selection under downside risk measures [J]. *Quantitative Finance*, 2009, 9(7): 869-885.
- [17] Glabadanidis P. Robust and Efficient Strategies to Track and Outperform a Benchmark [R]. February 3, 2010, available: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract-id=1571250>.
- [18] Fabozzi F J, Huang D H, Zhou G F. Robust portfolios: Contributions from operations research and finance [J]. *Annals of Operations Research*, 2010, 176(1): 191-220.
- [19] Bajeux-Besnainou I, Belhaj R, Maillard D, et al. Portfolio optimization under tracking error and weights constraints [J]. *Journal of Financial Research*, 2011, 34(2): 295-330.
- [20] Bertsimas D, Popescu I. The relation between option and stock prices: A convex optimization approach [J]. *Operations Research*, 2002, 50(2): 358-374.
- [21] Chen L, He S, Zhang S. Tight bounds for some risk measures, with applications to robust portfolio selection [J]. *Operations Research*, 2011, 59(4): 847-865.
- [22] Popescu I. Robust mean-covariance solutions for stochastic optimization [J]. *Operations Research*, 2007, 55(1): 98-112.
- [23] Beyer W H. *Standard Mathematical Tables* [M]. 28th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1987: 200-201.

## Robust LPM active portfolio selection with multiple weights constraints

LING Ai-fan<sup>1</sup>, YANG Xiao-guang<sup>2</sup>, TANG Le<sup>3</sup>

1. Research Centre of Applied Finance, School of Finance, Jiangxi University of Finance & Economics, Nanchang 330013, China;
2. Academy of Mathematics & Systems Science Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
3. Jiangxi University of Technology, Nanchang 330098, China

**Abstract:** The return of portfolios will be limited when one uses the variance of portfolio to control risk. Compared with the shortcoming of the variance, lower partial moment (LPM) is paid close attention by many researchers due to the fact that LPM controls only the risk of portfolios without limiting the return. But, under the assumption of non-normal distribution, one can not generally obtain the analytic properties of LPM models. Motivated by these facts, under the assumption of uncertainty distribution, we propose a class of robust tracking error portfolio selection problems with multiple weights constraints in which we use the worst-case lower partial moment (LPM) to measure the loss of portfolios. The analytic solutions of the proposed robust models with-order LPM constraints are obtained. Some interesting and novel results are found based on the geometrical presentations of efficient frontiers. The numerical comparisons indicate that the proposed robust models have much better performance than the classical mean-variance model.

**Key words:** robust portfolio selection; active portfolio management; tracking error; downside risk measure; weights constraint