

基于 CVaR 核估计量的风险管理^①

黄金波¹, 李仲飞², 姚海祥³

(1. 广东财经大学金融学院, 广州 510320; 2. 中山大学管理学院, 广州 510275;
3. 广东外语外贸大学信息学院, 广州 510006)

摘要: 条件风险价值(CVaR)是近几年发展起来的金融风险量化工具. 构建基于 CVaR 核估计量的风险优化和风险对冲模型, 并设计数值算法对其进行求解, 实现金融风险的估计与风险的优化同时进行. 中国 A 股市场历史数据的算例分析说明, 非参数核估计方法能够捕捉风险因子分布的尾部特征, 给出更为准确的风险估计结果; 基于 CVaR 核估计量的风险优化模型能够找到真实的最小风险组合和最小风险值; 相对于 CVaR 估计的方差协方差法和 Cornish-Fisher 展开, 基于 CVaR 核估计量的风险对冲效果最佳.

关键词: 条件风险价值(CVaR); 非参数核估计; 风险优化; 风险对冲

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2014)03-0049-11

0 引言

在金融全球化和自由化的背景下, 2008 年爆发的国际性金融危机及由此引发的欧债危机, 促使金融风险再次成为国内外金融实务界、理论界和监管机构共同关注的对象. 中国作为逐步走向开放的发展中国家, 在此次金融危机中未能幸免. 受此次金融危机影响, 中国经济至今未能走出低迷态势, 表现在经济增长放缓、金融市场疲软、人们的投资信心严重受挫等. 目前, 我国现代金融体系还不是十分完善, 抗风险能力较弱. 所以, 如何准确估计和有效管理金融市场风险显得尤为重要.

风险价值(Value-at-Risk, VaR)和条件风险价值(Conditional Value-at-Risk, CVaR)是当今最为流行的两大风险度量指标. VaR 关注的是某一个资产或资产组合在未来一个给定的期限内, 在给置信水平下的最大可能损失^[1]. 相对于传统的

方差指标, 这一概念同时涵盖不确定性和损失, 更能刻画投资者的心理. 所以, VaR 指标在国际上得到广泛的应用, 应用范围涉及证券公司、投资银行、国际性商业银行、养老金及金融监管机构等. 然而, Artzner 等^[2,3]提出一致性风险度量的概念, 并指出, 在一般条件下, VaR 不满足一致性风险度量理论中的次可加性公理, 即资产组合的 VaR 可能大于组合中各资产的 VaR 之和, 从而破坏投资组合理论中的风险分散化原理. 另外, VaR 考察在给置信水平下投资组合的最大潜在损失, 而对超过 VaR 水平的损失, 不能给出任何信息, 因而其所提供的信息可能会误导投资者. 基于此, Rockafellar 和 Uryasev^[4,5]给出了 CVaR 的概念, CVaR 度量的是损失超过 VaR 水平的条件期望值. CVaR 满足一致性风险度量要求, 弥补了 VaR 不满足次可加性, 没有考虑到尾部风险等缺陷. 而且 CVaR 的计算问题方便处理. CVaR 被学

① 收稿日期: 2013-09-27; 修订日期: 2013-12-01.

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(71231008); 教育部人文社会科学研究基金青年基金资助项目(10YJC790339; 12YJ CZH267); 广东省自然科学基金资助项目(S2011010005503); 广东省哲学社会科学规划资助项目(GD11YYJ07); 广东省高等学校高层次人才资助项目; 广东高等院校学科建设专项资金资助项目(科技创新项目).

通讯作者: 李仲飞(1963—), 男, 内蒙古鄂尔多斯人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: lnslzf@mail.sysu.edu.cn

术界认为是一种比 VaR 风险度量技术更为合理有效的现代风险度量和管理的工具^[6,7]。

针对金融风险度量指标 VaR 和 CVaR 的估计问题,理论界提出了很多方法。Engle 和 Manganelli^[8]将它们分为三大类。第一类是参数法,主要包括 GARCH 族模型和 Copula 函数法。第二类是半参数法,主要包括极值理论(extreme value theory,简称 EVT)和条件自回归 VaR^②。第三类是非参数方法,主要包括经验分布函数法和核估计方法。相对于参数半参数方法,非参数方法的优点是不需要事先对分布函数形式做任何的模型设定,避免人为的模型设定风险和参数估计偏差,能够给出较为准确的风险估计。更重要的是,非参数核估计方法可以允许金融时间序列数据之间相互依赖^[11,12]。

非参数方法在 VaR 和 CVaR 估计上的应用是近 10 年来的事情。Gourieroux 等^[13]首次给出了 VaR 的核估计量,但并没有证明该估计量的性质。Chen 和 Tang^[11]在收益率序列服从相依严平稳 α 混合序列具有几何衰减混合系数的条件下,证明了该估计量的强相合性。并且他们发现,与基于经验分布的次序统计量相比,该估计量具有更小的方差和均方误差。Scaillet^[14]首次将核估计方法应用到 CVaR 的估计上,给出了资产组合 CVaR 的核估计量,并在序列满足平稳强混合条件下,导出了资产组合 CVaR 及 MCVaR(Marginal CVaR)^③核估计量的渐进性质。Chen^[15]在 Scaillet^[14]及 Chen 和 Tang^[11]基础上比较了 CVaR 的非参数核估计量和基于经验分布的次序统计量之间的差别,得出二者在估计的方差和均方误差方面并无明显的差异。在 Scaillet^[14]工作的基础上,刘静等^[7]用两步核估计法估算期望损失^④(expected shortfall,简称 ES)的值,第一步是 VaR 的核估计,第二步是 ES 的核估计。同时他们放松了 Scaillet^[14]的前提条件,在 α 混合序列具有幂衰减混合系数条件下,得到 ES 核估计量的 Bahadur 表示,以及均方误差和渐近正态性的收敛速度。刘晓倩和周勇^[16]比较两步核光滑 ES 估计与 ES 完

全经验估计及一步核光滑估计的优劣,得到两步光滑化并不能减小 ES 估计的方差,反而会增大其方差的结论,这一发现与 Chen^[15]的结论一致。赵晓玲等^[12]利用 VaR 和 ES 的非参数方法估计 2008 年金融风暴前后的风险。结果发现:存在金融危机爆发前风险被低估及金融危机爆发后风险得到释放的现象,而且 VaR 和 ES 两个指标的结论一致。由于 CVaR 的核估计量具有良好的连续性和光滑性,可以方便地处理投资组合优化问题,这一优点是基于经验分布的次序统计量不具备的。所以,许多学者倾向于利用核估计方法来研究组合的 CVaR 及相关优化问题(见 Scaillet^[14]和姚海祥^[17])。

虽然国内外对 CVaR 的核估计方法方面的研究颇多,但鲜见有学者把风险估计同风险优化、组合选择统一起来研究。风险估计与风险优化问题一直以来相互独立发展。一方面,风险估计的相关理论研究发展了很多的风险估计方法,对实际风险的估计精度越来越高。另一方面,投资组合选择和风险优化的相关研究则在风险的理论模型假设下做投资决策,无视实际风险特征,使得投资组合选择模型的实用性大打折扣。Scaillet^[14]在这方面做了有益探索。他研究了资产组合 CVaR 和 MCVaR 的核估计,基于这种实际估计出来的风险,以图示的形式讨论了只存在两支风险证券情形下,组合 CVaR 和 MCVaR 随组合头寸变化的情况,得出组合的最小 CVaR 在两支证券的 MCVaR 相等处取得的结论。然而,这种图示法无法找到精确的最小 CVaR 及其组合头寸,而且在高维的情形下,这种图示法将会失效。实际上 Scaillet^[14]没能找到最小化 CVaR 的组合选择方法。所以,在前人工作的基础上,本文进一步讨论如何基于 CVaR 的非参数核估计做风险优化和风险对冲,从而实现风险估计与风险管理同步进行。在此基础上,利用中国 A 股市场的历史数据进行风险测算、

② 目前参数法和半参数法方面的研究比较多,这方面的最新进展可见周孝华等^[9];叶五一和缪柏其^[10]。

③ MCVaR 被定义为资产组合的 CVaR 其对组合头寸的导数,衡量组合风险对组合头寸的敏感性。

④ 在收益率(或损失)的分布满足连续性的条件下,ES 与 CVaR 是同一个风险度量指标的两个不同称呼。

风险优化和风险对冲的算例分析.

1 风险度量 CVaR 的非参数估计

1.1 单个证券 CVaR 的核估计

设 $\{Y_t\}_{t=0}^T$ 是某证券在 T 期内的市场价值, $R_t = \log(Y_t/Y_{t-1})$ 是第 t 期的对数收益, 假设 $\{R_t\}_{t=1}^T$ 是相依严平稳的时间序列^⑤. $L_t = -R_t$ 是第 t 期的对数损失, 设 L_t 的边际分布函数和边际密度函数分别为 $F(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$. 记给定概率 α 时的风险价值和条件风险价值分别为 v_α 和 u_α , 则根据定义, VaR 的数学表达式为: $v_\alpha = \inf\{v: F(v) \geq 1 - \alpha\}$. CVaR 的数学表达式为: $u_\alpha = E[L_t | L_t \geq v_\alpha]$ 其中 $E[\cdot]$ 为期望算子. 对 CVaR 的估计需要分两步进行.

第一步先估计 VaR, 令生存函数 $S(x) = 1 - F(x)$, $G(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du$ $g(\cdot)$ 为核函数, $G_h(x) = G(x/h)$ h 为窗宽, 则损失序列的生存函数的核估计为

$$\hat{S}(l) = 1 - \hat{F}(l) = T^{-1} \sum_{i=1}^T G_h(L_i - l) \quad (1)$$

VaR 的估计量 \hat{v}_α 为 $\hat{S}(l) = \alpha$ 的解.

第二步基于 VaR 的核估计量 \hat{v}_α , CVaR 的非参数核估计为

$$\hat{u}_\alpha = (T\alpha)^{-1} \sum_{i=1}^T L_i G_h(L_i - \hat{v}_\alpha) \quad (2)$$

在收益率 R_t 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的假设下, CVaR 可以表示成均值和方差的线性函数, 记 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布的密度函数, z_α 为标准正态分布下的 α 分位数, 则此时有^[18]

$$\begin{aligned} u_\alpha &= -E[R_t] + \sigma(R_t) \phi(z_\alpha) / \alpha \\ &= -\mu + \sigma \phi(z_\alpha) / \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 证券组合 CVaR 的核估计

考虑一个存在 n ($n > 1$) 种风险资产, 资产交易无摩擦的经济, 市场上不存在卖空限制, 假设第 i 种资产的收益率 r_i 是个随机变量, 则 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ 为 n 种风险资产的收益率向量. 投资者的财富标准化为 1, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 为投资者所

持有的投资组合头寸, 则组合的收益率 $R_x = x'r$. n 种风险资产在 T 期内的收益率记为 $\{r_t\}_{t=1}^T$, 其中 $r_t = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})'$, 则样本均值向量 $\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$, 样本协方差阵 $S^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})(r_t - \bar{r})'$. 投资组合在 T 期内的收益率为 $\{R_{xt}\}_{t=1}^T$, 其中 $R_{xt} = x'r_t$. 记组合的 VaR 和 CVaR 分别为 $v(x, \alpha)$ 和 $u(x, \alpha)$. 根据 CVaR 的定义, 投资组合的 CVaR 数学表达式为

$$u(x, \alpha) = E[-x'r | -x'r \geq v(x, \alpha)] \quad (4)$$

MCVaR 被定义为组合 CVaR 对组合头寸的导数, 即

$$\Delta_x u(x, \alpha) = E[-r | -x'r \geq v(x, \alpha)] \quad (5)$$

根据 Scaillet^[14] 的研究, 以下给出投资组合的 CVaR 和 MCVaR 的核估计量.

定义

$$[(\zeta_1, \zeta_2); \zeta_3] = (Th)^{-1} \sum_{i=1}^T \zeta_i g((\zeta_3 - \zeta_2)/h),$$

$\hat{I}(\zeta) = \int_{-\infty}^{-\zeta} [(r_t, x'r_t); u] du$, 其中 $g(\cdot)$ 为核函数, h 为窗宽. $v(x, \alpha)$ 的核估计 $\hat{v}(x, \alpha)$

可以通过下式得到

$$\int_{-\infty}^{-\hat{v}(x, \alpha)} [(1, x'r_t); u] du = \alpha \quad (6)$$

$\hat{I}(\hat{v}(x, \alpha)) / \alpha$ 给出了条件期望 $E[r | x'r < -v(x, \alpha)]$ 的估计, 从而, CVaR 和 MCVaR 的核估计公式为

$$\begin{cases} \hat{u}(x, \alpha) = -x'\hat{I}(\hat{v}(x, \alpha)) / \alpha, \\ \Delta_x \hat{u}(x, \alpha) = -\hat{I}(\hat{v}(x, \alpha)) / \alpha \end{cases} \quad (7)$$

Scaillet^[14] 证明了 $\hat{u}(x, \alpha)$ 和 $\Delta_x \hat{u}(x, \alpha)$ 的渐进正态性.

在 n 种资产的收益率服从联合正态分布 $N(\mu, \Sigma)$ 的情况下, 根据公式 (3) 简单推导易得

$$\begin{cases} u(x, \alpha) = -x'\mu + \phi(z_\alpha) \sqrt{x'\Sigma x} / \alpha, \\ \Delta_x u(x, \alpha) = -\mu + \phi(z_\alpha) (x'\Sigma x)^{-0.5} \Sigma x / \alpha \end{cases} \quad (8)$$

将样本均值向量 \bar{r} 和样本协方差阵 S^2 带入上式可

⑤ 对于相依结构来说这是一个很弱的条件, 大多数的金融时间序列过程, 例如 ARMA, GARCH, SV 等参数模型生成的数据在一些条件下符合严平稳过程.

得

$$\begin{cases} \hat{u}(x, \alpha) = -x\bar{r} + \phi(z_\alpha) \sqrt{x'S^2x}/\alpha, \\ \Delta_x \hat{u}(x, \alpha) = -\bar{r} + \phi(z_\alpha) (x'S^2x)^{-0.5} S^2x/\alpha \end{cases} \quad (9)$$

2 基于 CVaR 的风险优化

2.1 正态分布假设下的最小风险组合

在 n 种资产的收益率服从联合正态分布 $N(\mu, \Sigma)$ 的假设下,资产组合的收益率也服从正态分布,从而 $u(x, \alpha) = -x'\mu + \phi(z_\alpha) \sqrt{x'\Sigma x}/\alpha$, 最小 CVaR 的优化问题退化为

$$(A_1) \begin{cases} \min_x u(x, \alpha) = -x'\mu + \phi(z_\alpha) \sqrt{x'\Sigma x}/\alpha, \\ \text{s.t. } x'I = 1 \end{cases}$$

I 是元素全为 1 的 n 维列向量,根据刘小茂等^[19]的研究结果,当 $\phi(z_\alpha)/\alpha > \sqrt{D/C}$ 时,存在最小 CVaR 组合,最小 CVaR 组合的均值和风险分别为

$$\begin{cases} E_{\min \text{ CVaR}} = \frac{D(-A + \sqrt{(\phi(z_\alpha)/\alpha)^2 C - D}) + (\phi(z_\alpha)/\alpha)^2 AC}{C((\phi(z_\alpha)/\alpha)^2 C - D)} \\ \text{CVaR}_{\min} = C^{-1}(-A + \sqrt{(\phi(z_\alpha)/\alpha)^2 C - D}) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = -\hat{I}(\hat{v}(x, \alpha))/\alpha + \mu I, & \begin{cases} L_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{1}{T\alpha h} \sum_{i=1}^T g((-v(x, \alpha) - x r_i)/h) r_i r_i', \\ L_{\mu\mu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = 0. \end{cases} \\ L_\mu = \frac{\partial L}{\partial \mu} = x'I - 1 \end{cases}$$

迭代算法设计与求解:

步骤1 记 $X = (x, \mu)$ 给定初始 $X_0 = (x_0, \mu_0)$ 和一个很小的正数 ε 取定迭代计数变量 $k := 0$.

步骤2 依照以下公式分别计算 $h_k \hat{v}(x_k, \alpha)$:

$$h_k = 1.06 \times T^{-0.2} \times \sqrt{x_k' S^2 x_k} \hat{v}(x_k, \alpha) = \arg \min_v \left[\int_{-\infty}^{-v} \mathbb{I}[1 - x_k' r_i; u] du - \alpha \right].$$

得出 $h_k \hat{v}(x_k, \alpha)$ 后,可以得 $\hat{u}(x_k, \alpha) = -x_k' \hat{I}(\hat{v}(x_k, \alpha))/\alpha$, 同时可以计算 $f = (L_x, L_\mu)'$ 和 H , 如果 $\|f\| < \varepsilon$, 停止迭代, 输出结果 X_k ; 否则计算 H^{-1} , 如果 H^{-1} 不存在, 则迭代失败, 如果 H^{-1} 存在, 则转

其中

$$A = I'\Sigma^{-1}\mu, B = \mu'\Sigma^{-1}\mu, \\ C = I'\Sigma^{-1}I, D = BC - A^2$$

2.2 核估计框架下最小风险组合

在对组合 CVaR 进行非参数核估计的基础上,构建如下的最优化模型求解组合的最小 CVaR 和使得组合 CVaR 达到最小的头寸

$$(A_2) \begin{cases} \min_x \hat{u}(x, \alpha) = -x'\hat{I}(\hat{v}(x, \alpha))/\alpha, \\ \text{s.t. } x'I = 1 \end{cases}$$

CVaR 的估计中包含了 $\hat{v}(x, \alpha)$ 和 h 窗宽 h 的选择采取拇指法则(见 Li 和 Racine^[20]) 所以 优化问题 (A_2) 必须同时满足以下条件:

1) 窗宽满足方程约束:

$$h = 1.06 \times T^{-0.2} \times \sqrt{x'S^2x}$$

2) $\hat{v}(x, \alpha)$ 满足 VaR 的估计公式:

$$\int_{-\infty}^{-\hat{v}(x, \alpha)} \mathbb{I}[1 - x'r_i; u] du = \alpha$$

构造 Lagrange 函数:

$$L(x, \mu) = \hat{u}(x, \alpha) + \mu(x'I - 1).$$

一阶条件: $f = (L_x, L_\mu) = \vec{0}$ 二阶导数矩阵:

$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{\mu x} \\ L_{\mu x} & L_{\mu\mu} \end{pmatrix} \text{ 其中}$$

入步骤3.

步骤3 计算 $X_{k+1} = X_k - H^{-1}f$, 如果 $\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon$, 则停止迭代, 输出 X_{k+1} , 否则 $k := k + 1$ 转入步骤2.

3 基于 CVaR 的风险对冲

风险对冲关注如何在市场上买卖可交易产品来对冲掉所持资产的部分风险. 风险度量工具不同或者风险估计方法不同, 所得到的最优对冲比率通常会有所不同, 本节基于 CVaR 指标做风险对冲分析. 在市场风险因子服从正态(或椭圆)

分布的假设下, CVaR 可以表示成均值和方差的线性函数, 最小化 CVaR 的模型会退化成最小方差模型, 从而, 它们的对冲效果是一样的, 这种方法就是传统的 CVaR 的方差协方差估计法^[11]. 当金融市场数据表现出非正态(或非椭圆)分布时, 方差不再是一个优良的风险度量指标, 投资者除了关注像方差这样的二阶矩之外, 还会关注风险因子的高阶矩(如偏度、峰度等). CVaR 的 Cornish-Fisher 展开在不做任何分布假设下把风险因子的三阶矩和四阶矩包含进来, 是对方差协方差法的重大改进^[21 22]. 然而, Cornish-Fisher 展开式也只是对 CVaR 的近似估计, 只反映了风险因子前四阶矩上的信息, 更高阶矩的信息因计算公式过于复杂无法包含进来. 核估计方法在不涉及任何分布假设的背景, 能够准确地估计风险因子的分布函数, 从而能够得到更高阶矩的信息. 在样本容量足够大的假设下, 核估计方法能够得到风险因子所有矩的信息, 因此, 相对方差协方差法和 Cornish-Fisher 展开, 核估计法能得到更准确的 CVaR 估计值, 从而, 基于 CVaR 核估计量的风险对冲也更可靠. 以下将构建三种 CVaR 估计方法下的风险对冲模型, 推导出三种模型下的最优风险对冲比率, 并在下节基于我国的股票市场数据比较它们各自的对冲效果.

$$\Delta_x u(x, \alpha) = -\mu - \left[\frac{1}{6}(m_2 - 1) \Delta_x s_p + \frac{1}{24}(m_3 - 3m_1) \Delta_x k_p - \frac{1}{18}(2m_3 - 5m_1) s_p \Delta_x s_p \right] \sigma_p - \left[m_1 + \frac{1}{6}(m_2 - 1) s_p + \frac{1}{24}(m_3 - 3m_1) k_p - \frac{1}{36}(2m_3 - 5m_1) s_p^2 \right] \frac{\Sigma x}{\sigma_p}.$$

上式中

$$\Delta_x s_p = \frac{3}{\sigma_p^3} M_3(x \otimes x) - \frac{3s_p}{\sigma_p^5} \Sigma x,$$

$$\Delta_x k_p = \frac{4}{\sigma_p^4} M_4(x \otimes x \otimes x) - \frac{4k_p}{\sigma_p^6} \Sigma x.$$

把样本均值向量、样本协方差矩阵、样本协偏度矩阵和样本协峰度矩阵带入以上各式, 即可求得 CVaR 在 Cornish-Fisher 展开下的近似值.

假设 n 种风险资产的收益率向量 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ 的均值向量为 μ , 协方差矩阵为 Σ ; n 种风险资产收益率向量的协偏度矩阵 M_3 和协峰度矩阵 M_4 分别为

$$M_3 = E \{ [(r - \mu)(r - \mu)' \otimes (r - \mu)'] \}$$

$$M_4 = E \{ [(r - \mu)(r - \mu)' \otimes (r - \mu)' \otimes (r - \mu)'] \}.$$

其中 \otimes 表示 Kronecker 张量积^⑥. 假设一个 n 种风险资产的组合 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 则组合的期望 μ_p 、方差 σ_p^2 、偏度系数 s_p 和峰度系数 k_p 分别为

$$\mu_p = x' \mu, \sigma_p^2 = x' \Sigma x,$$

$$s_p = \frac{x' M_3(x \otimes x)}{\sigma_p^3},$$

$$k_p = \frac{x' M_4(x \otimes x \otimes x)}{\sigma_p^4}.$$

不做任何分布假设下, 概率 α 下组合 CVaR 的 Cornish-Fisher 展开式为^[21 22]

$$u(x, \alpha) = -x' \mu + \tilde{m}_\alpha \sqrt{x' \Sigma x} \quad (11)$$

其中 $\tilde{m}_\alpha = -[m_1 + \frac{1}{6}(m_2 - 1) s_p + \frac{1}{24}(m_3 - 3m_1) \times$

$$(k_p - 3) - \frac{1}{36}(2m_3 - 5m_1) s_p^2],$$

$$m_i = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\alpha} x^i \phi(x) dx, i = 1, 2, 3.$$

MCVaR 被定义为组合 CVaR 对组合头寸的导数, 经过简单推导可得

考虑如下风险对冲问题, 投资者可以买空卖空风险资产 2 来对冲他所持有的风险资产 1 的风险, 当然, 这里的风险用 CVaR 度量. 风险资产 1 的收益率 r_1 的理论均值和方差分别是 μ_1, σ_1^2 , 风险资产 2 的收益率 r_2 的理论均值和方差分别为 μ_2, σ_2^2 , r_1 与 r_2 的理论相关系数为 ρ . 问题是: 每份风险资产 1 需要买卖多少份的风险资产 2 构成一

⑥ 协偏度和协峰度矩阵的相关处理方法请参见姚京等^[22]; Athayde 和 Flores^[23]; Jondeau 和 Rockinger^[24].

个投资组合,使得这个投资组合的风险达到最小. 假设每份资产 1 需要持有 ω 份资产 2 来对冲其风险,那么这两份资产就构成了一个资产组合. 组合头寸 $x = (1 \ \omega)'$ 组合的收益率

$$r_p = r_1 + \omega r_2 \tag{12}$$

组合收益率的均值 $E[r_p] = \mu_1 + \omega\mu_2$, 组合收益率的方差 $\sigma_p^2 = \sigma_1^2 + \omega^2\sigma_2^2 + 2\rho\omega\sigma_1\sigma_2$. 概率 α 下组合收益率的最小风险(CVaR) 问题可以写成:

$$(A_3) \min_{\omega} CVaR(r_p, \alpha).$$

1) 在正态分布假设下的最优对冲比率. 概率 α 下组合 CVaR 的方差协方差估计量为

$$u(\omega, \alpha) = -(\mu_1 + \omega\mu_2) + \frac{1}{\alpha}\phi(z_\alpha) \times \sqrt{\sigma_1^2 + \omega^2\sigma_2^2 + 2\rho\omega\sigma_1\sigma_2} \tag{13}$$

其中 z_α 为标准正态分布下的 α 分位数, $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布的密度函数. 最小 CVaR 组合选择的一阶条件为:

$\omega = \frac{\alpha\mu_2\sigma_p(\omega)}{\phi(z_\alpha)\sigma_2} - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}$, 这个式子并不能给出最优对冲比率 ω 的显示解, 因为 $\sigma_p(\omega)$ 是 ω 的函数, 可以调用牛顿迭代法求出数值解, 记为 ω_{norm} .

2) Cornish-Fisher 展开式下的最优对冲比率. 概率 α 下组合 CVaR 的 Cornish-Fisher 展开为

$$u(x, \alpha) = -x'\mu + \tilde{m}_\alpha \sqrt{x'\Sigma x} \tag{14}$$

其中 $x = (1 \ \omega)'$, $\mu = (\mu_1 \ \mu_2)'$,

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, \tilde{m}_α 定义同上. 最小 CVaR

的一阶条件为: $\Delta_\omega u(x, \alpha) = 0$, 通过数值算法可以求得最优的对冲比率, 记为 ω_{c-f} .

3) 核估计下的最优对冲比率. 不做任何分布假设下, 概率 α 下组合 CVaR 的核估计为

$$\hat{u}(x, \alpha) = -x'\hat{v}(x, \alpha) / \alpha \tag{15}$$

其中 $x = (1 \ \omega)'$, 最优化问题: $\min_{\omega} \hat{u}(x, \alpha)$. 此问题可通过 2.2 节给出的优化算法求解, 记最优的对冲比率为 ω_{kernel} .

求出三种方法下的最优对冲比率, 进而可以

求出三种方法下经过风险对冲后的条件风险价值, 分别记为: $u_{norm}, u_{c-f}, u_{kernel}$.

4 基于中国 A 股市场数据的研究

本节利用中国 A 股市场数据进行实证分析, 首先本文分别基于中国金融市场的历史数据和蒙特卡罗模拟数据来估计我国金融市场的系统风险和个股风险, 其中本文选择上证综指和深证成指的指数收益率风险来代表系统风险, 收集深发展 A 和万科 A 的日收益率数据来估计这两支股票的个股风险. 其次, 估计了这两支股票的组合 CVaR 和 MCVaR, 找到它们的最小 CVaR 组合和对应的最小 CVaR. 最后, 本文给出了一个利用上证综指收益率对冲万科 A 的收益率风险的算例.

4.1 中国 A 股市场的风险测算

由于我国从 1996 年 12 月 16 日后开始实施涨跌停板限制, 故而本文收集上证综合指数和深证成份指数从 1996 年 12 月 16 日至 2010 年 12 月 31 日共 3 397 个日收盘数据. 同时为了估计个股风险, 本文收集深发展 A 和万科 A 自 2000 年 1 月 4 日至 2010 年 12 月 31 日共 2 609 个日收盘价数据. 由于股票的研究一般采取对数收益率, 所以, 本文采用的也是对数收益率, 为了方便, 每个收益率数据都乘以 100.

方差协方差法通常设定数据服从正态分布, 可是国内外大量的实证和经验研究发现, 绝大多数金融数据分布呈现“尖峰厚尾”特性, 这使实际的 CVaR 值常常被低估^[25]. 以我国上证综指和深证成指收益率的数据为例(见表 1), 从 J-B 统计量及其 p 值来看, 可以拒绝它们服从正态分布的假设. 再从峰度和偏度来看, 上证综指和深证成指收益率的偏度系数都小于零, 说明分布存在“左偏”, 不具有对称性, 峰度系数大于 3, 说明分布要比正态分布陡峭, 尾部要比正态分布厚, 存在“尖峰厚尾”现象.

表 1 上证综指与深证成指收益率的描述性统计

Table 1 Descriptive statistics of SSE composite index and SZSE component index returns

统计量	均值	中位数	最大值	最小值	标准差	偏度	峰度	J-B	ρ 值
上证综指	0.027	0.074	9.401	-10.437	1.759	-0.325	7.512	2941.53	0.00
深证成指	0.032	0.063	9.530	-10.627	1.941	-0.313	6.703	1996.45	0.00

图 1 直观地显示了以上结论,深色的密度函数曲线是基于核估计方法得到的,浅色的密度函数曲线是在正态分布假设下得到的.二者具有相同的样

本均值和方差,但是,基于核估计的密度函数曲线波峰更高,线型更加陡峭,尾部的概率更大,凸显“尖峰厚尾”特征,上证综指和深证成指有相似的特征.

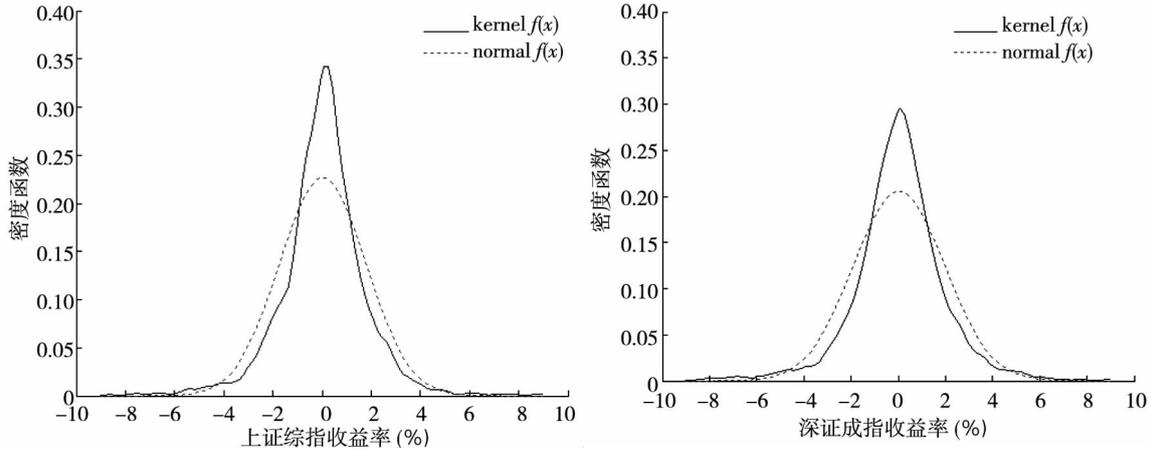


图 1 上证综指和深证成指收益率的样本分布

Fig. 1 Sample distribution of SSE composite index and SZSE component index returns

注: $kernel f(x)$ 为密度函数的核估计, $normal f(x)$ 为正态假设下的密度函数估计

以上说明,上证综指和深证成指的日收益率数据存在左偏、尖峰厚尾等现象,是典型的非正态分布.而方差协方差法基于正态分布的假设对 CVaR 进行估计,在非正态分布情形下将产生有偏的估计.为了比较,以下分别基于非参数核估计方法和方差协方差法得出上证综指和深证成指的 CVaR 估计结果(见表 2). CVaR 的估

计结果显示,在 10% 以下的损失概率上,方差协方差法都会低估我国金融市场的系统风险,而且上证综指和深证成指两支股票指数都存在这种现象.另外,损失概率在 1% 到 10% 之间变动,在相同的损失概率水平上,深证成指的风险都大于上证综指,这与它们的标准差标准一致(见表 1).

表 2 风险度量 CVaR 估计结果

Table 2 Estimation results of risk measure CVaR

概率		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
上证综指	核估计法	7.012	5.870	5.200	4.701	4.323	4.029	3.792	3.595	3.426	3.278
	方差协方差	4.660	4.230	3.962	3.762	3.600	3.464	3.346	3.241	3.146	3.059
深证成指	核估计法	7.569	6.451	5.733	5.198	4.767	4.435	4.167	3.941	3.748	3.579
	方差协方差	5.140	4.666	4.369	4.149	3.971	3.821	3.690	3.574	3.469	3.374

以上基于上证综指和深证成指的历史收益率数据来估计系统风险,这种方法的关键假设是历史可以代表未来,然而,实际情况往往并非如

此.所以在估计深发展 A 和万科 A 两支股票的个股风险时,本文假设两支股票价格服从几何布朗运动,采用蒙特卡罗模拟技术^⑦来模拟它们未

⑦ 蒙特卡罗模拟技术是基于未来的数据生成方法,功能十分强大,可以用于收益率服从各种不同的随机过程下的模拟分析,蒙特卡罗方法利用计算机生成大量情景,使得风险测算能够得出更加可靠、更全面的结论.另外,蒙特卡罗方法能够对非线性资产定价模型进行模拟.但是,蒙特卡罗方法要严格依赖所选择的随机过程或者定价公式,模型选择错误将导致模拟结果的系统性偏差.

来的价格变化路径,并得到了1 000个未来的价格样本,用这1 000个价格样本除以初始价格便得到1 000个未来收益率的样本数据.结合这种蒙特卡罗模拟技术和非参数核估计方法,本文得到深发展A和万科A在模拟数据下的CVaR核估计值.同时,本文也测算了历史数据下二者的CVaR核估计值,估计结果见表3.深发展A和万科A的测算结果都显示,在同一概率水平上,历史数据测算出来的风险值高于模拟数据测算出来的风险值.模拟数据和历史数据的测

算结果都显示,在同一概率水平上,万科A的CVaR核估计值都高于深发展A的CVaR核估计值.这说明,万科A比深发展A具有更高的风险,这与它们的标准差标准一致^⑧.另外,与表2的系统风险进行对比可以看到,在历史数据和核估计方法下,在同一概率水平上,深发展A和万科A的风险值高于上证综指和深证成指,即深发展A和万科A的个股风险高于系统风险.四者的风险大小关系是:万科A > 深发展A > 深证成指 > 上证综指.

表3 风险度量 CVaR 的核估计值

Table 3 Kernel estimation value of risk measure CVaR

概率		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
深发展 A	模拟数据	6.404	6.041	5.736	5.464	5.211	4.985	4.782	4.603	4.441	4.296
	历史数据	8.558	7.348	6.582	6.064	5.656	5.313	5.021	4.771	4.552	4.360
万科 A	模拟数据	6.639	6.259	5.938	5.653	5.388	5.151	4.938	4.75	4.581	4.428
	历史数据	8.862	7.636	6.835	6.325	5.928	5.607	5.340	5.107	4.897	4.706

4.2 最小 CVaR 组合选择: 一个实例

在本小节,基于前面介绍的最小 CVaR 优化方法,利用深发展A和万科A的历史收益率数据,本文计算深发展A与万科A的最小 CVaR 组合,并分别计算了概率水平1%至5%下组合的最小 CVaR、MCVaR及其组合头寸(见表4).与理论预期相同,基于核估计框架下的最小 CVaR 在 MCVaR 相等的地方取得,并且随着概率水平的增加,最小 CVaR 值减小.

为了验证核估计框架下迭代算法的准确性,本文利用搜寻的方法寻找概率水平为1%时

的最小 CVaR 近似解.具体做法是:让深发展A的头寸从0变化到1,每次增加0.001,这样就构成了1 000个深发展A和万科A的组合,计算每个组合下的 CVaR 和 MCVaR,然后找到其中最小 CVaR 及其对应的组合头寸,结果见表5.本文发现核估计方法和搜寻法得到的最小 CVaR 相近,搜寻法得到的最小 CVaR 处,MCVaR 相近但不完全相等,这是因为搜寻方法得到的最小 CVaR 只是粗略的近似值,而本文迭代算法得到的是精度很高的数值解.图2直观地显示了以上的结论.

表4 基于 CVaR 的风险优化结果

Table 4 Risk optimization results based CVaR

概率 α	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
深发展 A 头寸	0.512	0.538	0.542	0.540	0.537
万科 A 头寸	0.488	0.462	0.458	0.460	0.463
MCVaR1	5.887	5.138	4.682	4.359	4.089
MCVaR2	5.887	5.138	4.682	4.359	4.089
最小 CVaR 值	5.887	5.138	4.682	4.359	4.089

注: MCVaR1 是组合 CVaR 对深发展 A 头寸的导数, MCVaR2 是组合 CVaR 对万科 A 头寸的导数.

^⑧ 万科 A 和深发展 A 的历史收益率的样本标准差分别为 2.74% 和 2.62%,也显示万科 A 的风险更大.

表 5 基于搜寻法的最小 CVaR 结果($\alpha = 1\%$)

Table 5 Results of minimizing CVaR based search method ($\alpha = 1\%$)

序号	深发展 A 头寸	MCVaR1	MCVaR2	CVaR
1	0.000	0.229	8.759	8.759
2	0.001	0.234	8.761	8.753
3	0.002	0.242	8.779	8.762
...
534	0.534	6.100	5.554	5.845
535	0.535	6.097	5.524	5.830
536	0.536	6.155	5.562	5.879
...
1 000	1.000	8.558	- 0.206	8.558

注: 黑体数字表示最小 CVaR 时的组合选择.

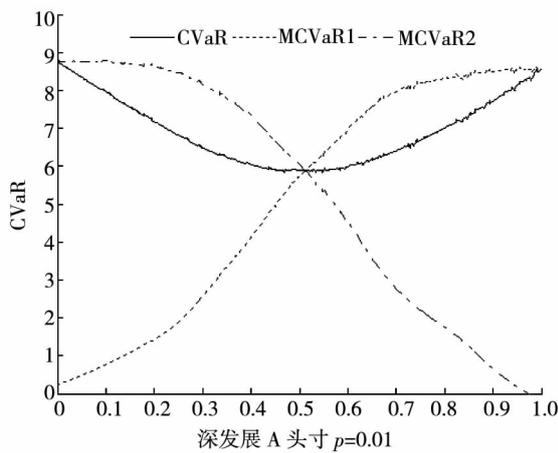


图 2 CVaR 及 MCVaR 随头寸变化图

Fig. 2 CVaR and MCVaR change with the position together

4.3 基于 CVaR 的风险对冲: 一个实例

为了比较三种 CVaR 估计方法下的风险对冲表现, 以下将基于我国的历史数据给出一个算例. 本例中, 利用上证综指的指数收益来对冲万科 A 的个股收益的风险, 这里的风险用 CVaR 度量. 本文选用万科 A 和上证综合指数从 2000 年 1 月 4 日至 2010 年 12 月 31 日的日对数收益率, 由于万科 A 在某些交易日停牌, 本文剔除其停牌时上证综合指数的数据, 最后匹配的数据共有 2 609 个. 在概率为 5% 的情形下, 通过核估计方法, 可以得到万科 A 在对冲前的 CVaR 为 5.863 1. 通过运行前述三种不同估计方法下的风险对冲算法, 本文得到如下对冲后的结果(见表 6). 从表中可以得出, 在三种不同的 CVaR 估计方法下, 对冲后的风险都能减少 1/4 以上, 其中核估计方法下的对冲

效果最佳, 方差协方差法的对冲效果最差, 基于 Cornish-Fisher 展开式下的对冲表现居中.

表 6 万科 A 的风险对冲表现 ($\alpha = 5\%$)

Table 6 Risk hedging performance of Wanke A stock ($\alpha = 5\%$)

估计方法	方差协方差法	C-F 展开	核估计法
最优对冲比率	- 0.046 2	- 0.016 4	- 0.020 8
对冲后的 CVaR	4.282 4	4.267 0	4.250 2
CVaR 下降比率	26.96%	27.22%	27.51%

5 结束语

本文基于 CVaR 的非参数核估计量, 构建风险优化模型和风险对冲模型, 实现风险的估计与风险的管理同步进行, 避免了传统风险优化中对风险因子具体分布形式的假定, 从而避免了人为的模型设定误差和参数估计误差, 使得风险优化的效果更佳. 中国 A 股市场的风险测算结果说明, 基于正态分布假设的方差协方差法会低估上证综指与深证成指收益率的极端风险; 上证综指的风险低于深证成指, 深发展 A 的风险低于万科 A. 基于中国 A 股市场数据的风险优化结果说明, 非参数核估计方法具有良好的表现, 能够找到真实的最小风险组合. 基于中国 A 股市场数据的风险对冲结果表明, 基于核估计的风险对冲效果最佳. 然而, 本文仍有一些不足值得进一步研究: 1) 核估计方法在不做任何分布假设下进行估计, 需要足够多的数据才能够拟合得比较准确, 特别是

当本文关注极端事件(小概率事件)时,有效的样本量将会大大缩减,这给本文的准确估计带来困难。2) 当选择历史数据作为样本时,对历史数据时段的选取对计算结果影响甚大。过去时段选择过短,会导致样本量少,能反映分布尾部特征的样本就更少,估计不够精确;过去时段选择过长,样本期间内收益率的分布函数可能发生改变,这样

的样本不能反映现期收益率的分布特征。如何选择历史数据的时段目前没有形成一个统一和科学的标准。3) 本文的风险优化模型只关注风险指标,而没有考虑投资者对收益的期望,这种模型只适合那些极端厌恶风险的投资者,比如风险对冲者,理想的模型应该是权衡风险和收益进行投资组合选择,这将是下一步研究的重点。

参考文献:

- [1] Jorion P. Value at Risk [M]. 2nd Edition. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [2] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, et al. Thinking coherently [J]. Risk, 1997, (10): 68 - 71.
- [3] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, et al. Coherent measures of risk [J]. Mathematical Finance, 1999, 9(3): 203 - 228.
- [4] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk [J]. The Journal of Risk, 2000, 2(3): 21 - 41.
- [5] Rockafellar R T, Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions [J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7): 1443 - 1471.
- [6] 刘静, 杨善朝. 风险度量 ES 的非参数估计 [J]. 工程数学学报, 2009, 26(4): 577 - 585.
Liu Jing, Yang Shanchao. Nonparametric estimation of expected shortfall [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(4): 577 - 585. (in Chinese)
- [7] 刘静, 杨善朝, 姚永源. α -混合序列下期期望损失 ES 的两步核估计 [J]. 应用概率统计, 2010, 26(5): 485 - 500.
Liu Jing, Yang Shanchao, Yao Yongyuan. Two-step kernel estimation of expected shortfall for strong mixing time series [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2010, 26(5): 485 - 500. (in Chinese)
- [8] Engle R F, Manganelli S. CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles [J]. Journal of Business & Economics Statistics, 2004, (22): 367 - 381.
- [9] 周孝华, 张保帅, 董耀武. 基于 Copula-SV-GPD 模型的投资组合风险度量 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(12): 70 - 78.
Zhou Xiaohua, Zhang Baoshuai, Dong Yaowu. Risk measurement of financial portfolio based on Copula-SV-GPD model [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(12): 70 - 78. (in Chinese)
- [10] 叶五一, 缪柏其. 已实现波动与日内价差条件下的 CVaR 估计 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(8): 60 - 71.
Ye Wuyi, Miao Baiqi. Estimating of CVaR with consideration of realized volatility and price range [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(8): 60 - 71. (in Chinese)
- [11] Chen S X, Tang C Y. Nonparametric inference of value-at-risk for dependent financial returns [J]. Journal of Financial Econometrics, 2005, 3(2): 227 - 255.
- [12] 赵晓玲, 陈雪蓉, 周勇. 金融风暴中基于非参估计 VaR 和 ES 方法的风险度量 [J]. 数理统计与管理, 2012, 31(3): 381 - 383.
Zhao Xiaoling, Chen Xuerong, Zhou Yong. Risk measure based on nonparametric estimate of VaR and ES in financial crisis [J]. Journal of Applied Statistics and Management, 2012, 31(3): 381 - 383. (in Chinese)
- [13] Gouriou C, Laurent J P, Scaillet O. Sensitivity analysis of Values at Risk [J]. Journal of Empirical Finance, 2000, (7): 225 - 245.
- [14] Scaillet O. Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall [J]. Mathematical Finance, 2004, 14(1): 115 - 129.
- [15] Chen S X. Nonparametric estimation of expected shortfall [J]. Journal of Financial Econometrics, 2008, 6(1): 87 - 107.
- [16] 刘晓倩, 周勇. 金融风险度量中 ES 度量的非参数方法的比较及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(4): 631 - 642.
Liu Xiaoqian, Zhou Yong. Nonparametric estimation and comparative analysis of ES in risk measure with applications [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2011, 31(4): 631 - 642. (in Chinese)

- [17]姚海祥. 基于均值和风险的投资组合研究[D]. 广州: 中山大学, 2011.
Yao Haixiang. Portfolio Selection Based on Mean and Risk[D]. Guangzhou: Sun Yat-sen University, 2011. (in Chinese)
- [18]高全胜, 李选举. 基于 CVaR 的投资组合对资产变化的敏感性分析[J]. 数量经济技术经济研究, 2005, 22(6): 88-94.
Gao Quansheng, Li Xuanju. Sensibility analysis of portfolio frontier to capital size based on CVaR[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2005, 22(6): 88-94. (in Chinese)
- [19]刘小茂, 李楚霖, 王建华. 风险资产组合的均值——CVaR 有效前沿(II) [J]. 管理工程学报, 2005, 19(1): 1-5.
Liu Xiaomao, Li Chulin, Wang Jianhua. Mean-CVaR efficient frontier and its economic implications (II) [J]. Journal of Industrial Engineering/Engineering Management, 2005, 19(1): 1-5. (in Chinese)
- [20]Li Q, Racine J S. Nonparametric Econometrics: Theory and Practice[M]. Princeton: Princeton University Press, 2007.
- [21]Cao Z, Harris RDF, Shen J. Hedging and value at risk: A semi-parametric approach[J]. The Journal of Futures Markets, 2010, 30(8): 780-794.
- [22]姚京, 袁子甲, 李仲飞, 等. VaR 风险度量下的 β 系数: 估计方法和实证研究[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(7): 27-34.
Yao Jing, Yuan Zijia, Li Zhongfei, et al. Beta coefficient based on value-at-risk: Estimation methods and empirical analysis[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2009, 29(7): 27-34. (in Chinese)
- [23]Athayde G, Flores R G. Finding a maximum skewness portfolio: A general solution to three-moments portfolio choice[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, 28(7): 1335-1352.
- [24]Jondeau E, Rockinger M. Optimal portfolio allocation under higher moments[J]. European Financial Management, 2006, 12(1): 29-55.
- [25]李腊生, 孙春花. VaR 估计中的概率分布设定风险与改进[J]. 统计研究, 2010, 27(10): 40-46.
Li Lasheng, Sun Chunhua. Risk of assumption of probability distribution in VaR estimation and its improvement[J]. Statistical Research, 2010, 27(10): 40-46. (in Chinese)

Risk management based on the CVaR kernel estimator

*HUANG Jin-bo*¹, *LI Zhong-fei*², *YAO Hai-xiang*³

1. Finance Department, Guangdong University of Finance & Economics, Guangzhou 510320, China;

2. Sun Yat-Sen Business School, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China;

3. School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510006, China

Abstract: Conditional Value-at-Risk (CVaR) model developed recently is a powerful mathematical tool to measure financial risk. By constructing on the risk optimization and risk hedging models based on the CVaR kernel estimator and designing an optimization algorithm to solve these models, this paper accomplishes the goal that financial risk estimation and risk management are implemented at the same time. These models are applied to Chinese A stock market, and the following conclusions are obtained: nonparametric kernel estimation method can capture the tail feature of the risk factor distribution and give more accurate risk estimation results. The risk optimization model based on CVaR kernel estimator can find out the true minimum risk and corresponding portfolio. Compared with Variance-Covariance method and Cornish-Fisher expansion of CVaR, the risk hedging effect based on CVaR kernel estimator is the best.

Key words: conditional value-at-risk (CVaR); nonparametric kernel estimation; risk optimization; risk hedging