

# 基于极差的区制转移随机波动率模型及其应用<sup>①</sup>

郑挺国<sup>1</sup>, 左浩苗<sup>2</sup>

(1. 厦门大学王亚南经济研究院, 厦门 361005; 2. 中国人寿资产管理有限公司, 北京 100033)

摘要: 关于金融波动率的建模, 大量文献都是基于将收益率作为波动率代理变量, 而基于极差这一更有效的代理变量研究波动率的则相对较少. 考虑到随机波动率模型的优势, 将区制转移引入到基于极差的随机波动率模型中, 从而刻画金融市场中波动率水平可能存在的结构变化. 随后给出此波动率模型的 MCMC 估计, 并利用模拟证明了该方法的有效性. 基于以上模型, 对上证综指、深圳成指和沪深 300 指数的极差波动率进行了实证研究, 并利用已实现波动率作为基准、以稳健的损失函数作为判断准则的比较方法, 与文献中常用的 GARCH 类模型和 SV 类模型进行比较, 进一步论证了提出模型的优势.

关键词: 极差; 随机波动; 区制转移; MCMC

中图分类号: F830.9 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2013)09-0082-13

## 0 引言

波动率建模是金融计量经济学的核心问题之一. 它的建模可以分为参数方法和非参数方法两大类. 在参数方法中, 比较常用的是 Engle<sup>[1]</sup> 和 Bollerslev<sup>[2]</sup> 提出的 GARCH 类模型, 以及 Taylor<sup>[3]</sup> 提出的随机波动率模型 (stochastic volatility model, 简称 SV 模型) 等. GARCH 类模型一般可将条件方差表达为残差的自回归形式, 通过对滞后的历史信息赋予不同的权重得到对波动率的估计, 能够刻画波动聚类的特征. 与之不同, SV 模型将波动率视为不可观测的过程, 在对条件方差的刻画中也引入随机误差项. 由于随机波动率模型可视为连续时间的布朗运动或跳跃扩散过程的离散对应, 在资产定价和衍生品定价中得到了广泛的应用<sup>[4-6]</sup>. 在非参数方法中, 随着高频数据的出现, 已实现波动率 (realized volatility, 简称 RV) 方法得到了广泛的应用. Andersen 等<sup>[7, 8]</sup> 证明在一定条件下, 通过对日内高频收益率平方和得到

的已实现方差是真实波动率的一致估计量. 非参数方法中的另一类是无模型隐含波动率方法<sup>[9]</sup>, 可以在不依赖于特定的期权定价模型的前提下预期风险中性条件下的波动率.

在上述方法中, 除了无模型隐含波动率方法是利用期权数据得到风险中性测度下波动率的估计外, 其他方法均利用资产价格历史数据得到现实测度下波动率的估计. 传统的 GARCH 类模型和 SV 模型均是基于收益率数据的, 即利用收益率的绝对值或者平方作为波动率的代理变量, 进而得到真实波动率的估计. 但是, 收益率数据仅仅是利用了某一交易时段的最后的收盘价的信息, 而忽视了时段内价格变动的信息. 例如, 在市场剧烈波动和比较平稳的情况下, 价格过程均可能具有相同的收盘价进而得到相同的收益率, 但是在这两种情况下市场的波动状况是完全不同的. 作为更为理想的替代方案, 极差 (定义为某一段时间内最高价与最低价之差) 也可以作为波动率的代理变量. Parkinson<sup>[10]</sup> 最早对极差作为波动率代

① 收稿日期: 2011-11-30; 修订日期: 2012-05-03.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71001087); 国家留学基金委公派资助项目 (201208350111); 教育部人文社会科学研究规划基金资助项目 (11YJA790095); 福建省自然科学基金资助项目 (2010J01361); 厦门大学优秀博士培养计划资助项目.

作者简介: 郑挺国 (1979—), 男, 浙江温岭人, 博士, 副教授. Email: zhengt@ gmail. com

理变量的性质进行了研究,认为极差利用了时间段内价格的变动区间信息而不仅仅是收盘时点的信息,可以明显提高估计波动率的效率.随后 Garman 和 Klass<sup>[11]</sup>、Rogers 和 Satchell<sup>[12]</sup>,以及 Yang 和 Zhang<sup>[13]</sup> 等对极差估计量进行了修正和扩展. Parkinson<sup>[10]</sup> 以及唐勇和张世英<sup>[14]</sup> 证明基于极差的波动率估计量效率要高于基于收益率的波动率估计量,前者的方差大概是后者的 1/5,具有更窄的置信区间.除了估计量精度的优势外,Alizadeh 等<sup>[15]</sup> 还指出,对数极差是近似正态的,避免了收益率尖峰厚尾分布造成的估计困难,也对微观市场结构噪音比较稳健.此外,由于金融市场报价信息中长期以来通常都包含了日内交易的最高价和最低价,具有较长的样本区间,这使得基于极差的波动率建模方法更具有广泛的适用性.

与基于收益率的波动率建模的诸多方法相比,基于极差的波动率建模方法相对较少. Alizadeh 等<sup>[15]</sup> 以及 Brandt 和 Diebold<sup>[16]</sup> 提出了基于极差的 SV 模型 (range based stochastic volatility model, 简称 RSV 模型), Chou<sup>[17]</sup>、Li 和 Hong<sup>[18]</sup>、周杰和刘三阳<sup>[19]</sup>、李红权和汪寿阳<sup>[20]</sup> 等对基于极差的 GARCH 类模型进行了研究,蒋祥林等<sup>[21]</sup> 探讨了基于日内价格幅度和收益率的随机波动率模型,均证明了基于极差的波动率方法的有效性.由于随机波动率模型在连续时间金融以及资产定价中的广泛应用,本文对 Alizadeh 等<sup>[15]</sup> 的方法进行拓展.本文的主要工作是在 Alizadeh 等<sup>[15]</sup> 提出的 RSV 模型的基础上,引入具有波动均值区制转移特征的马尔科夫动态过程,从而刻画波动率的结构变化.大量文献证实了波动率可能具有结构变化或区制转移的特征.在对波动率长记忆性的研究中, Lamoureux 和 Lastrapes<sup>[22]</sup> 就曾指出,可能存在的结构突变会导致对波动持续性的高估, Diebold 和 Inoue<sup>[23]</sup> 也指出长记忆现象可能是因为波动率过程中存在结构突变, Granger 和 Hyung<sup>[24]</sup> 进一步证实了上述观点,指出结构突变对长记忆性具有重要的解释效力.鉴于此,一些研究将 Hamilton<sup>[25]</sup> 提出的马尔科夫区制转移方法引入到波动率过程中,从而可以捕捉波动率存在的内生变化过程,如 Hamilton 和 Susmel<sup>[26]</sup>、Cai<sup>[27]</sup>、Gary<sup>[28]</sup>、蒋祥林等<sup>[29]</sup>、孙金丽和张世英<sup>[30]</sup>、赵华和蔡建文<sup>[31]</sup> 等考虑了区制转移的 GARCH 类模型,而 So 等<sup>[32]</sup>、Smith<sup>[33]</sup>、Kalimipalli

和 Susmel<sup>[34]</sup> 及郑挺国<sup>[35]</sup> 等将马尔科夫区制转移引入到基于收益率的 SV 模型中.上述研究均表明在对金融时间序列研究过程中,波动率存在区制转移是普遍现象,同时,上述文献 [32-35] 均证实,考虑波动均值的区制转移特征会得到更优的波动持续性估计和动态拟合效果.鉴于此,本文在 Alizadeh 等<sup>[15]</sup> 的 RSV 模型基础上提出了基于极差的马尔科夫区制转移随机波动率模型 (range based Markov switching stochastic volatility model, 简称 RMSSV) 模型,该模型既具有极差波动率方法估计效率高的特点,也同时刻画了金融市场周期性变化的特征.

本文的其他工作还包括:首先,结合 RMSSV 模型设定的特征,给出了基于 Gibbs 抽样的马尔科夫链蒙特卡罗模拟 (Markov chain Monte Carlo, 简称 MCMC) 估计方法,并通过模拟论证了估计方法的有效性;其次,利用 RMSSV 模型对大陆市场 3 个代表性指数 (上证综指、深圳成指和沪深 300 指数) 的日度极差数据进行拟合,并进行了不同波动率估计方法的样本内拟合比较. Patton<sup>[36]</sup> 在 Hansen 和 Lunde<sup>[37]</sup> 的基础上提出了以已实现波动率作为基准和稳健的损失函数作为准则的比较方法,解决了传统的波动率估计方法依赖于存在噪音的波动率代理指标和可能存在偏误的损失函数作为准则的问题,但在实证中仅比较了滚动估计和 RiskMetrics 两种简单的波动率估计方法,而本文则进一步将其扩展应用到多种常见的波动率估计模型中,更为充分地验证了 RMSSV 模型的优势.

## 1 模型设定及估计方法

### 1.1 基于收益率的 SV 模型

根据 Taylor<sup>[3]</sup> 等的研究,基本 SV 模型设定为

$$r_t = \sigma \varepsilon_t \exp(h_t/2) \quad (1)$$

$$h_t = \mu + \varphi(h_{t-1} - \mu) + \sigma_\eta \eta_t \quad (2)$$

$$h_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \varphi^2}\right) \quad (3)$$

其中  $r_t = \log(S_t/S_{t-1})$  表示股票价格  $S_t$  的对数收益率;  $h_t = \log \sigma_t^2$  表示对数方差,  $\varepsilon_t$  和  $\eta_t$  是独立的正态分布的随机扰动项;  $\sigma$  是常量,在本文中标准化为 1;  $\varphi$  是对数波动率持续性的度量,其绝对值小于 1; 参数  $\mu$  和  $\sigma_\eta$  分别表示对数波动率的均值和波动率.

对式 (1) 进行对数平方变换,可以得到

$$\log r_t^2 = h_t + \xi_t \tag{4}$$

其中  $\xi_t = \log \varepsilon_t^2$ . 式(2)和式(4)构成了状态空间模型,式(4)为观测方程,式(2)为转移方程. 在假设  $\varepsilon_t$  服从标准正态分布的前提下  $\xi_t$  服从自由度为1的对数卡方分布,而这个分布的标准差、偏度、峰度分别为 1.11、-1.53、6.93,与正态分布的差别是比较大的. 在正态假设下,Harvey等<sup>[38]</sup>使用了拟极大似然估计的方法,但Kim等<sup>[39]</sup>指出该方法的有限样本性质较差,提出了采用7个正态分布组成的混合分布对  $\xi_t$  的分布进行逼近的MCMC方法. 随后Chib等<sup>[40]</sup>以及Omori等<sup>[41]</sup>提出了其他的MCMC算法.

### 1.2 基于极差的随机波动率模型

采用收益率的平方作为波动率代理变量时,  $\xi_t$  的分布的非正态性给模型的估计造成困难. 当采用极差作为波动率代理变量时, Feller<sup>[42]</sup>证明给出在无漂移项标准几何布朗运动假设下,对数极差的标准差、偏度和峰度分别为 0.29、0.17和2.80,与标准正态是较为接近的.

利用这一性质, Alizadeh等<sup>[15]</sup>提出了基于极差的随机波动率模型

$$y_t = h_t + \varepsilon_t \tag{5}$$

$$h_t = \mu + \varphi(h_{t-1} - \mu) + \sigma_\eta \eta_t \tag{6}$$

其中  $y_t = \log(\log H_t - \log L_t)$  表示对数极差;  $h_t = \log \sigma_t$  表示对数波动率;  $H_t$  和  $L_t$  代表某一时段内的最高价和最低价. 此外,令  $v = (1 - \varphi)\mu$ , 式(6)可以等价地写为  $h_t = v + \varphi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t$ . 其中,由于  $\varepsilon_t$  是近似正态的, Alizadeh等<sup>[15]</sup>利用拟极大似然方法得到模型参数的估计值,并且通过蒙特卡罗模拟,通过日内高频数据得到极差,发现对参数的估计的效率高于利用收益率的绝对值作为波动率代理变量的随机波动率方法. 同时,他们的模拟研究也发现基于极差的波动率估计对微观市场结构噪音不敏感,比基于收益率的模型得到的对波动率的估计也更为准确. 该模型充分利用了极差的近似对数正态、估计效率高和对微观市场结构噪音稳健的特征,将通常采用的作为波动率的代理变量的对数收益率的绝对值替换为对数极差,改进了对参数的估计和波动率的提取.

### 1.3 基于极差的马尔科夫区制转移随机波动率模型

正如引言中所指出的,上述方法的不足是没

有考虑波动率过程本身可能存在结构突变. 特别是对于股市的波动率而言,随着股市自身周期的变化,可能会呈现剧烈波动与相对平稳的市场状况交替出现的情形. 特别地,在市场处于剧烈波动的时候,波动率平均水平会处在高波动区制,而市场相对平稳时,波动率水平会在低波动区制,即波动率的水平可能存在结构变化. 剧烈波动和相对平稳的市场状况的轮替次数以及持续时间是无法实现预知的,这将不再适用以虚拟变量方式的结构突变刻画方法. 本文引入马尔科夫区制转移的方法对随机波动率模型进行扩展,式(6)可扩展为

$$h_t = \mu_{S_t}(1 - \varphi) + \varphi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \tag{7}$$

令  $v_{S_t} = \mu_{S_t}(1 - \varphi)$ , 式(7)可以表示为

$$h_t = v_{S_t} + \varphi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \tag{8}$$

其中,状态变量  $S_t$  有  $M$  个不同的取值,代表波动率的长期水平处在不同的状态. 假设  $S_t$  服从一阶马氏过程,转移概率矩阵如下

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中  $p_{ij} = \Pr[S_t = j | S_{t-1} = i]$  表示从状态  $S_{t-1} = i$  转移到  $S_t = j$  的概率,并满足  $\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1$ . 这样,  $\mu_{S_t} = \mu_1 S_{1t} + \cdots + \mu_M S_{Mt}$ , 其中  $S_{jt}$  为哑变量,表示当且仅当  $S_t = j$  时  $S_{jt} = 1$ . 与Sun<sup>[43]</sup>等类似,本文中进一步假定  $M = 2$ , 则  $S_t = 1$  和  $S_t = 2$  分别表示市场处于高波动状态和低波动状态. 此时,转移概率矩阵简化为

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中  $p$  和  $q$  分别表示波动率保持在高或低水平的概率. 这里的设定与RSV的区别在于将波动率的水平设置为状态依赖的,在不同的波动率区制下取不同的值,来反映波动水平本身的结构变化. 在基于收益率的随机波动率模型中,这一做法是将SV模型扩展到MSSV模型时最常见的做法,例如So等<sup>[32]</sup>和Sun<sup>[43]</sup>的工作,而本文将这种做法延伸到了基于极差的随机波动率模型中. 这样,本文提出的RMSSV模型既利用极差的信息优势,得到参数和波动率更为准确的估计,也能够将波动率水平的结构变化考虑在内,不依赖于先验信息的

前提下确定波动的不同区制和持续时间.

### 1.4 估计方法

由式(5)和式(7)构成的系统可以表示为马尔科夫区制转移的状态空间模型,可以在 Kim 和 Nelson<sup>[44]</sup>提出的基于吉布斯抽样(Gibbs sampling)方法的基础上加以改进进行估计.吉布斯抽样是通过条件分布序贯抽样来近似联合分布的抽样方法,最早由文献[45]提出.吉布斯抽样实际是对 Metropolis 抽样方法<sup>[46]</sup>的改进,并在时间序列模型的估计中得到了广泛的应用,例如 Carlin 等<sup>[47]</sup>、Carter 和 Kohn<sup>[48]</sup>,而 Jacquier 等<sup>[49]</sup>最早将其应用到了随机波动率模型的估计上.

与传统极大似然估计方法不同,贝叶斯方法中将状态变量  $h_t, S_t$  均视为待估的参数.记  $\tilde{y}_t = (y_t, \dots, y_t)'$ ,  $\tilde{h}_t = (h_t, \dots, h_t)'$ ,  $\tilde{S}_t = (S_t, \dots, S_t)'$ ,  $\theta = (p, q, \varphi, \mu_1, \mu_2, \sigma_\varepsilon, \sigma_\eta)'$  为模型原有参数.这样新的参数空间变为  $\omega = (\tilde{h}_t', \tilde{S}_t', \theta)'$ : 根据贝叶斯法则,参数向量的联合后验分布可以表示为

$$f(\tilde{h}_T, \tilde{S}_T, \theta | \tilde{y}_T) \propto f(\tilde{y}_T | \tilde{h}_T, \tilde{S}_T, \theta) f(\tilde{h}_T | \tilde{S}_T, \theta) f(\tilde{S}_T | \theta) f(\theta) \tag{11}$$

其中

$$f(\tilde{y}_T | \tilde{h}_T, \tilde{S}_T, \theta) = f(\tilde{y}_T | \tilde{h}_T, \theta) = \prod_{i=1}^T f(y_i | h_i, \theta) = \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left(-\frac{(y_i - h_i)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \tag{12}$$

$$f(\tilde{h}_T | \tilde{S}_T, \theta) = \prod_{i=1}^T f(y_i | h_i, S_i, \theta) = \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{(h_i - v_{s_i} - \varphi h_{i-1})^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \tag{13}$$

由此模型的 MCMC 估计算法概述如下:

1) 给出初始值  $\tilde{h}_T^0 = \{h_i^0\}_{i=1}^T$  和  $\theta$  的初始值  $\theta^0 = (p^{(0)}, q^{(0)}, \varphi^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \sigma_\varepsilon^{(0)}, \sigma_\eta^{(0)})'$ , 其中  $\tilde{S}_T$  的初始抽样是根据状态转移概率矩阵的初值生成的马尔科夫过程得到的,令  $g = 0$ .

2) 运用多步移动的方法,从  $f(\tilde{S}_T | \tilde{h}_T^{(g)}, p^{(g)}, q^{(g)}, \varphi^{(g)}, \mu_1^{(g)}, \mu_2^{(g)}, \sigma_\varepsilon^{(g)})$  中成块抽取  $\tilde{S}_T^{(g+1)}$ .

3) 从  $f(p, q | \tilde{S}_T^{(g+1)})$  中抽取  $p^{(g+1)}, q^{(g+1)}$ .

4) 运用多步移动的方法,从  $f(\tilde{h}_T | \tilde{y}_T, \tilde{S}_T^{(g+1)}, \varphi^{(g)}, \mu_1^{(g)}, \mu_2^{(g)}, \sigma_\varepsilon^{(g)}, \sigma_\eta^{(g)})$  中抽取  $\tilde{h}_T^{(g+1)}$ .

5) 从  $f(v_0, v_1 | \tilde{S}_T^{(g+1)}, \tilde{h}_T^{(g+1)}, \varphi^{(g)}, \sigma_\eta^{(g)})$  中抽取  $\mu_1^{(g+1)}, \mu_2^{(g+1)}$ .

6) 从  $f(\varphi | \mu_1^{(g+1)}, \mu_2^{(g+2)}, \tilde{S}_T^{(g+1)}, \tilde{h}_T^{(g+1)}, \sigma_\eta^{(g)})$  中抽取  $\varphi^{(g+1)}$ .

7) 从  $f(\sigma_\varepsilon, \sigma_\eta | \mu_1^{(g+1)}, \mu_2^{(g+1)}, \tilde{S}_T^{(g+1)}, \tilde{h}_T^{(g+1)}, \varphi^{(g+1)})$  中抽取  $\sigma_\varepsilon^{(g+1)}, \sigma_\eta^{(g+1)}$ .

上述抽样过程共进行  $M + N$  次,其中  $M$  次为预烧(burn in sample),确保抽样过程收敛,而参数的分布则利用随后的  $N$  次抽样计算得到.

## 2 模拟结果

为了验证上述吉布斯抽样方法的估计性质,进行了如下的模拟.由于极差的计算需要利用日内最高和最低的价格数据,采用离散化的几何布朗运动来生成日内的价格序列

$$s_{t, \Delta} = s_{t, (i-1)\Delta} + \sigma_t \varepsilon_{st} \sqrt{\Delta} \tag{14}$$

$$\log \sigma_t = (1 - \varphi) \mu_{S_t} + \varphi \log(\sigma_{t-1}) + \beta \varepsilon_{st} \sqrt{H} \tag{15}$$

其中  $T$  表示天数;  $N$  表示日内价格观测数,  $tN < i \leq (t+1)N, t = 1, \dots, T; H = 1/257$  是年度化时间区间;  $\Delta = H/N$  是日内价格变动的的时间区间;  $\varepsilon_{st}$  和  $\varepsilon_{st}$  是标准正态的扰动项.在模拟中,假设  $\varphi = 0.9, \mu_1 = -1, \mu_2 = -1.5$ , 对应波动率的高状态和低状态.同时  $p = 0.99, q = 0.97, N = 1000, \beta = 0.75, T = 1000$ . 根据上述设定,可以计算得到  $\sigma_\eta = 0.0468, \sigma_\varepsilon = 0.29$ . 根据对数极差的分布,其均值为  $0.43 + 0.5 \log H + \log \sigma_t$ , 因此为与  $\log \sigma_t$  对应,极差应减去  $0.43 + 0.5 \log H$  得到调整后极差.本文均进行这一调整,类似的做法也可在文献[50]中找到.

设定完成后,采用 MCMC 估计方法每进行一次模拟,得到每个参数的分布.为了近似反映多次模拟的整体效果,采用一次模拟的后验均值作为该次模拟的代表,并重复模拟 500 次,对 500 个后验均值求均值,标准差及 95% 的区间.从表 1 的结果可以看到,这样得到的均值与模拟时采用的真实值非常接近,均值的标准差普遍较小.同时,真

实值也落在 95% 的均值分布区间中,同时与区间的端点也比较接近,这表明 500 次模拟和估计得到的后验均值均较为接近真实值.上述模拟表明,采用的 MCMC 方法能够得到参数的有效估计.模

拟研究表明,至少对于长度为 1 000 的样本而言,上述估计方法能够得到参数的准确估计,而由于极差估计量的效率优势,与同等长度的收益率数据而言对参数的估计精度更高.

表 1 500 次模拟结果

Table 1 Result of 500 times of simulation

参数	真实值	均值	标准差	95% 区间
$p$	0.990 0	0.983 3	0.007 1	[0.967 4 0.993 3]
$q$	0.970 0	0.961 1	0.010 1	[0.945 7 0.981 4]
$\varphi$	0.900 0	0.882 1	0.048 2	[0.768 0 0.948 7]
$\sigma_\eta$	0.046 8	0.047 1	0.011 2	[0.029 2 0.071 5]
$\sigma_\varepsilon$	0.290 0	0.294 5	0.007 3	[0.279 5 0.310 0]
$\mu_1$	-1.000 0	-1.034 4	0.060 7	[-1.166 8, -0.926 6]
$\mu_2$	-1.500 0	-1.538 9	0.028 1	[-1.602 1, -1.488 5]

注:表中均值、标准差和 95% 区间表示对 500 次模拟得到的后验均值计算得到.

### 3 实证结果

#### 3.1 模型估计结果

这里分别估计上证综合指数、深证成分指数和沪深 300 指数的波动状况.由于本文采用作为比较基准的已实现波动率需要利用日内高频数据,考虑到数据可得性,上证综指和深圳成指的样本区间为 2003 - 01 - 02 ~ 2011 - 09 - 26,共 2 121 个观测,沪深 300 指数的样本区间从该指数的发布日期起,为 2005 - 04 - 08 ~ 2011 - 09 - 26,共 1 576 个观测.上述样本均超过了模拟的样本程度,对于实证分析而言样本长度是充分的.数据来源为 CSMAR 数据库.已实现波动率计算方法与 Andersen 等<sup>[7 8]</sup>和 Patton<sup>[36]</sup>的一致,为日内 5 min 收益率平方和计算得到,并根据 Tauchen 和

Zhou<sup>[51]</sup>的做法,删除了隔夜收益率.先验分布的设定中,借鉴 Kim 等<sup>[39]</sup>、So 等<sup>[32]</sup>的做法,设定  $p, q$  的先验分布为贝塔分布  $f(p) \propto p^{\alpha_0} (1-p)^{1-\alpha_1}$ ,  $0 < p < 1$  其中  $\alpha_0 = 10, \alpha_1 = 1$ ;  $\varphi, \mu_1, \mu_2$  的先验分布为正态分布  $N(0.95, 1), N(-3, 1), N(1, 1)$ ;  $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2$  的先验分布为逆伽马分布  $IG(0.5\nu_0, 0.5\delta_0)$ ,  $\nu_0 = 2, \delta_0 = 0.02\nu_0$ .在估计过程中,预烧抽样次数为 50 000,总抽样次数为 100 000.经尝试更多的抽样次数,结果基本不变.

表 2 报告了参数的均值及其后验分布的 90% 区间.从中可以注意到,主要参数的后验区间均比较窄,表明估计效率较高.对 3 个市场而言,其中高、低波动区制的概率均达到较高水平,这表明高波动或者低波动区制均具有很强的持续性.而且,高、低波动均值在 90% 置信区间都明显不相交,这说明模型可以捕捉显著的高低波动水平变化.

表 2 RMSSV 模型估计结果

Table 2 Estimation results of RMSSV models

参数	上证综指		深证成指		沪深 300	
	均值	90% 区间	均值	90% 区间	均值	90% 区间
$p$	0.995 2	[0.985 8, 0.999 3]	0.995 5	[0.987 0, 0.999 3]	0.996 1	[0.990 5, 0.999 4]
$q$	0.997 6	[0.993 7, 0.999 6]	0.997 6	[0.994 3, 0.999 6]	0.996 8	[0.992 0, 0.999 5]
$\mu_1$	-4.018 1	[-4.133 2, -3.891 1]	-3.915 1	[-4.004 5, -3.810 3]	-3.991 4	[-4.091 5, -3.888 3]
$\mu_2$	-4.631 8	[-4.721 2, -4.556 6]	-4.526 6	[-4.598 3, -4.465 0]	-4.535 8	[-4.615 3, -4.447 8]
$\varphi$	0.931 1	[0.901 4, 0.953 7]	0.919 5	[0.887 2, 0.948 0]	0.928 6	[0.897 2, 0.957 6]
$\sigma_\eta$	0.097 7	[0.084 1, 0.116 3]	0.108 9	[0.093 5, 0.125 1]	0.103 6	[0.087 5, 0.122 9]
$\sigma_\varepsilon$	0.364 6	[0.353 0, 0.375 7]	0.360 6	[0.349 3, 0.371 8]	0.365 8	[0.353 4, 0.378 3]

从图 1 来看, 沪深股市表现出了类似的波动趋势. 从区制转移特征来看, 两个市场均在 2006 年下半年开始进入高波动的区制. 这主要是由于 2005 年 4 月 30 日股权分置改革全面启动以来, 市场交易活跃, 从 2005 年底开始股市进入牛市, 指数一路上扬, 市场整体波动也处在较高水平. 2007 年下半年开始随着国内外经济形势变动的影 响, 特别是 2008 年下半年美国次贷危机扩大化, 市场开始持续下跌, 继续导致我国股票市场持续波动, 并延续到 2010 年初. 进入 2010 年以来, 由于股指处于低位调整阶段, 国际金融形势虽然出现波动, 但并没有造成持续影响, 股指回复低波动区制. 沪深 300 股指期货在 2010 年 4 月推出, 并没有观察到对现货市场的波动区制有明显影响. 此外, 沪深 300 指数的波动也印证了上述的区制特征. 由于沪深 300 指数发布较晚, 样本期相对较短, 但图 1 的结果表明所采用的估计方法对不同的样本区间均能准确识别波动区制. 此外, 由于我国市场是新兴市场, 与欧美成熟市场相比时间跨度较短, 在选取的样本中仅观察到一次较为明显的波动区制转移, 随着数据的延长, 预期会有更多的区制变化. 但是, 值得注意的是, 即使对于例如沪深 300 指数 5 年多的样本而言, 股市就表现出了 1 次区制变动, 这说明作为新兴市场波动转移仍属频繁, 而不考虑这一情况的波动率模型估计很有可能导致模型误设问题. 此外, 波动区制转移分析对于监管部门深入认识股市内在规律和投资者合理把握市场时机进行资产配置均具有现实意义.

### 3.2 波动率模型比较

本节将采用 Patton<sup>[36]</sup> 提出以已实现波动率作为比较基准的方法. 在波动率估计和预测的比较中, 由于波动率是不可观测的, 通常采用的收益率的平方作为基准, 会带来较大的误差, 同时比较基准的选择也会带来偏误. 因此在 Diebold 和 Mariano<sup>[52]</sup>、West<sup>[53]</sup> 特别是 Hansen 和 Lunde<sup>[37]</sup> 研究的基础上, Patton<sup>[36]</sup> 提出了以已实现波动率作为比较的基准. 同时, Patton<sup>[36]</sup> 提出了对于条件无偏的波动率代理变量稳健的损失函数族. 一般来讲, 该函数族表达式如下

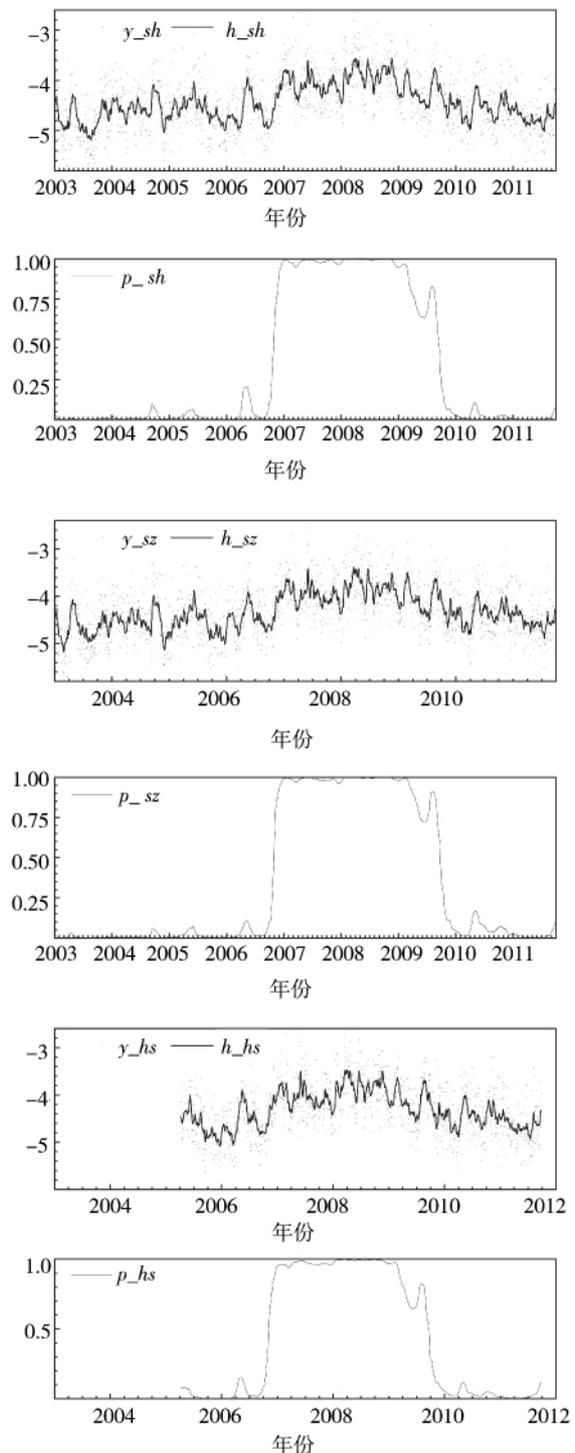


图 1 上证综指、深圳成指和沪深 300 指数调整后极差 ( $y_{sh}$ ,  $y_{sz}$ ,  $y_{hs}$ )、对数波动率估计值 ( $h_{sh}$ ,  $h_{sz}$ ,  $h_{hs}$ ) 及高波动区制概率 ( $p_{sh}$ ,  $p_{sz}$ ,  $p_{hs}$ )

Fig. 1 Adjusted log range, estimated log volatility and probabilities of high volatility regime for Shanghai Composite Index, Shenzhen Component Index and China Securities Index 300

$$L(\hat{\sigma}^2; h; b) = \begin{cases} \frac{1}{(b+1)(b+2)}(\hat{\sigma}^{2b+4} - h^{b+2}) - \\ \frac{1}{b}h^{b+1}(\hat{\sigma}^2 - h) & b \notin \{-1, -2\} \\ h - \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2 \log \frac{\hat{\sigma}^2}{h} & b = -1 \\ \frac{\hat{\sigma}^2}{h} - \log \frac{\hat{\sigma}^2}{h} - 1, & b = -2 \end{cases} \quad (16)$$

其中  $\hat{\sigma}^2$  代表已实现波动率;  $h$  代表其他波动率模型得到的结果;  $b$  为参数. 作为比较模型, 考虑了 GARCH(1, 1)、EGARCH(1, 1)、FIGARCH(1,  $d$ , 1)、APGARCH(1, 1)、SWARCH(2, 1)、SV 模型以及马尔科夫转移随机波动率模型 (Markov switching stochastic volatility model, MSSV 模型), 为考虑收益率的厚尾特征, 上述基于收益率的 GARCH 类模型的残差均为学生  $t$  分布, 其自由度也是待估

参数. 此外, 还有基于极差的随机波动率模型 (RSV 模型) 等. 上述模型的具体设定及估计可参见文献 [2, 15, 26, 32, 39, 54-56] 等的研究, 限于篇幅, 具体估计结果从略.

作为整体拟合效果的衡量, 表 3 首先参考 Meddahi<sup>[57]</sup> 报告了 Mincer-Zarnowitz 回归的结果.

在回归设定中  $\hat{\sigma}_i^2 = \beta_0 + \beta_1 h_{it} + e_{it}$ , 其中  $\hat{\sigma}_i^2$  代表已实现波动率, 而  $h_{it}$  代表其他波动率模型得到的结果. 调整后的  $R^2$  可以作为波动率估计结果与已实现波动率接近程度的度量. 对于上证综指、深圳成指和沪深 300 指数的研究结果均表明 RMSSV 模型得到了最佳的拟合效果. 同时, Mincer-Zarnowitz 检验的原假设是  $\beta_0 = 0$  且  $\beta_1 = 1$ . 在此较严格的约束条件下,  $\chi^2$  统计量均拒绝了原假设, 表明波动率估计与已实现波动率均存在一定差距, 这与 Patton 的结果类似.

表 3 Mincer-Zarnowitz 回归结果  
Table 3 Result of Mincer-Zarnowitz regression

	GARCH	EGARCH	FIGARCH	APGARCH	SV	MSSV	SWARCH	RSV	RMSSV
上证综指									
$\hat{\beta}_0$	-0.070 2	-0.159 0	0.177 5	-0.079 1	-0.294 5	-0.207 3	-0.306 7	-0.512 6	-0.522 4
(s. e.)	0.117 9	0.113 3	0.109 4	0.114 1	0.136 6	0.113 2	0.120 4	0.126 0	0.127 0
$\hat{\beta}_1$	0.712 0	0.744 0	0.621 4	0.717 5	0.826 7	0.840 4	0.774 2	1.509 6	1.503 3
(s. e.)	0.052 7	0.050 9	0.045 5	0.051 1	0.063 3	0.056 5	0.055 2	0.095 4	0.094 2
$\chi^2$	173.59	178.97	155.08	167.16	238.03	282.55	286.54	47.44	47.88
$p$	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
调整 $R^2$	0.353 3	0.363 8	0.304 8	0.358 3	0.437 3	0.492 5	0.346 2	0.558 4	0.580 2
深证成指									
$\hat{\beta}_0$	-0.232 5	-0.251 1	-0.146 3	-0.182 3	-0.475 3	-0.319 2	-0.280 4	-0.553 9	-0.576 2
(s. e.)	0.163 0	0.160 6	0.152 5	0.158 6	0.178 3	0.153 5	0.170 8	0.186 0	0.184 4
$\hat{\beta}_1$	0.768 6	0.776 5	0.746 6	0.758 7	0.885 1	0.868 6	0.775 8	1.452 4	1.450 4
(s. e.)	0.058 9	0.058 1	0.054 9	0.057 4	0.067 8	0.061 5	0.060 8	0.105 7	0.102 9
$\chi^2$	174.27	169.23	157.14	155.27	232.50	266.28	204.34	47.89	47.81
$p$	0.0000	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
调整 $R^2$	0.350 8	0.353 6	0.330 3	0.348 8	0.429 9	0.462 4	0.326 0	0.555 7	0.582 0
沪深 300									
$\hat{\beta}_0$	0.085 0	0.096 4	0.264 7	0.110 7	-0.274 9	-0.421 7	-0.254 2	-0.458 1	-0.531 5
(s. e.)	0.165 7	0.164 1	0.160 7	0.163 7	0.185 6	0.177 7	0.187 2	0.173 4	0.177 5
$\hat{\beta}_1$	0.653 8	0.656 9	0.589 4	0.650 2	0.796 9	0.909 3	0.732 3	1.437 3	1.465 5
(s. e.)	0.052 3	0.050 8	0.046 4	0.051 4	0.066 2	0.067 8	0.061 6	0.102 6	0.103 2
$\chi^2$	122.38	114.65	150.36	118.13	152.73	156.25	190.53	44.27	44.68
$p$	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
调整 $R^2$	0.304 0	0.303 3	0.279 0	0.302 7	0.397 6	0.474 7	0.316 3	0.533 1	0.551 6

表 4 进一步报告了 Diebold-Mariano-West (DMW) 检验结果. 利用式(16)的损失函数,对于给定的真实波动率代理变量  $\hat{\sigma}_t^2$  以及两个比较模型得到的估计结果  $h_{1t}$  和  $h_{2t}$ , 得到

$$u_{1,t} = L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1,t}), \quad u_{2,t} = L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2,t})$$

DMW 检验的原假设为  $E[u_{1,t} - u_{2,t}] = 0$ . 在表 4 中, 备选模型均与 RMSSV 模型进行比较, 负值表明 RMSSV 模型优于备选模型, 如果显著为负(临界值为  $t$  统计量临界值), 表明 RMSSV 模型显著优于备选模型.

表 4 Diebold-Mariano-West (DMW) 检验结果  
Table 4 Result of Diebold-Mariano-West (DMW) tests

$b$	GARCH	EGARCH	FIGARCH	APGARCH	SV	MSSV	SWARCH	RSV
上证综指								
1	-5.050	-5.216	-5.162	-5.138	-2.699	-1.511	-7.208	-2.574
0	-7.059	-7.394	-7.101	-7.115	-3.946	-2.020	-8.649	-3.235
-1	-12.231	-12.780	-12.440	-12.441	-7.189	-4.156	-12.837	-3.753
-2	-16.464	-16.896	-17.854	-16.970	-12.151	-9.729	-15.310	-3.708
-5	-7.361	-7.534	-7.341	-7.388	-7.666	-7.093	-7.191	2.604
深圳成指								
1	-4.824	-4.808	-4.929	-4.788	-3.415	-2.917	-7.321	-2.665
0	-7.101	-7.163	-7.179	-6.997	-4.991	-3.581	-9.820	-3.529
-1	-12.718	-12.958	-13.164	-12.719	-8.944	-6.153	-14.650	-4.197
-2	-15.696	-16.206	-16.548	-16.372	-12.572	-11.118	-15.909	-4.318
-5	-6.835	-6.871	-6.863	-6.870	-6.631	-6.542	-6.888	2.569
沪深 300								
1	-5.562	-5.390	-5.947	-5.487	-3.244	-0.524	-6.907	-2.067
0	-7.177	-7.024	-7.587	-7.079	-4.217	-1.178	-7.876	-2.613
-1	-10.915	-10.793	-11.399	-10.809	-6.566	-2.981	-10.756	-2.883
-2	-14.912	-14.924	-15.875	-14.936	-10.274	-6.817	-12.605	-2.452
-5	-5.219	-5.267	-5.263	-5.229	-5.221	-4.753	-5.160	2.009

综合表 3 和表 4, 对于不同的备选模型, 特别是基于收益率的模型, RMSSV 均表现出了明显的优势. 具体而言, 首先, 随机波动率类模型的表现好于 GARCH 类模型. Andersen 等<sup>[7]</sup> 认为, 与 GARCH 类模型相比, SV 模型更好地反映了潜在的市场波动率是不可观测这一特征. 这可能是 GARCH 模型方法与 SV 模型方法相对较差的原因. 其次, 基于极差的 RSV 和 RMSSV 模型的表现好于 SV 和 MSSV 模型. 例如, 对于上证综指而言, RSV 和 RMSSV 模型调整  $R^2$  为 0.558 4 和 0.580 2, 高于 SV 和 MSSV 模型的 0.437 3 和 0.492 5, 也高于 GARCH 类模型, 而这一结论对其余两个指数也是成立的. Alizadeh 等<sup>[15]</sup> 采用拟极大似然估计法比较了基于极差的 SV 模型与基于收益率的 SV 模

型的相对优势, 而本文扩展了上述结论, 在 MCMC 估计这一更有效的估计方法上, 发现基于极差的 SV 模型仍具有显著优势. 再次, 引入区制转移的 MSSV 模型的表现好于 SV 模型, RMSSV 模型好于 RSV 模型. 这表明对波动率建模引入区制转移的重要性. 最后, 与 RMSSV 模型表现最为接近的是 RSV 模型, 其中, 对于  $b$  的不同取值, 比较结果并不一致, 这与 Patton<sup>[36]</sup> 引入不同比较准则的动机是一致的. 在不同的比较准则下可能有不同的结果. 但是, 对于  $b$  的绝大部分取值, RMSSV 模型的表现仍好于 RSV 模型, 特别是与常用的 MSE 准则对应的  $b = 0$  的情况以及在 Patton<sup>[36]</sup> 推荐的与 QLIKE 准则对应的  $b = -2$  的情况下. 这一判断与 MZ 回归的结果也是一致的, 均表明了 RMSSV 模

型的比较优势.

## 4 结束语

为考察实证中常见的波动率水平在高、低波动状态之间转换的经验事实,本文将区制转移引入到基于极差的 SV 模型中. 随后,给出了基于区制转移状态空间模型的 MCMC 算法,并利用模拟证明了上述方法的有效性. 在实证部分,选取了中国市场具有代表性的 3 个指数(上证综指、深圳成指和沪深 300 指数)的极差数据,对模型进行了估计,发现在 2007 年到 2009 年间处在高波动率水平区制,这与该期间股市由单边牛市到单边熊市的剧烈转移以及国内外经济金融形势的大幅变动密切相关. 最后,采用 Patton<sup>[36]</sup> 提出的采用已实现波动率作为基准,以稳健损失函数作为判断准则的方法,与文献中常用的 GARCH 类模型和

SV 类模型进行了系统比较,论证了 RMSSV 模型的优势. 而这种优势可能来源于极差估计量本身的效率, MCMC 算法对参数和潜在波动率状态的准确识别以及引入区制转移对波动率结构变化的刻画.

当然,由于篇幅所限,上述比较选取了文献中较为有代表性的模型. 但由于波动率模型种类非常多,不可能涵盖所有方面,例如,在马尔科夫区制转移 GARCH 类模型比较方面,可以参见赵华和蔡建文<sup>[31]</sup> 的工作,在基于极差的 GARCH 类模型方面,可以参见 Brandt 和 Jones<sup>[50]</sup> 的工作. 而将上述模型等在统一框架下进行比较,可以作为未来的研究方向. 此外,上述比较可以通过样本外预测、VaR 的计算以及在资产组合选择中的应用等方式进行,也可以进一步扩展到日内高频数据的研究中. 与基于收益率的大量波动率文献相比,基于极差的方法相对较少,也期待有更多的工作投入到这一领域中来.

## 参 考 文 献:

- [1] Engle R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation [J]. *Econometrica*, 1982, 50(4): 987 - 1007.
- [2] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31(3): 307 - 327.
- [3] Taylor S. *Modeling Financial Time Series* [M]. Chichester( UK): John Wiley, 1986.
- [4] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility, with applications to bond and currency options [J]. *Review of Financial Studies*, 1993, 6(2): 327 - 343.
- [5] Bates D S. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in PHLX Deutschmark options [J]. *Review of Financial Studies*, 1996, 9(1): 69 - 107.
- [6] 乌 画, 易传和, 杜 军, 等. 基于多元随机波动模型的信用风险衍生定价 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(10): 55 - 62.  
Wu Hua, Yi Chuanhe, Du Jun, et al. Pricing credit risk with multivariate stochastic volatility model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(10): 55 - 62. (in Chinese)
- [7] Andersen T G, Bollerslev T, Diebold F X, et al. The distribution of realized stock return volatility [J]. *Journal of Financial Economics*, 2001, 61(1): 43 - 76.
- [8] Andersen T G, Bollerslev T, Diebold F X, et al. Modeling and forecasting realized volatility [J]. *Econometrica*, 2003, 71(2): 579 - 625.
- [9] Jiang G J, Tian Y S. The model-free implied volatility and its information content [J]. *Review of Financial Studies*, 2005, 18(4): 1305 - 1342.
- [10] Parkinson M. The extreme value method for estimating the variance of the rate of return [J]. *Journal of Business*, 1980, 53(1): 61 - 65.

- [11] Garman M, Klass M. On the estimation of security price volatilities from historical data [J]. *Journal of Business*, 1980, 53: 67–78.
- [12] Rogers L C G, Satchell S E. Estimating variance from high, low and closing prices [J]. *Annals of Applied Probability*, 1991, 1(4): 504–512.
- [13] Yang D, Zhang Q. Drift-independent volatility estimation based on high, low, open, and closing prices [J]. *Journal of Business*, 2000, 73: 477–491.
- [14] 唐勇, 张世英. 高频数据的加权已实现极差波动及其实证分析 [J]. *系统工程*, 2006, 24(8): 52–57.  
Tang Yong, Zhang Shiyong. Weighted realized range-based volatility based on high-frequency data and its empirical analysis [J]. *System Engineering*, 2006, 24(8): 52–57. (in Chinese)
- [15] Alizadeh S, Brandt M W, Diebold F X. Range-based estimation of stochastic volatility models [J]. *The Journal of Finance*, 2002, 57(3): 1047–1091.
- [16] Brandt M W, Diebold F X. A no-arbitrage approach to range-based estimation of return covariance and correlations [J]. *Journal of Business*, 2006, 79: 61–74.
- [17] Chou R. Forecasting financial volatilities with extreme values: The conditional autoregressive range (CARR) model [J]. *Journal of Money, Credit and Banking*, 2005, 37(3): 561–582.
- [18] Li H, Hong Y. Financial volatility forecasting with range-based autoregressive volatility model [J]. *Finance Research Letters*, 2011, 8(2): 69–76.
- [19] 周杰, 刘三阳. 条件自回归极差模型与波动率估计 [J]. *数量经济技术经济研究*, 2006, (9): 141–149.  
Zhou Jie, Liu Sanyang. Conditional autoregressive range model and estimation of volatilities [J]. *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 2006, (9): 141–149. (in Chinese)
- [20] 李红权, 汪寿阳. 基于价格极差的金融波动率建模: 理论与实证分析 [J]. *中国管理科学*, 2009, 17(6): 1–8.  
Li Hongquan, Wang Shouyang. Modeling financial volatilities based on price range: Theoretical research and empirical study [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2009, 17(6): 1–8. (in Chinese)
- [21] 蒋祥林, 吴晓霖, 王春峰. 基于日内价格幅度与回报的随机波动率模型 [J]. *系统工程*, 2006, 24(6): 68–73.  
Jiang Xianglin, Wu Xiaolin, Wang Chunfeng. Price-range and return based stochastic volatility model [J]. *System Engineering*, 2006, 24(6): 68–73. (in Chinese)
- [22] Lamoureux C G, Lastrapes W D. Persistence in variance, structural change, and the GARCH model [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1990, 8(2): 225–234.
- [23] Diebold F X, Inoue A. Long memory and regime switching [J]. *Journal of Econometrics*, 2001, 105(1): 131–159.
- [24] Granger C W J, Hyung N. Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P 500 absolute stock return [J]. *Journal of Empirical Finance*, 2004, 11(3): 399–421.
- [25] Hamilton J D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle [J]. *Econometrica*, 1989, 57(2): 357–384.
- [26] Hamilton J D, Susmel R. Autoregressive conditional heteroscedasticity and changes in regime [J]. *Journal of Econometrics*, 1994, 64(1/2): 307–333.
- [27] Cai J. A Markov model of switching-regime ARCH [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1994, 12(3): 309–316.
- [28] Gary S F. Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process [J]. *Journal of Financial Economics*, 1996, 42(1): 27–62.
- [29] 蒋祥林, 王春峰, 吴晓霖. 基于状态转移 ARCH 模型的中国股市波动性研究 [J]. *系统工程学报*, 2004, 19(3): 270–277.  
Jiang Xianglin, Wang Chunfeng, Wu Xiaolin. Investigating on volatility of Chinese stock market by regime-switching ARCH model [J]. *Journal of System Engineering*, 2004, 19(3): 270–277. (in Chinese)

- [30]孙金丽,张世英. 具有结构转换的 GARCH 模型及其在中国股市中的应用[J]. 系统工程,2003,21(6): 86-91.  
Sun Jinli,Zhang Shiyong. Regime-switching GARCH in China's stock market[J]. Systems Engineering,2003,21(6): 86-91. (in Chinese)
- [31]赵 华,蔡建文. 基于 MRS-GARCH 模型的中国股市波动率估计与预测[J]. 数理统计与管理,2011,30(5): 912-921.  
Zhao Hua,Cai Jianwen. Estimation and forecasting of volatility in China's stock markets with Markov regime-switching GARCH model[J]. Journal of Applied Statistics and Management,2011,30(5): 912-921. (in Chinese)
- [32]So M K P,Lam K,Li W K. A stochastic volatility model with Markov switching[J]. Journal of Business and Economic Statistics,1998,16(2): 244-253.
- [33]Smith D R. Markov-Switching and stochastic volatility diffusion models of short term interest rates[J]. Journal of Business and Economic Statistics,2002,20(2): 183-197.
- [34]Kalimipalli M,Susmel R. Regime-Switching stochastic volatility and short term interest rates[J]. Journal of Empirical Finance,2004,11(3): 309-329.
- [35]郑挺国. 基于有限混合状态空间的金融随机波动率模型及应用研究[D]. 长春: 吉林大学,2009.  
Zheng Tingguo. Financial stochastic volatility models and applications: Based on state space models with finite mixture [D]. Changchun: Jilin University,2009. (in Chinese)
- [36]Patton A J. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies[J]. Journal of Econometrics,2011,160(1): 246-256.
- [37]Hansen P R,Lunde A. Consistent ranking of volatility models[J]. Journal of Econometrics,2006,131(1/2): 97-121.
- [38]Harvey A C,Ruiz E,Shephard N. Multivariate stochastic variance models[J]. Review of Economic Studies,1994,61(2): 247-264.
- [39]Kim S,Shephard N,Chib S. Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models[J]. Review of Economic Studies,1998,65(3): 361-393.
- [40]Chib S,Nardari F,Shephard N. Markov chain Monte Carlo methods for generalized stochastic volatility models[J]. Journal of Econometrics,2002,108(2): 281-316.
- [41]Omori Y,Chib S,Shephard N,et al. Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference[J]. Journal of Econometrics,2007,140(2): 425-449.
- [42]Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables[J]. Annals of Mathematical Statistics,1951,22: 427-432.
- [43]Sun L C. Regime shifts in interest rate volatility[J]. Journal of Empirical Finance,2005,12(3): 418-434.
- [44]Kim C J,Nelson C. Business cycle turning points,a new coincident index,and tests of duration dependence based on a dynamic factor model with regime switching[J]. Review of Economics and Statistics,1998,80(2): 188-201.
- [45]Geman S,Geman D. Stochastic relaxation,Gibbs distribution and the Bayesian restoration of images[J]. IEEE Transactions on PAMI,1984,(6): 721-741.
- [46]Metropolis N,Rosenbluth A W,Rosenbluth M N,et al. Equations of state calculations by fast computing machines[J]. Journal of Chemical Physics,1953,21(3): 1087-1092.
- [47]Carlin B P,Polson N G,Stoffer D S. A Monte Carlo approach to nonnormal and nonlinear state-space modeling[J]. Journal of the American Statistical Association,1992,87(418): 493-500.
- [48]Carter C K,Kohn R. On Gibbs sampling for state space models[J]. Biometrika,1994,81(3): 541-553.
- [49]Jacquier E,Polson N G,Rossi P E. Bayesian analysis of stochastic volatility models[J]. Journal of Business and Economic Studies,1994,12(4): 371-389.
- [50]Brandt M W,Jones C. Volatility forecasting with range-based EGARCH models[J]. Journal of Business and Economic Statistics,2006,24: 470-486.

- [51] Tauchen G, Zhou H. Realized jumps on financial markets and predicting credit spreads [J]. *Journal of Econometrics*, 2011, 160(1): 102–118.
- [52] Diebold F X, Mariano R S. Comparing predictive accuracy [J], *Journal of Business and Economic Statistics*, 1995, 13(3): 253–263.
- [53] West K. Asymptotic inference about predictive ability [J]. *Econometrica*, 1996, 64(5): 1067–1084.
- [54] Nelson D B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach [J]. *Econometrica*, 1991, 59(2): 347–370.
- [55] Baillie R T, Bollerslev T, Mikkelsen H O. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1996, 74(1): 3–30.
- [56] Ding Z, Granger C W J, Engle R F. A long memory property of stock market returns and a new model [J]. *Journal of Empirical Finance*, 1993, 1(1): 83–106.
- [57] Meddahi N. A theoretical comparison between integrated and realized volatility [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2002, 17(5): 479–508.
- [58] Shephard N, Kim S. Bayesian analysis of stochastic volatility models comments [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1994, 12(4): 406–410.

## Range based regime switching stochastic volatility models with applications

ZHENG Ting-guo<sup>1</sup>, ZUO Hao-miao<sup>2</sup>

1. The Wang Yanan Institute for Studies in Economics, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. China Life Insurance Asset Management Company Ltd., Beijing 100033, China

**Abstract:** For financial volatility modeling, most of the studies use returns as proxies of volatility, whereas very few are devoted to volatility methods based on range, which is a more efficient proxy. Taking the advantages of stochastic volatility method into consideration, this paper introduces the regime shifts of volatility levels into the range based stochastic volatility model to capture possible structural changes in volatility levels in financial markets. Afterwards, this paper describes the MCMC algorithm to estimate the model and demonstrates its efficiency through a simulation. In the empirical part, based on the range data of Shanghai Composite Index, Shenzhen Component Index and China Securities Index 300, the RMSSV model is estimated. Using the realized volatility as the benchmark and robust loss function as the criterion, the relative advantage of the RMSSV model in comparison with several popular models in GARCH and SV families is demonstrated.

**Key words:** range; stochastic volatility; regime switching; MCMC

附录: 详细的 MCMC 估计程序

### 1) 抽取 $S_t$

此时模型转化为马尔科夫区制转移自回归模型。状态变量的抽取可取采用 Carlin 等<sup>[47]</sup>提出的单步抽取或者采用 Carter 和 Kohn<sup>[48]</sup>提出的多步抽取方法。Shephard 和 Kim<sup>[58]</sup>以及 Kim 等<sup>[39]</sup>论证了在 SV 模型的框架下多步抽取方法计算效率高和收敛速度快的特点。这里,采取多步吉布斯抽样的方法

$$f(S_T | \hat{h}_T) = f(S_T | \hat{h}_T) \prod_{t=1}^{T-1} f(S_t | \hat{h}_t, S_{t+1}) \quad (a1)$$

首先,应用 Hamilton 滤波,得到滤子概率  $\Pr(S_t | \hat{h}_t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ 。然后,利用贝叶斯原理,可计算

$$\Pr(S_t = 1 | \hat{h}_t, S_{t+1}) = \frac{\Pr(S_{t+1} | S_t = 1) \Pr(S_t = 1 | \hat{h}_t)}{\sum_{j=1}^2 \Pr(S_{t+1} | S_t = j) \Pr(S_t = j | \hat{h}_t)}$$

$t = T-1, T-2, \dots, 1$

据此 ,可以利用均匀分布生成状态变量  $S_t$  的时间序列 ,其中  $S_t$  取值为 0 或 1.

2) 抽取  $p$  和  $q$

假设  $p$  的先验分布为

$$f(p) \sim \text{Beta}(u_{11}, \mu_{10}) \propto p^{u_{11}-1} (1-p)^{u_{10}-1}$$

则其后验分布为

$$f(p | \mathcal{S}_T) \propto f(\mathcal{S}_T | p) f(p) \sim$$

$$\text{Beta}(u_{11} + n_{11}, \mu_{10} + n_{10}) \propto p^{u_{11}+n_{11}-1} (1-p)^{u_{10}+n_{10}-1}$$

其中  $n_{ij}$  表示从状态  $i$  转移到  $j$  的个数.

因此 ,可以从后验分布  $f(p | \mathcal{S}_T)$  中抽取  $p$ . 同理 ,可以抽取  $q$ .

3) 抽取  $\hat{h}_T$

此时 ,模型转化为线性状态空间模型  $\mathcal{S}_T$  在当中作为刻画结构变化的虚拟变量 ,直接从如下联合分布中抽取整个状态向量  $\hat{h}_T$

$$f(\hat{h}_T | \hat{y}_T) = f(h_T | \hat{y}_T) \prod_{t=1}^{T-1} f(h_t | \hat{y}_t, h_{t+1}) \quad (\text{a2})$$

具体而言 ,对于  $\hat{h}_T = (h_1, \dots, h_T)'$  ,首先采用卡尔曼滤波对状态空间模型进行估计 ,得到  $h_{T|T}, P_{T|T}$  以及  $h_{t|t}, P_{t|t}$  ,其计算式为

$$h_{T|T} = E(h_T | \hat{y}_T, \mathcal{S}_T) ,$$

$$P_{T|T} = \text{Cov}(h_T | \hat{y}_T, \mathcal{S}_T) ,$$

$$h_{t|t} = E(h_t | \hat{y}_t, h_{t-1}) = h_{t-1} + P_{t|t-1} f_{t-1}^{-1} \xi_{t-1} ,$$

$$P_{t|t} = \text{Cov}(h_t | \hat{y}_t, h_{t-1}) = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} f_{t-1}^{-1} P_{t|t-1}$$

式中

$$h_{t|t-1} = v_{S_{t-1}} + \varphi h_{t-1|t-1} ,$$

$$h_{t-1|t-1} = v_{S_{t-1}} + \varphi h_{t-1|t-1} ,$$

$$P_{t|t-1} = \varphi^2 P_{t-1|t-1} + \sigma_\eta^2 ,$$

$$\xi_{t-1} = y_t - h_{t|t-1} ,$$

$$f_{t-1} = P_{t|t-1} + \sigma_\varepsilon^2 ,$$

$$t = 1, 2, \dots, T-1.$$

随后 ,计算  $h_{t|t}, h_{t+1}$  和  $P_{t|t}, h_{t+1}$  ,其计算式为

$$\begin{aligned} h_{t|t}, h_{t+1} &= E(h_t | \hat{y}_t, h_{t+1}) \\ &= h_{t|t} + P_{t|t} \varphi (\varphi^2 P_{t|t} + \sigma_\eta^2)^{-1} (h_{t+1} - v_{S_{t+1}} - \varphi h_{t|t}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{t|t}, h_{t+1} &= \text{Cov}(h_t | \hat{y}_t, h_{t+1}) \\ &= P_{t|t} - P_{t|t} (\varphi^2 P_{t|t} + \sigma_\eta^2)^{-1} P_{t|t} , \\ t &= T-1, T-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

最后 ,从状态变量的条件分布中进行抽取  $h_T | \hat{y}_T$  ,  $\mathcal{S}_T \sim N(h_{T|T}, P_{T|T})$  ,  $h_t | \hat{y}_t, \mathcal{S}_t, h_{t+1} \sim N(h_{t|t}, h_{t+1}, P_{t|t}, h_{t+1})$  ,  $t = T-1, T-2, \dots, 1$ . 这种方法也被称为前向滤波后向抽样 (forward filtering backward sampling).

4) 抽取  $\mu_1$  和  $\mu_2$

$\mu_1, \mu_2$  从正态分布中抽取. 定义  $h_t^* = h_t - \varphi h_{t-1}$  ,  $S_{it}^* = S_{it} (1 - \varphi)$  ,  $i = 1, 2$  ,注意这里有  $S_{1t} = 1 - S_{2t}$ . 于是 ,式(7)可重新表示为

$$h_t^* = \mu_1 S_{1t}^* + \mu_2 S_{2t}^* + \sigma_\eta \eta_t \quad (\text{a3})$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2)'$  的先验分布为  $N(m_\mu, \Sigma_\mu)$  ,记  $\hat{h}_T^* = (h_1^*, \dots, h_T^*)'$  ,  $\hat{\mathcal{S}}_{iT}^* = (S_{i1}^*, \dots, S_{iT}^*)'$  ,  $\hat{\mathcal{X}}_T^* = (\hat{\mathcal{S}}_{1T}^*, \hat{\mathcal{S}}_{2T}^*)'$  ,则后验分布为

$$\begin{aligned} N((\Sigma_\mu^{-1} + \sigma_\eta^2 \hat{\mathcal{X}}_T^{*'} \hat{\mathcal{X}}_T^*)^{-1} (\Sigma_\mu^{-1} m_\mu + \sigma_\eta^{-2} \hat{\mathcal{X}}_T^{*'} \hat{h}_T^*) , \\ (\Sigma_\mu^{-1} + \sigma_\eta^2 \hat{\mathcal{X}}_T^{*'} \hat{\mathcal{X}}_T^*)^{-1}) \end{aligned}$$

5) 抽取  $\varphi$

定义  $\hat{y}_t^{**} = h_t - \mu_{S_t}$  ,  $\hat{x}_t^{**} = h_{t-1} - \mu_{S_t}$  ,则式(7)表示为  $\hat{y}_t^{**} = \varphi \hat{x}_t^{**} + \sigma_\eta \eta_t$  ,  $(\text{a4})$

$\varphi$  的先验分布为  $N(m_\varphi, \Sigma_\varphi) I(|\varphi| < 1)$  ,记  $\hat{Y}_T^{**} = (\hat{y}_2^{**}, \dots, \hat{y}_T^{**})'$  ,  $\hat{\mathcal{X}}_T^{**} = (\hat{x}_2^{**}, \dots, \hat{x}_T^{**})'$  ,则后验分布为

$$\begin{aligned} N((\Sigma_\varphi^{-1} + \sigma_\eta^{-2} \hat{\mathcal{X}}_T^{**'} \hat{\mathcal{X}}_T^{**})^{-1} (\Sigma_\varphi^{-1} m_\varphi + \sigma_\eta^{-2} \hat{\mathcal{X}}_T^{**'} \hat{Y}_T^{**}) , \\ (\Sigma_\varphi^{-1} + \sigma_\eta^{-2} \hat{\mathcal{X}}_T^{**'} \hat{\mathcal{X}}_T^{**})^{-1}) I(|\varphi| < 1) \end{aligned}$$

6) 从逆伽马分布中抽取方差参数  $\sigma_\eta$  和  $\sigma_\varepsilon$

$\sigma_\eta^2$  和  $\sigma_\varepsilon^2$  的先验分布分别为逆伽马分布  $IG(\frac{n_0}{2}, \frac{\delta_0}{2})$

和  $IG(\frac{n_1}{2}, \frac{\delta_1}{2})$  ,容易求出对应的后验分布分别为

$$IG\left(\frac{n_0 + T - 1}{2}, \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{y}_t^{**} - \varphi \hat{x}_t^{**})^2 + \delta_0}{2}\right)$$

和

$$IG\left(\frac{n_1 + T}{2}, \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - h_t)^2 + \delta_1}{2}\right)$$