

# 基于扇形偏好的期权定价方法<sup>①</sup>

陈 坚

(厦门大学经济学院金融系/福建省统计科学重点实验室, 厦门 361005)

摘要: “波动率微笑”与资产收益的非正态分布一直是 Black-Scholes 期权定价模型无法解释的两种现象。为了改进该模型,一种基于交换经济的均衡模型孕育而生。但是传统均衡模型中所假设的预期效用函数无法区分投资人对于波动风险与跳跃风险的不同厌恶程度,从而低估了市场风险溢价。引入基于扇形偏好的非预期效用函数后,均衡模型产生了由扇形效应所导致的部分风险溢价,并且可以拟合出显著的波动率微笑曲线。同时,考虑扇形效应后,风险中性的资产收益分布出现了显著的“厚尾”与“左偏”特征。

关键词: 股指期货; 递归效用; 扇形偏好; 跳跃风险

中图分类号: F830 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2014)03-0027-10

## 0 引 言

实证研究中发现,Black-Scholes 模型无法解释“波动率微笑”和风险中性收益的非正态分布这两种现象。具体来说,在拟合不同价值状况下的期权价格时,隐含波动率呈现出“微笑”图形,这与 Black-Scholes 中固定波动率的假设相违背。另一方面,期权价格中隐含的风险中性收益分布表现出“厚尾”和“左偏”的非对称性,这与 Black-Scholes 所假设的正态分布不符。本质上,这两个问题是紧密相连的,因为它们都是由于股价跳跃所导致。当投资人担心未来股票价格出现暴跌时,如1987年的美国股灾和近期的金融危机,短期虚值期权是有效的对冲下跌风险的衍生工具。所以,大量文献发现此类期权产品中隐含的风险溢价明显大于平价期权,这最终导致了“波动率微笑”现象,如 Bates<sup>[1,2]</sup>,Bakshi,Cao 和 Chen<sup>[3]</sup>,Pan<sup>[4]</sup>等。另外,当股价暴跌时,资产收益分布中的左尾所占比重增加,从而出现了“厚尾”和“左偏”的非对称分布。

大量文献通过不同的方法试图改进 Black-Scholes 定价模型的不足。一种方法是基于无套利原理的风险中性定价方法,并且考虑股价变动同时具有随机波动率和跳跃两种不确定因素。国外文献中的此类研究包括 Bates<sup>[1,2]</sup>,Bakshi,Cao 和 Chen<sup>[3]</sup>,Pan<sup>[4]</sup>,Huang 和 Wu<sup>[5]</sup>,Carr 和 Wu<sup>[6]</sup>,Santa-Clara 和 Yan<sup>[7]</sup>等。国内对于欧式期权定价的相关研究中,马宇超等<sup>[8]</sup>充分考虑了中国权证市场的特点后,在跳跃扩展模型的基础之上加入了均值回归项,从而获得新的定价模型。而周海林等<sup>[9]</sup>为了更好地描述股价变动过程,考虑了随机利率,并且发现该模型可以更准确地为欧式期权定价。区别于传统定价方法,李平等<sup>[10]</sup>运用 Copula 的方法研究场外交易的期权产品,并且获得了欧式脆弱看涨期权的闭形式表达式。

上述模型大多是基于局部均衡定价方法,即认为股票价格是外生变量。而且,无套利理论的基本假设是完全市场(complete market),但是当股价存在跳跃时,市场上的不确定因素包括波动率、跳跃频率、以及跳跃幅度,这导致市场是不完

① 收稿日期: 2013-09-12; 修订日期: 2013-12-01.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71201136).

作者简介: 陈 坚(1980—),男,北京人,博士,助理教授. Email: jchen1@xmu.edu.cn

全的(incomplete),且状态价格(state price)的解是不唯一的.如果继续使用该方法对期权定价,只能采用众多状态价格解中的一种.作为替代,在不完全市场中的另外一种定价思路是基于Lucas<sup>[11]</sup>交换经济的一般均衡模型.Naik和Lee<sup>[12]</sup>首次提出这种方法,认为在一个简单交换经济中个人通过持有公司的股票而获得股东红利并进行消费.在个人获得最大消费效用的同时,获得股票衍生产品的均衡价格.区别于部分均衡模型,这类方法认为股票价格是内生变量.

虽然大量文献发现引入随机波动率和泊松跳跃的无套利模型可以解释波动率微笑和非正态分布的资产收益,但是对于均衡模型的同类研究还比较少.Liu, Pan和Wang<sup>[13]</sup>发现Naik和Lee<sup>[12]</sup>模型本质上无法产生显著的波动率微笑曲线.其原因在于,该模型所采用的预期效用函数中的唯一固定风险厌恶参数,不能同时反映人们对于波动与跳跃两种不同类型风险厌恶程度.而Pan<sup>[4]</sup>通过实证检验发现投资人对这两类风险的敏感度是不同的.区别于Naik和Lee<sup>[12]</sup>,Liu, Pan和Wang<sup>[13]</sup>在预期效用模型中引入了额外的厌恶系数,认为投资人在面对跳跃风险时,除了表现出风险厌恶之外,还具有对于使用何种模型来对冲风险的担忧.所以,这种厌恶是对选用模型不确定的反映.他们发现在加入这部分不确定因素后,该模型可以捕捉到其对应的额外风险溢酬,从而可以解释“波动率微笑”现象.并且,在稳健性检验中,作者发现即使使用不同的效用函数包括Epstein和Zin<sup>[14]</sup>的递归效用和Campbell和Cochrane<sup>[15]</sup>的习惯形成原理(habit formation),依然无法改进预期效用模型的不足,唯有增加额外的厌恶变量.

然而,Du<sup>[16]</sup>证明了这一结论不具有普遍性.他同样采用了Campbell和Cochrane<sup>[15]</sup>的习惯形成原理来描述投资人的风险偏好,并且使用与Liu, Pan和Wang<sup>[13]</sup>相同的市场参数,重新考察了不存在模型选择不确定性的情况下一般均衡模型的表现.研究结果表明该模型同样可以达到Liu, Pan和Wang<sup>[13]</sup>的预测效果和对“波动率微笑”的解释能力.Du<sup>[16]</sup>之所以可以成功拟合“波

动率微笑”曲线,在于他所使用的风险厌恶程度是时变的,因此产生了较高的跳跃风险溢酬.

递归效用模型是否可以拟合出显著的“波动率微笑”呢?这一问题是一本文研究的重点内容.本文在递归效用方程中引入了Machina<sup>[17,18]</sup>的扇形偏好.这种风险偏好打破了传统预期效用理论中平行无差异曲线的假设,认为无差异曲线可以呈现出“扇形扩张”(fanning out)或“扇形内敛”(fanning in),从而可以成功解释Allais悖论.因此,具有扇形偏好的非预期效用理论得到快速发展.例如,Chew和MacCrimmon<sup>[19,20]</sup>与Chew<sup>[21]</sup>的权重效用理论(weighted utility),Quiggin<sup>[22]</sup>与Yaari<sup>[23]</sup>的等级依赖效用理论(rank dependent utility),以及Tversky和Kahneman<sup>[24]</sup>的累计前景理论(cumulative prospect theory)等.

近期,大量文献将非预期效用理论应用于解释金融市场上的一些现象和谜团.例如,Epstein和Zin<sup>[25]</sup>利用权重效用理论解释股票收益与消费行为,Barberis和Huang<sup>[26]</sup>使用累计前景理论解释股权溢价之谜和横截面风险溢酬,Polkovnichenko和Zhao<sup>[27]</sup>利用等级依赖效用理论解释随机因子贴现之谜等.目前,还没有文献将非预期理论应用于衍生品定价,这是本文的主要贡献.

考虑到数学形式上的可应用性,本文采用了递归效用方程,并且其确定等值(certainty equivalent)满足权重效用理论的形式.因此,市场投资人的风险偏好由风险厌恶和扇形偏好共同决定.在此基础上,市场风险溢酬被分为三个组成部分:一是波动风险溢酬,二是与Naik和Lee<sup>[12]</sup>相同的跳跃风险溢酬,三是由于扇形偏好所引起的风险溢酬.另外,基于Ma<sup>[28]</sup>的一般均衡期权定价方法,本文将扇形偏好引入到欧式期权定价模型之中.通过仿真模拟实验,本文发现,如果不存在扇形偏好,模型所产生的风险溢酬与Naik和Lee<sup>[12]</sup>完全一致,因此无法解释现实中的波动率微笑现象.但是,引入扇形偏好后,除了波动与跳跃风险溢酬外,模型捕捉到了额外的风险溢酬,这是由于扇形效应的存在所导致的.实验结果显示包含扇形偏好的定价模型可以成功模拟出显著的“波动率微笑”曲线,同时也可以产生收益分布的“厚

尾”和“左偏”的现象。

### 1 效用函数

Epstein 和 Zin<sup>[14]</sup> 首次提出了递归效用方程, 其离散形式如下

$$U_t = V(c_t, m(U_{t+1} | \mathbf{F}_t)) \quad (1)$$

其中  $m$  代表了确定等值 (certainty equivalent), 反应了投资者的风险偏好。而  $V$  是对当期消费  $c_t$  和  $m$  的效用总和。函数  $V(\cdot)$  和  $m(\cdot)$  实现了投资者的跨期替代和风险厌恶的分离。Duffie 和 Epstein<sup>[29, 30]</sup> 给出了基本布朗运动的连续递归效用方程, Ma<sup>[28]</sup> 则将其推广到跳跃扩散过程, 即

$$U_t = E_t \left[ \int_t^T (f(c_{s-}, U_{s-}) + \lambda \int_R [M(U_{s+}, U_{s-}) - U_{s+} + U_{s-}] \Pi(du)) ds + U_T \right] \quad (2)$$

其中  $(f, M)$  对应于等式 (1) 中的  $(V, m)$ , 并且满足条件

$$\begin{aligned} f(kc, k^\eta v) &= k^\eta f(c, v), \\ M(x, y) &= y\phi\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

$\eta$  与  $\phi$  分别描述投资人的局部风险厌恶 (local risk aversion) 和全部风险厌恶 (global risk aversion)。

本文采用了权重效用函数的确定等值, 则  $(f, M)$  可以具体表示为

$$\begin{aligned} f(c, v) &= \frac{\beta [c^\zeta - (\eta v)^\frac{\zeta}{\eta}]}{\zeta (\eta v)^\frac{\zeta}{\eta} - 1}, \\ \phi(z) &= \frac{\eta}{\eta - 2\varphi} [z^{1-\frac{\zeta}{\eta}} - z^\frac{\zeta}{\eta}], \forall z > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\zeta$  反映了跨期替代率  $\beta$  决定了时间偏好  $\eta$  和  $\phi$  分别反映了人们的局部和全部风险厌恶程度  $\varphi$  控制着无差异曲线的形状。根据 Machina<sup>[17, 18]</sup> 和 Epstein<sup>[31]</sup>  $\varphi$  也被称为扇形效应, 即无差异曲线并非平行, 从而可以成功解释 Allais 悖论。  $\varphi > 0$  与  $\varphi < 0$  分别代表了无差异曲线呈现出“扇形扩张”或“扇形内敛”状。特殊情况下, 即  $\varphi = 0$ , 无差异曲线平行, 公式 (4) 简化为预期效用函数。公式 (4) 的证明可以参照附录 1。

式 (4) 中  $f(c, v)$  的函数形式与 Liu, Pan, 和 Wang<sup>[13]</sup> 采用的递归效用方程相同 (参见其文章的公式 D. 10), 但是他们的效用方程中不包括  $\phi$

函数。主要因为, 他们采用的是 Duffie 和 Epstein<sup>[29, 30]</sup> 的连续时间效用方程, 其中没有考虑消费过程中存在资产价格跳跃的可能。而本文采用的是 Ma<sup>[28]</sup> 的跳跃扩散模型, 即式 (2)。可以证明在不存在资产价格跳跃的情况下, 二者是一致的, 且此时的递归效用与预期效用也不存在本质的差别。但是, 如果市场中存在资产价格跳跃, 那么其对效用方程的影响主要反应在  $\phi$  函数中。

### 2 市场风险溢酬

在简单交换经济中, 假设代表性主体 (representative agent) 持有的股票红利服从跳跃扩散过程

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = bdt + a dB_t + \int_0^\infty (u - 1) N(dt, du) \quad (5)$$

其中  $\delta_t$  代表股票红利  $b$  与  $a$  分别是扩散过程的预期增长率与波动率  $B_t$  是标准布朗运动, 泊松跳跃过程是  $N$ , 它由跳跃频率  $\lambda$  与跳跃幅度  $u$  共同刻画。当  $t$  时刻发生跳跃时, 股票红利由  $\delta_{t-}$  变动到  $\delta_t = u\delta_{t-}$ , 且跳跃幅度的对数服从正态分布  $(\Pi)$ 。式 (5) 中对跳跃幅度  $u$  的积分表示在时间间隔  $(t, t + dt]$  内, 所有可能的跳跃幅度对股票红利作用的累加。

交换经济中的股票持有者, 被赋予了一定的大于零的初始财富, 通过选择最优消费以满足其最大效用, 从而达到均衡状态。根据 Ma<sup>[28]</sup>, 利率 ( $r$ ) 与股息率 ( $l$ ) 的均衡价格为

$$\begin{aligned} r &= b + l + (\eta - 1) a^2 + \\ &\lambda \int_0^\infty (u - 1) u^{\eta-1} \phi(u^\eta) \Pi(du), \\ l &= \frac{f_c(1, k)}{\eta k} \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\kappa$  与  $\eta$  的符号相同, 且满足等式  $\frac{f(1, \kappa)}{\kappa} + b\eta +$

$$\frac{\eta}{2} (\eta - 1) a^2 + \lambda \int_0^\infty \phi(u^\eta) \Pi(du) = 0$$

由 Ma<sup>[32]</sup>, 可以知道市场的风险溢酬 ( $\pi$ ) 等于超额收益加上对跳跃风险的补偿, 即  $\pi = b + l - r + \lambda \int_0^\infty (u - 1) \Pi(du)$ 。因此

$$\pi = (1 - \eta) a^2 + \lambda \int_0^\infty (u - 1) \Pi(du) - \quad (7)$$

$$\lambda \int_0^\infty (u - 1) u^{\eta-1} \phi(u^\eta) \Pi(du)$$

式(7)说明,市场风险溢酬分为两个部分:一是波动风险溢酬( $\pi_d$ ),即 $\pi_d = (1 - \eta) a^2$ ;另外一部分风险溢酬用 $\pi_j^*$ 表示,即 $\pi_j^* = \lambda \int_0^\infty (u-1) \Pi(du) - \lambda \int_0^\infty (u - 1) u^{\eta-1} \phi(u^\eta) \Pi(du)$ . 利用效用函数式(4),可以求解

$$\pi_j^* = \lambda [g(1) - g(0)] - \frac{\lambda}{\eta - 2\varphi} [(\eta - \varphi)(g(\eta - \varphi) - g(\eta - \varphi - 1)) - \varphi(g(\varphi) - g(\varphi - 1))] \quad (8)$$

其中 $g(x) = \exp\{\mu x + \frac{1}{2}x^2\sigma_j^2\}$ 是跳跃幅度对数的正态分布矩母函数, $\mu$ 与 $\sigma_j$ 分别代表分布的均值与标准差.

$$\text{令 } A = \lambda [g(1) - g(0)],$$

$$\text{令 } B = -\frac{\lambda}{\eta - 2\varphi} [(\eta - \varphi)(g(\eta - \varphi) - g(\eta - \varphi - 1)) - \varphi(g(\varphi) - g(\varphi - 1))],$$

则 $\pi_j^*$ 在 $\varphi = 0$ 点的泰勒展开式可以写成

$$\pi_j^*(\varphi) = \pi_j^*(0) + \varphi B'|_{\varphi=0} + R \quad (9)$$

其中 $R$ 表示二阶导数以上的高阶项.附录2可以证明 $\pi_j^*(0)$ 与Naik和Lee<sup>[12]</sup>模型所决定的跳跃风险溢酬( $\pi_j$ )是完全一致的.而等式(9)中剩余的风险溢酬( $\pi_j^* - \pi_j$ )与跳跃有关且由扇形效应系数( $\varphi$ )所决定.如果用 $\pi_j$ 表示,那么

$$\pi = \pi_D + \pi_j + \pi_f \quad (10)$$

因此,市场风险溢酬被分为三部分:一是波动风险溢酬,二是与Naik和Lee<sup>[12]</sup>定义相同的跳跃风险溢酬,三是扇形效应风险溢酬.前两者是由风险厌恶参数唯一确定的,而后者与扇形效应有关.其经济学解释为,在市场存在资产价格跳跃时,人们表现出扇形偏好,且与传统的预期效用存在差异.这种风险偏好的不同反映在市场风险溢酬上面就表现为,投资人除了需要获得波动与跳跃风险补偿外,还需要一部分额外的补偿,是支付给这

种风险偏好上的差异的,即 $\pi_f$ .

### 3 期权定价模型

根据式(6)股票价格 $S_t = l^{-1} \delta_t$ ,因此

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(b + \frac{A}{A}\right) dt + a dB_t + \int_0^\infty (u - 1) N(dt, du) \quad (11)$$

其中 $A = l^{-1}$ ,而其它参数与式(5)相同.在风险中性测度下,式(11)可以写为

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - l - \lambda \int_0^\infty (u-1) u^{\eta-1} \phi(u^\eta) \Pi(du)) dt + a dB_t^Q + \int_0^\infty (u - 1) N^Q(dt, du) \quad (12)$$

其中 $Q$ 表示风险中性测度.

根据Ma<sup>[28]</sup>,欧式看涨期权( $C$ )的均衡价格为

$$C = Ke^{-r(T-t)} L^{-1} \left\{ \frac{\Theta^{T-t}(s)}{s(s+1)} \right\} \left( \ln \frac{K}{S} \right) \quad (13)$$

其中 $K$ 代表执行价格, $S$ 是股票价格, $T$ 是到期日, $L^{-1}$ 代表双向拉普拉斯(Laplace)反变换,而 $\Phi_T(s)$ 是到期日股票收益分布的矩母函数,其具体表达式

$$\begin{aligned} \ln \Theta(s) = & ls - (r - 0.5a^2)s + 0.5a^2s^2 + \\ & \frac{\lambda}{\eta - 2\varphi} \{ (\eta - \varphi) [g(\eta - \varphi - s - 1) + \\ & sg(\eta - \varphi) - g(\eta - \varphi - 1) - \\ & sg(\eta - \varphi - 1)] - \varphi [g(\varphi - s - 1) + \\ & sg(\varphi) - g(\varphi - 1) - sg(\varphi - 1)] \} \end{aligned} \quad (14)$$

当 $\varphi = 0$ 时,式(13)简化为Naik和Lee<sup>[12]</sup>模型.如果令 $\lambda = 0$ ,即不存在跳跃时,该模型可以进一步简化为Black-Scholes模型.

### 4 仿真实验

本节将通过仿真实验,检验引入扇形效应后,模型对“波动率微笑”和资产收益分布的解释效果.为了与文献中的结果相对比,本文采用了和Liu, Pan和Wang<sup>[13]</sup>相同的实验设计和参

数设定. 假设存在三种不同程度的资产价格跳跃, 第一种是跳跃频率为  $1/3$ , 跳跃幅度均值为  $-1\%$  的价格跳跃; 第二种是更加显著的价格跳跃, 其频率为  $1/25$ , 跳跃幅度均值为  $-10\%$ ; 第三种是百年一遇的经济危机所导致的市场暴跌, 频率为  $1/100$ , 跳跃幅度均值为  $-20\%$ . 每种跳跃情况下都假设三种风险厌恶程度, 以满

足  $8\%$  固定的市场风险溢酬. 市场波动率设定为  $15\%$ , 跳跃幅度分布的标准差是  $4\%$ .

4.1 扇形效应溢酬

根据式 (7)、(8) 和 (10), 在给定跳跃和波动参数后, 按照 Liu, Pan 和 Wang<sup>[13]</sup> 所假设的  $8\%$  固定市场风险溢酬, 本文可以计算出对应不同风险偏好和扇形效应下的  $\pi_D$  和  $\pi_J$ .

表 1 扇形效应溢酬

Table 1 Fanning effect premium

风险厌恶	$\varphi$	$\pi_D(\%)$	$\pi_J(\%)$	$\pi_f(\%)$	$\pi(\%)$
跳跃情况 1: $\lambda = 1/3, \mu = -0.01, \sigma_J = 4\%$					
3.47	0	7.81	0.19	0	8
3.15	21(-23)	7.09	0.19	0.72	8
2.62	30(-32)	5.91	0.15	1.94	8
跳跃情况 2: $\lambda = 1/25, \mu = -0.1, \sigma_J = 4\%$					
3.47	0	7.81	0.19	0	8
2.88	15(-16)	6.48	0.15	1.37	8
1.61	23(-23)	3.62	0.08	4.30	8
跳跃情况 3: $\lambda = 1/100, \mu = -0.2, \sigma_J = 4\%$					
3.47	0	7.81	0.19	0	8
2.36	13(-15)	5.31	0.12	2.57	8
0.68	19(-18)	1.53	0.03	6.44	8

如表 1 所示, 在跳跃情况 1 下, 当扇形效应 ( $\varphi$ ) 为零且风险厌恶参数为 3.47 时, 计算得出的波动风险溢酬 ( $\pi_D$ ) 与跳跃风险溢酬 ( $\pi_J$ ) 之和刚好等于全部的  $8\%$  市场风险溢酬. 此时, 本文的模型与 Naik 和 Lee<sup>[12]</sup> 没有差别. 当风险厌恶系数降为 3.15 时,  $\pi_D = 7.09$  并且  $\pi_J = 0.19$ , 二者之和小于市场  $8\%$  的溢酬. 这说明, Naik 和 Lee<sup>[12]</sup> 模型遗漏了一部分市场风险溢酬, Liu, Pan 和 Wang<sup>[13]</sup> 认为这部分溢酬是由于投资人担心对冲模型选择的不确定所引起的, Du<sup>[16]</sup> 则认为这是由于低估了跳跃风险造成的. 根据式 (10), 本文将这部分额外的溢酬解释为支付给扇形偏好与预期效用的差异. 当  $\varphi = 21$  或  $-23$  时,  $\pi_f = 0.72$ . 这一结论在跳跃情况 2 和 3 中依然稳健.

现出近似对称的 U 型, 说明“扇形扩张”和“扇形内敛”都可以产生相似的市场风险溢酬.

此外, 表 1 中  $\varphi > 0$  代表了“扇形扩张”. 图 1 描述了跳跃情况 1 下, 不同风险厌恶系数所对应的市场风险溢酬随扇形效应变化的曲线. 如图所示, 曲线呈

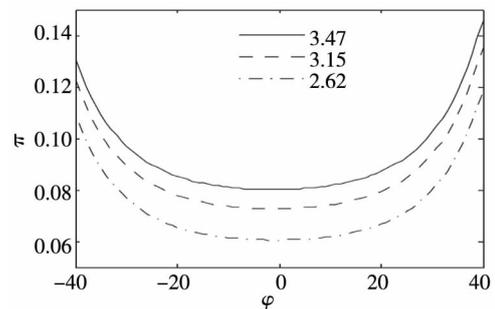


图 1 扇形效应

Fig. 1 Fanning effect

4.2 隐含波动率微笑曲线

根据表 1 中的结果, 将参数代入到式 (13) 和 (14) 中, 可以求出相应的短期期权价格<sup>②</sup>, 并利用 Black-Scholes 模型, 计算出隐含波动率, 如图 2 所示.

② 根据 Liu, Pan 和 Wang<sup>[13]</sup> 的参数设定, 这里考虑一个月到期的短期看涨期权.

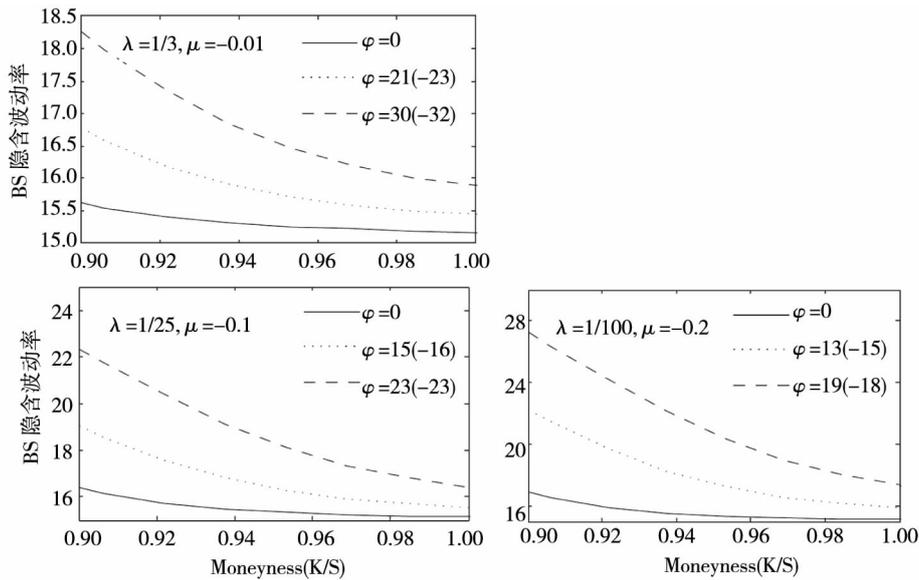


图2 BS 隐含波动率

Fig. 2 BS implied volatility

图2中三幅图形分别代表了三种跳跃情况，每幅图中的三条曲线分别对应三种不同的风险厌恶程度和扇形效应。以跳跃情况1为例，当 $\varphi = 0$ 时，即不存在扇形效应，波动率曲线基本上是水平的。具体来说，平价期权与10%的虚值期权所对应的隐含波动率分别为15.2%和15.6%。这一结果与文献中已经发现的实证现象有两点不符之处。一是平价期权对应的15.2%的波动率与市场波动率 $\sqrt{a^2 + \lambda(\mu^2 + \sigma_j^2)} = 15.2\%$ 一致。但是，期权隐含的波动率应该高于实际市场波动率。这说明预期效用模型没有捕捉到平价期权中所隐含的这部分风险溢价。二是10%的虚值期权所对应的15.6%隐含波动率只比平价期权高了0.4%，说明这种差别并不显著。但是，由于深度虚值期权对资产价格跳跃十分敏感，这部分期权价格中所隐含的风险溢价应该远远高于平价期权。

当本文引入扇形效应后，例如 $\varphi = 30$ 或 $-32$ 模型模拟出了显著的“波动率微笑”曲线。平价期权对应的隐含波动率为15.9%，不仅高于预期模型的15.2%，而且高于Liu, Pan和Wang<sup>[13]</sup>以及Du<sup>[16]</sup>所产生的15.5%。类似地，10%的虚值期权对应的隐含波动率为18.3%，高于预期效用模型的15.6%，Liu, Pan和Wang<sup>[13]</sup>的17.2%，以及Du<sup>[16]</sup>的17.1%。平价期权隐含的15.9%波动率可以转换为4.61%的风险溢价，而10%的虚值期

权隐含的18.3%波动率可以转换为17.3%的风险溢价。显然，深度虚值期权隐含的风险溢价明显高于平价期权，因此可以画出显著的“波动率微笑”曲线。这一结果在跳跃情况2和3中依然成立。

采用预期效用的期权定价模型，由于假设投资人对于波动风险与跳跃风险的风险厌恶程度相同，因此明显低估了现实中期权价格所隐含的跳跃风险，导致模拟的波动率曲线较为平坦。然而，引入扇形偏好的期权模型对截面期权价格的解释效果明显提高。该模型认为投资人对于跳跃风险的偏好不仅由风险厌恶所决定，同时也取决于扇形偏好。而正是考虑扇形偏好后的模型，可以充分捕捉到期权价格中隐含的全部市场风险溢价，从而模拟出更加显著的“波动率微笑”曲线。

### 4.3 资产收益的风险中性分布

Jackwerth和Rubinstein<sup>[33]</sup>发现，自美国1987年股灾之后，期权价格所隐含的风险中性资产收益分布呈现出“左偏”和“厚尾”的非对称形状，偏态(skewness)和峰度(kurtosis)分别围绕着1和4上下小幅波动。这与Black-Scholes模型所假设的资产价格收益正态分布相违背。根据式(13)与(14)，风险中性的资产收益分布特征可以由期权合约到期日的资产收益分布矩母函数( $\Theta$ )计算得出。

表2 资产收益分布的偏态和峰态  
Table 2 Skewness and kurtosis for the risk-neutral stock return distribution

风险厌恶	$\varphi$	峰态 (Kurtosis)	偏态 (Skewness)
跳跃情况 1: $\lambda = 1/3, \mu = -0.01, \sigma_J = 4\%$			
3.47	0	3.41	-0.47
3.15	21(-23)	3.50	-0.51
2.62	30(-32)	3.68	-0.58
跳跃情况 2: $\lambda = 1/25, \mu = -0.1, \sigma_J = 4\%$			
3.47	0	3.50	-0.50
2.88	15(-16)	3.84	-0.62
1.61	23(-23)	4.54	-0.84
跳跃情况 3: $\lambda = 1/100, \mu = -0.2, \sigma_J = 4\%$			
3.47	0	3.71	-0.55
2.36	13(-15)	5.68	-1.08
0.68	19(-18)	6.88	-1.35

如表2所示,在三种跳跃情况下,当不存在扇形效应时( $\varphi = 0$ ),资产收益分布的峰态和偏态较小,说明其风险中性分布的厚尾和左偏特点并不明显,与 Jackwerth 和 Rubinstein<sup>[33]</sup>的发现不符.这进一步证明了在不包含扇形偏好时,预期效用模型不能很好地解释现实中的非对称资产收益分布现象.但是,当加入扇形效应后,模型拟合的峰态和偏态增加.这说明,此时的风险中性资产收益分布呈现出显著的“厚尾”特征,并且偏态为负表明风险中性分布是“左偏”的.这与 Jackwerth 和 Rubinstein<sup>[33]</sup>的发现是一致的.因此,引入扇形偏好后模型可以基本上解释现实中风险中性资产收益非对称的特点.

## 5 结束语

传统的预期效用模型中,单一的风险厌恶参

数无法同时反映投资人对于波动风险与跳跃风险的不同风险厌恶程度,从而无法产生显著的波动率微笑曲线与资产收益分布的“厚尾”和“左偏”.引入扇形偏好后,本文发现除了波动与跳跃风险溢酬外,还有一部分额外的风险溢酬是由于扇形效应所导致的.正是这部分风险溢酬使得虚值期权所隐含的风险溢酬远远高于平价期权,最终拟合出了显著的波动率微笑曲线.同时,扇形效应的存在也使得风险中性资产收益分布呈现出显著的“厚尾”和“左偏”的非对称特征.

本文的主要贡献在于提出了基于扇形偏好的期权定价方法,并且利用该模型成功解释了波动率微笑现象与风险中性资产收益分布的非对称特征.研究的不足之处在于,由于当前中国缺乏成熟的期权市场,因此无法通过实际数据进行实证检验.比如,实际交易数据中所隐含的扇形效应程度到底是多少,目前无法考察.

### 参考文献:

- [1] Bates D. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutschemark option [J]. *Review of Financial Studies*, 1996, 9(1): 69-108.
- [2] Bates D. Post-87 crash fears in the S&P500 futures option market [J]. *Journal of Econometrics*, 2000, 94(1-2): 181-238.
- [3] Bakshi G, Cao C, Chen Z. Empirical performance of alternative option pricing models [J]. *Journal of Finance*, 2007, 52

- (5): 2003 – 2049.
- [4]Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study[J]. *Journal of Financial Economics*, 2002, 63(1): 3 – 50.
- [5]Huang J, Wu L. Specification analysis of option pricing models based on time-changed levy process[J]. *Journal of Finance*, 2004, 59(3): 1405 – 1439.
- [6]Carr P, Wu L. Time-changed levy process and option pricing[J]. *Journal of Financial Economics*, 2004, 71(1): 113 – 141.
- [7]Santa-Clara P, Yan S. Crashes, volatility, and the equity premium: Lessons from S&P 500 options[J]. *The Review of Economics and Statistics*, 2010, 92(2): 435 – 451.
- [8]马宇超, 陈敏, 蔡宗武, 等. 中国股市权证定价的带均值回归跳跃扩散模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(1): 14 – 21.  
Ma Yuchao, Chen Min, Cai Zongwu, et al. Mean reverting jump diffusion model of Chinese stock warrants[J]. *System Engineering: Theory & Practice*, 2010, 30(1): 14 – 21. (in Chinese)
- [9]周海林, 吴鑫育, 高凌云, 等. 随机利率条件下的欧式期权定价[J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(4): 729 – 734.  
Zhou Hailin, Wu Xinyu, Gao Lingyun, et al. Pricing European options under stochastic interest rate[J]. *System Engineering: Theory & Practice*, 2011, 31(4): 729 – 734. (in Chinese)
- [10]李平, 曲博, 黄光东. 基于 Fréchet Copula 的欧式脆弱期权定价[J]. *管理科学学报*, 2012, 15(4): 27 – 34.  
Li Ping, Qu Bo, Huang Guangdong. Pricing of European vulnerable options based on Fréchet Copula[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2012, 15(4): 27 – 34. (in Chinese)
- [11]Lucas R. Asset prices in an exchange economy[J]. *Econometrica*, 1978, 46(6): 1429 – 1445.
- [12]Naik V, Lee M. General equilibrium pricing of option on the market portfolio with discontinuous returns[J]. *The Review of Financial Studies*, 1990, 3(4): 493 – 521.
- [13]Liu J, Pan J, Wang T. An equilibrium model of rare-event premia and its implication for option smiles[J]. *Review of Financial Studies*, 2005, 18(1): 131 – 164.
- [14]Epstein L, Zin S. Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework[J]. *Econometrica*, 1989, 57(4): 937 – 969.
- [15]Campbell J Y, Cochrane J H. By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior[J]. *Journal of Political Economy*, 1999, 107(2): 205 – 251.
- [16]Du D. General equilibrium pricing of options with habit formation and event risks[J]. *Journal of Financial Economics*, 2011, 99(2): 400 – 426.
- [17]Machina M J. Expected utility analysis without the independence axiom[J]. *Econometrica*, 1982, 50(2): 277 – 323.
- [18]Machina M J. Choice under uncertainty: Problems solved and unsolved[J]. *Journal of Econometric Perspectives*, 1987, 1(1): 121 – 154.
- [19]Chew S H, MacCrimmon K. Alpha- $\nu$  choice theory: A generalisation of expected utility theory[J]. Working Paper, 669, 1979a, University of British Columbia.
- [20]Chew S H, MacCrimmon K. Alpha utility theory, lottery composition, and the Allais paradox[J]. Working Paper, 686, 1979b, University of British Columbia.
- [21]Chew S H. A generalization of the quasilinear mean with applications to the measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox[J]. *Econometrica*, 1983, 51(4): 1065 – 1092.
- [22]Quiggin J. A theory of anticipated utility[J]. *Journal of Economic and Behavioral Organization*, 1982, 3(4): 323 – 343.
- [23]Yaari M. The dual theory of choice under risk[J]. *Econometrica*, 1987, 55(1), 95 – 115.
- [24]Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. *Journal of Risk and*

- Uncertainty , 1992 , 5( 4) : 297 – 323.
- [25]Epstein L , Zin S. The independence axiom and asset returns [J]. Journal of Empirical Finance , 2001 , 8( 5) : 537 – 572.
- [26]Barberis N , Huang M. Stocks as lotteries: The implications of probability weighting for security prices [J]. American Economic Review , 2008 , 98( 5) : 2066 – 2100.
- [27]Polkovnichenko V , Zhao F. Probability weighting functions implied by options prices [J]. Journal of Financial Economics , 2013 , 107( 3) : 580 – 609.
- [28]Ma C. Intertemporal recursive utility and an equilibrium asset pricing model in presence of Levy jumps [J]. Journal of Mathematical Economics , 2006 , 42( 2) : 131 – 160.
- [29]Duffie D , Epstein L. Asset pricing with stochastic differential utility [J]. Review of Financial Studies , 1992a , 5( 3) : 411 – 436.
- [30]Duffie D , Epstein L. Stochastic differential utility [J]. Econometrica , 1992b , 60( 2) : 353 – 394.
- [31]Epstein L. Behavior Under Risk: Recent Developments in Theory and Applications [M]. Advances in Economic Theory—Sixth World Congress , Cambridge: Cambridge University Press , 1992.
- [32]Ma C. Advanced Asset Pricing Theory [M]. London: Imperial College Press , 2011.
- [33]Jackwerth J C , Rubinstein M. Recovering probability distributions from option prices [J]. Journal of Finance , 1996 , 51( 5) : 1611 – 1631.

## An option pricing method based on the fanning preference

CHEN Jian

Department of finance , School of Economics , Xiamen University , Fujian Key Laboratory of Statistical Sciences , Xiamen 361005 , China

**Abstract:** Empirical findings suggest two violations of the Black–Scholes model: the volatility smile and the asymmetrical distribution for underlying asset returns. Although stochastic volatility models based on the no-arbitrage theorem can explain these two phenomena , the alternative pricing method under general equilibrium framework has been seldom studied. The traditional equilibrium model incorporating the expected utility fails to differentiate the investor’s different risk preferences towards the diffusive uncertainty and the jump risk. However , with the fanning preference , the model is able to capture an additional risk premium , and generates a pronounced volatility smile. On the other hand , adopting the fanning effect results in a leptokurtic and left-skewed distribution.

**Key words:** stock index option; recursive utility; fanning preference; jump risk

附录 1:

根据 Epstein<sup>[31]</sup> ,

$$f(c, v) = \beta \left( \frac{c^\xi}{\xi} - \frac{v^\xi}{\xi} \right) = \frac{\beta}{\xi} (c^\xi - v^\xi) \quad H(x, y) = \frac{x^\alpha (x^\alpha - y^\alpha)}{\alpha}$$

其中  $\eta = \alpha + 2\varphi$   $H$  方程的定义可参照 Chew<sup>[21]</sup>. 对上式进行单调变化, 令  $v = \psi(v) (\eta v)^{\frac{1}{\eta}}$  ,

$$f(c, v) = \frac{\beta}{\xi} \left[ c^\xi - (\eta v)^{\frac{\xi}{\eta}} \right] = \frac{\beta [c^\xi - (\eta v)^{\frac{\xi}{\eta}}]}{\xi (\eta v)^{\frac{\xi-1}{\eta}} (\eta v)^{\frac{1}{\eta}-1}}$$

另外 ,

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= \frac{H\left(\left(\eta x\right)^{\frac{1}{\eta}} \left(\eta y\right)^{\frac{1}{\eta}}\right)}{H_1\left(\left(\eta y\right)^{\frac{1}{\eta}} \left(\eta y\right)^{\frac{1}{\eta}} \left(\eta y\right)^{\frac{1}{\eta}-1}\right)} \\
 &= \frac{\left(\eta y\right)^{\frac{1}{\eta}}}{\alpha} \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{\eta}} - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\varphi}{\eta}}\right] \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\frac{\varphi}{\eta}} \\
 &= \frac{\eta y}{\alpha} \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha+\varphi}{\eta}} - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\varphi}{\eta}}\right]
 \end{aligned}$$

其中, 令  $\phi(z) = \frac{\eta}{\eta - 2\varphi} [z^{1-\frac{\varphi}{\eta}} - z^{\frac{\varphi}{\eta}}]$  则  $M(x, y) = y\phi\left(\frac{x}{y}\right)$  此式与式(3) 相同.

#### 附录 2:

当  $\varphi = 0$  本文的模型简化为预期效用模型, 期权定价公式与 Naik 和 Lee<sup>[12]</sup> 是一致的.  $\pi_j^*$  ( $\varphi = 0$ ) 为,

$$\begin{aligned}
 \pi_j^* &= \lambda [g(1) - g(0)] - \lambda [g(\eta) - g(\eta - 1)] \\
 &= \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right\} - 1 \right] - \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j\eta + \frac{1}{2}\eta^2\sigma_j^2\right\} - \right. \\
 &\quad \left. \exp\left\{\mu_j(\eta - 1) + \frac{1}{2}(\eta - 1)^2\sigma_j^2\right\} \right]
 \end{aligned}$$

采用与 Liu, Pan 和 Wang<sup>[13]</sup> 相同的符号, 令  $\gamma = 1 - \eta$  则

$$\begin{aligned}
 \pi_j^* &= \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right\} - 1 \right] - \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j(1 - \gamma) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)^2\sigma_j^2\right\} - \exp\left\{-\gamma\mu_j + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_j^2\right\} \right] \\
 &= \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right\} - 1 \right] - \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j - \gamma\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2 - \gamma\sigma_j^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_j^2\right\} - \exp\left\{-\gamma\mu_j + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_j^2\right\} \right] \\
 &= \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right\} - 1 \right] - \lambda \left[ \exp\left\{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right\} \exp\left\{-\gamma\mu_j + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_j^2\right\} \exp\left\{-\gamma\sigma_j^2\right\} - \exp\left\{-\gamma\mu_j + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_j^2\right\} \right]
 \end{aligned}$$

根据 Naik 和 Lee<sup>[12]</sup> 跳跃均值 ( $\bar{K}$ ) 等于  $\exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\} - 1$  对应的风险中性值为  $\bar{K}^Q = (1 + \bar{K}) \exp\left\{-\gamma\sigma^2\right\} - 1$ , 风

险中性的跳跃频率 ( $\lambda^Q$ ) 为  $\lambda \exp\left\{-\gamma\mu + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2\right\}$ . 将其代入上式, 那么

$$\pi_j^* = \lambda \bar{K} - \lambda \left[ \frac{\lambda^Q}{\lambda} (1 + \bar{K}) \frac{1 + \bar{K}^Q}{1 + \bar{K}} - \frac{\lambda^Q}{\lambda} \right] = \lambda \bar{K} - \lambda^Q \bar{K}^Q = \pi_j$$

因此, 当  $\varphi = 0$  时,  $\pi_j^*$  与 Naik 和 Lee<sup>[12]</sup> 的跳跃风险溢酬是一致的.