

股指期货套期保值不完全变现连续出清策略^①

唐衍伟, 陈刚, 刘喜华
(青岛大学经济学院, 青岛 266071)

摘要: 假定股票和期货服从算术布朗运动, 投资者效用为均值一方差形式, 价格冲击为线性, 在连续时间框架下, 求解单只股票与股指期货套期保值不完全变现的同步出清问题, 得到出清轨迹. 参数分析表明: 当风险厌恶程度较大、组合标准差越大时, 投资者倾向于在出清初期出清较大规模的头寸, 以降低后期的风险; 当 $\rho < 0$, 随套期保值比的增加, 投资者更倾向于快速的出清过程, 当 $\rho > 0$ 则相反; 在给定套期保值比的情况下, 出清速率与相关系数呈反向变化. 不完全变现比完全变现的出清轨迹更向下凸, 而且可能会出现提前完成出清的情况发生.

关键词: 股指期货; 套期保值; 出清策略

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2014)12-0085-08

0 引言

投资者在出清资产时, 不仅要权衡收益和风险, 还要面对市场和投资者自身的不确定性. 股指期货套期保值涉及股票现货和股指期货两个市场, 一般情况下, 这两种资产是高度正相关的, 而套期保值的反向操作则人为构造了两种高度负相关资产. 对于已进行套期保值的股票现货, 在出清股票头寸时, 为了避免现货头寸风险暴露过大, 应该保持现货与期货出清量以套期保值比例保持同步, 从而使得持有头寸仍然可以通过期货套期保值达到规避市场总体风险的目的. 传统的套期保值策略忽略了执行成本, 而不考虑执行成本的“好的”套期保值策略, 在实际操作的过程中可能导致很大的风险, 特别是在市场流动性不足的情况下. 最优执行作为套期保值策略最终实现的保障, 也是在设计套期保值方案必须考虑的关键一环. 股指期货采用保证金交易制度, 在进行期货出清时, 衡量的是最终实现的出清成本, 而不需要考其杠杆效应, 而且股指期货可以认为

是股票指数的近似替代, 因此, 可以将股票与股指期货同步出清问题纳入投资组合的框架下进行研究.

国外出清策略研究主要有: Almgren 和 Chriss^[1] 假定市场冲击分为瞬时冲击和永久冲击且都是线性的, 通过均值一方差理论, 提出资产最优出清策略的框架, 研究表明最优执行策略是时间的双曲正弦和双曲余弦的线性组合形式; Huberman 和 Stanzl^[2] 在投资者效用函数中引入执行成本的方差, 利用随机动态规划方法实现最优策略的求解; Almgren^[3] 在冲击函数为多项式时, 讨论了变现时间为可变时的最优变现策略; Dubil^[4] 延伸了 Almgren 和 Chris 提出的模型来确定最终的出清期, 并假定交易以恒定速率进行、市场冲击函数为广义幂指数和与价格线性相关两种形式; Konishi^[5] 利用 Almgren 和 Chriss 的模型, 并假定交易量为随机变量, 推导出按照 VWAP(交易量加权的平均价格) 基准进行交易的静态最优执行策略; Mönch^[6] 考虑日内市场流动性特性, 采用指数价格冲击函数, 建立

^① 收稿日期: 2012-07-13; 修订日期: 2012-12-06.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70971071; 71471093).

作者简介: 唐衍伟(1970—), 男, 山东青岛人, 博士, 副教授. Email: Kingtyw@126.com

了投资者指令重建的大部分投资组合的最优资产出清策略; Subramanian^[7] 在投资者风险偏好和资产价格运动的广泛假设下,建立了大宗资产投资者出清问题的优化模型,并证明大宗资产投资者在具有较强效用函数时能得到最优出清策略。

国内研究主要有:林辉^[8] 在收益率为正态分布,相对价差和中间价格相互独立的前提下,研究了 La-VaR 模型,并将确定性等价效用和风险偏好引入多期 La-VaR 模型,采用匀速率出清逼近的方法,得到最优出清策略和 La-VaR; 熊熊等^[9] 应用 Lotka-Volterra 动力系统模型,使用新加坡的摩根台股指期货与台湾台股指期货的交易量数据,对两市场指数期货的竞争关系进行了实证研究,结果表明两市场更容易处于互惠的关系; 卢斌和华仁海^[10] 使用广义序贯交易模型,基于高频的逐笔交易数据(交易价格和成交量),并借助 MCMC 的统计抽样方法对模型的参数进行估计,对中国期货市场的流动性进行了研究,结果显示:从交易成本和交易对于有效价格的影响系数这两个指标来看,黄金期货的流动性最强; 李悦雷等^[11] 利用极值相关理论对沪深 300 指数期货的操纵防范问题进行研究,通过分析发现:权重板块(股票)与指数在价格下跌过程中的极值相关性明显强于价格上涨过程中的极值相关性,股票的权重大小与分析得到的极值相关性并不是对称的; 胡小平,何建敏^[12] 基于供应曲线理论研究了机构投资者的最优变现策略问题,利用供应曲线,给出了变现策略与变现成本的数学描述,基于极大值原理,获得了问题的解析解。

投资者并非总是一次性将所持有头寸全部变现,更经常的是根据市场情况有步骤地分多次出清,或仅仅是对头寸进行调整,此即为不完全出清的情况。完全出清在出清完毕后不再持有头寸,而不完全出清则需要同时考虑变现头寸和继续持有头寸的价值和风险,因此,本文在 Almgren 和 Chriss 研究框架下纳入期货套期保值,保持出清期间内套期保值比不变,假定资产价格服从无漂移项的算术布朗运动、永久和暂时价格冲击均为

线性的情况下,对单只股票与股指期货不完全变现的同步连续出清问题进行研究。

1 套期保值变现问题

考虑一名投资者在初始零时刻持有一种证券的头寸为 X ,计划在 T 时间内连续卖出部分股票,投资者在持有期第 T 个交易日结束时持有股票头寸为 Y 。

定义在 t 时刻 $t \in [0, T]$ 投资者持有的头寸为 $x(t)$,证券的价格为 S_t ,则有

$$x(0) = X, x(T) = Y \quad (1)$$

变现速度为

$$\frac{dx}{dt} = -v(t) \quad (2)$$

假设市场价格运动缺乏趋势性,认为市场价格服从如下有漂移项的几何布朗运动

$$dS = S\mu dt + S\sigma dW(t) \quad (3)$$

$W(t)$ 是标准维纳过程。由于几何布朗运动不便于数学处理,又考虑到变现的时间很短($\ll 1$ 年),可以近似地用算术布朗运动来代替几何布朗运动($s\bar{\sigma} \approx \sigma$ 常数),即

$$dS = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (4)$$

投资者变现交易引起的对市场不利影响分为永久冲击与瞬时冲击。永久冲击是指投资者的变现交易(卖)对市场价格的不利影响一直持续整个变现期 $[0, T]$,而瞬时冲击只是在时间 $(t - dt, t)$ 内使投资者的实际成交价格偏离市场的均衡价格。永久冲击和瞬时冲击响应都是变现速度的函数,考虑线性冲击响应

$$\begin{aligned} g(v(t)) &= \gamma v(t), \gamma > 0 \\ h(v(t)) &= \eta v(t), \eta > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

由文献[1]知,由于永久冲击响应的存在,市场价格运动中漂移项变为 $-g(v(t))$,市场价格变为

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 + \int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dW(t) - \\ &\quad \int_0^t g(v(t)) dt \\ &= S_0 + \mu t + \sigma W(t) - \int_0^t \gamma v(t) dt \end{aligned} \quad (6)$$

由于存在瞬时冲击响应 $h(v(t))$, 投资者真正实现的交易价格为

$$\tilde{S}(t) = S(t) - \eta v(t) \quad (7)$$

在 T 时刻 剩余头寸的价值为

$$\begin{aligned} S(T)x(T) &= x(T) [S_0 + \mu T + \sigma W(T) - \\ &\int_0^T \gamma v(t) dt] \\ &= x(T) [S_0 + \mu T + \sigma W(T) + \\ &\gamma(x(T) - x(0))] \quad (8) \end{aligned}$$

由于存在流动性 投资者可能造成损失 出清收入之间存在差距 将以初始价格出清所得收入与实际收入之差 再减去出清期末仍持有头寸的价值作为执行成本 记为 EC 其中记初始价格出清所得收入与实际收入之差为出清过程的交易成本 TC 则有

$$\begin{aligned} EC &= XS_0 - \int_0^T \tilde{S}(t) (-dx(t)) - S(T)x(T) \\ &= TC - S(T)x(T) \quad (9) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} TC &= XS_0 - \int_0^T \tilde{S}(t) (-dx(t)) \\ &= x(T)S_0 + \frac{1}{2}\gamma[x(0)^2 + x(T)^2] - \\ &\gamma x(0)x(T) + \int_0^T \mu t dx(t) + \\ &\int_0^T \sigma W(t) dx(t) + \eta \int_0^T v^2(t) dt \quad (10) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu t dx(t) &= \mu t x(t) \Big|_0^T - \int_0^T \mu x(t) dt \\ &= \mu T x(T) - \int_0^T \mu x(t) dt \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma W(t) dx(t) &= \sigma W(t)x(t) \Big|_{t=0}^{t=T} - \\ &\int_0^T \sigma dx(t) dW(t) \\ &= \sigma x(T)W(T) + \int_0^T \sigma x(t) dW(t) \quad (12) \end{aligned}$$

将式(10) ~ (12) 代入式(9) 有

$$\begin{aligned} EC &= x(T)S_0 + \frac{1}{2}\gamma[x(0)^2 + x(T)^2] - \\ &\gamma x(0)x(T) + \int_0^T \mu t dx(t) + \\ &\int_0^T \sigma W(t) dx(t) + \eta \int_0^T v^2(t) dt - \\ &x(T) \left[S_0 + \mu T + \sigma W(T) - \int_0^T \gamma v(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2}\gamma[x(0)^2 - x(T)^2] + \int_0^T \sigma x(t) dW(t) + \\ &\eta \int_0^T v^2(t) dt - \int_0^T \mu x(t) dt \quad (13) \end{aligned}$$

因为

$$E\left(\int_0^T \sigma x(t) dW(t)\right) = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} D(EC) &= D\left(\int_0^T \sigma x(t) dW(t)\right) \\ &= \int_0^T \sigma^2 x^2(t) D(dW(t)) \\ &= \int_0^T \sigma^2 x^2(t) dt \quad (15) \end{aligned}$$

EC 的数学期望为

$$\begin{aligned} E(EC) &= \frac{\gamma}{2}(X^2 - Y^2) + \eta \int_0^T v^2(t) dt - \\ &\int_0^T \mu x(t) dt \quad (16) \end{aligned}$$

EC 的方差为

$$V(EC) = \int_0^T \sigma^2 x^2(t) dt \quad (17)$$

同理 假定股指期货价格服从如下算术布朗运动

$$dS_f = \mu_f dt + \sigma_f dW_f(t) \quad (18)$$

市场的永久冲击系数暂时冲击系数和分别为 $\gamma_f > 0, \eta_f > 0$ 套期保值的交易方向同股票交易方向相反 若股票为卖出变现 则期货为买入变现.

为了保持股票和期货的同步 股票和期货头寸应按套期保值比 ϕ 进行同步变现

$$\begin{cases} v_{f,t} = \phi v_{s,t} \\ x_{f,t} = \phi x_{s,t} \end{cases} \quad (19)$$

期货执行成本为

$$\begin{aligned}
EC_f &= \frac{1}{2} \gamma_f \phi^2 (X^2 - Y^2) + \\
&\phi \int_0^T \sigma_f v(t) dW_f(t) + \phi^2 \eta \int_0^T v^2(t) dt - \\
&\phi \mu_f \int_0^T x(t) dt \tag{20}
\end{aligned}$$

股指期货套期保值股票和期货同步执行成本为

$$\begin{aligned}
E(EC) &= \frac{1}{2} (\gamma_s + \phi^2 \gamma_f) (X^2 - Y^2) + \\
&\int_0^T \sigma_s v(t) dW_s(t) + \phi \int_0^T \sigma_f v(t) dW_f(t) + \\
&(\eta_s + \phi^2 \eta_f) \int_0^T v^2(t) dt - \\
&(\mu_s + \phi \mu_f) \int_0^T x(t) dt \tag{21}
\end{aligned}$$

因此,可求得流动性成本的期望和方差分别为

$$\left\{ \begin{aligned}
E(EC) &= \frac{1}{2} (\gamma_s + \phi^2 \gamma_f) (X^2 - Y^2) + \\
&(\eta_s + \phi^2 \eta_f) \int_0^T v^2(t) dt - \\
&(\mu_s + \phi \mu_f) \int_0^T x(t) dt \\
V(EC) &= \int_0^T (\sigma_s^2 - 2\phi \rho_{sf} \sigma_s \sigma_f + \phi^2 \sigma_f^2) x^2(t) dt
\end{aligned} \right. \tag{22}$$

式中: ρ 为股票和期货价格的相关系数,由于股票和期货的操作方向相反,因此在计算方差时 ρ 取负号; ϕ 为套期保值比.

$$\left\{ \begin{aligned}
\hat{\mu} &= \mu_s + \phi \mu_f \\
\hat{\sigma} &= \sigma_s^2 - 2\phi \rho_{sf} \sigma_s \sigma_f + \phi^2 \sigma_f^2 \\
\hat{\eta} &= \eta_s + \phi^2 \eta_f \\
\hat{\gamma} &= \gamma_s + \phi^2 \gamma_f
\end{aligned} \right. \tag{23}$$

上式可写为

$$\left\{ \begin{aligned}
E(EC) &= \frac{1}{2} \hat{\gamma} (X^2 - Y^2) + \hat{\eta} \int_0^T v^2(t) dt - \\
&\hat{\mu} \int_0^T x(t) dt \\
V(EC) &= \int_0^T \hat{\sigma}^2 x^2(t) dt
\end{aligned} \right. \tag{24}$$

2 变现策略求解

投资者选择策略 $(x(t), v(t))$, 使得下式取最小值

$$U = E(EC) + \lambda V(EC) \tag{25}$$

式中 λ 是反映投资者的风险偏好, $\lambda < 0$ 时投资者偏好风险; 当 $\lambda = 0$ 时投资者风险中性; 当 $\lambda > 0$ 时, 投资者风险厌恶. 以下仅讨论风险厌恶的理性投资者.

令

$$J(x(t)) = \int_0^T (\hat{\eta} v^2(t) + \frac{\lambda}{2} \hat{\sigma}^2 x^2(t) - \hat{\mu} x(t)) \tag{26}$$

则 $x^*(t)$ 最小值使得 U 取得最小值, 等价于 $x^*(t)$ 使得指标泛函 $J(x(t))$ 取得最小值.

令

$$F(x(t)) = \hat{\eta} v^2(t) + \frac{\lambda}{2} \hat{\sigma}^2 x^2(t) - \hat{\mu} x(t) \tag{27}$$

为使 $J(x(t))$ 取得最小值, $F(x(t))$ 应满足如下形式的欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \tag{28}$$

由于 $v(t) = -\frac{dx}{dt}$, 上式可化为

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0 \tag{29}$$

将式(27)代入上式并化简得到

$$\ddot{x} - \kappa^2 x - \frac{B}{2} = 0 \tag{30}$$

$$\text{其中 } \kappa = \sqrt{\frac{\lambda \hat{\sigma}^2}{2 \hat{\eta}}}, B = -\frac{\hat{\mu}}{\hat{\eta}}.$$

当 $\lambda > 0$ 时, 上式为常系数非齐线性微分方程. 首先, 考虑对应的齐次线性微分方程的解

$$\ddot{x} - \kappa^2 x = 0 \tag{31}$$

特征方程 $r^2 - \kappa^2 = 0$ 有根 $r = \pm \kappa$, 因此, 齐次方程的通解为

$$\tilde{x}(t) = c_1 \exp(\kappa t) + c_2 \exp(-\kappa t) \tag{32}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, 非齐次线性微分方程的一个特解可取 $x(t) = -\frac{B}{2\kappa^2}$, 则非齐线性微分方程的通解为

$$\tilde{x}(t) = c_1 \exp(\kappa t) + c_2 \exp(-\kappa t) - \frac{B}{2\kappa^2} \tag{33}$$

利用边界条件 $x(0) = X, x(T) = Y$ 可得方程非齐线性微分方程的解为

$$x(t) = \frac{\sinh(\kappa(T-t))}{\sinh(\kappa T)} X + \frac{\sinh(\kappa t)}{\sinh(\kappa T)} Y + \left(\frac{\sinh(\kappa(T-t)) + \sinh(\kappa t)}{\sinh(\kappa T)} - 1 \right) \bar{x} \quad (34)$$

其中 $\kappa = \sqrt{\frac{\lambda \hat{\sigma}^2}{2\hat{\eta}}}, \bar{x} = \frac{\hat{\mu}}{2\lambda \hat{\sigma}^2}$.

出清轨迹第 1、2 项为无漂移项的出清轨迹, 第 3 项为漂移项的修正项. 期货出清轨迹为 $x_f(t) = \phi x(t)$. 若为完全出清的情况, 则上式没有第 2 项, 该项也为双曲线形式, 如果将不完全出清按完全出清的情况进行处理, 则该项恒为 Y , 则每次的出清量相差 $\left(1 - \frac{\sinh(\kappa t)}{\sinh(\kappa T)}\right) Y$. 由此可以看出, 在不完全出清情况下, 投资者更倾向于较完全出清更快的出清速度, 以尽量降低出清过程对现有头寸的冲击影响.

3 参数分析

投资者初始持有股票头寸为 $x(0) = X = 10^7$ 股, 计划在 $T = 5$ 天内出清, 股票的方差为 $\sigma_s = 0.05$, 均值为 $\mu_s = 0.12$, 永久冲击系数为 $\gamma_s = 6.5 \times 10^{-7}$, 暂时冲击系数为 $\eta_s = 2.50 \times 10^{-7}$. 股指期货的方差为 $\sigma_f = 0.03$, 均值为 $\mu_f = 0.08$, 永久冲击系数为 $\gamma_f = 3.5 \times 10^{-7}$, 暂时冲击系数为 $\eta_f = 5.5 \times 10^{-8}$, 套期保值比为 $\phi = 0.5$, 股票和期货相关系数为 $\rho = 0.8$, 假定投资者的风险厌恶系数为 $\lambda = 10^{-4}$, 参数计算结果如下表.

表 1 出清参数计算

Table 1 Parameters of trading strategies

参数	股票	期货	参数	
μ	0.12	0.08	$\hat{\mu}$	0.12
σ	0.05	0.03	$\hat{\sigma}$	0.05
ρ	-0.8			
γ	6.50×10^{-7}	3.50×10^{-7}	$\hat{\gamma}$	6.50×10^{-7}
η	2.50×10^{-7}	5.50×10^{-8}	$\hat{\eta}$	2.50×10^{-7}
ϕ	0.5			
λ	1.00×10^{-4}		κ	0.707 107

3.1 风险厌恶系数对出清轨迹的影响

当风险厌恶程度较大时, 投资者倾向于在出清初期出清较大规模的头寸, 以降低后期的风险, 而当风险厌恶程度较小时, 投资者倾向于更少地出清头寸, 也更接近匀速率出清(图 1).

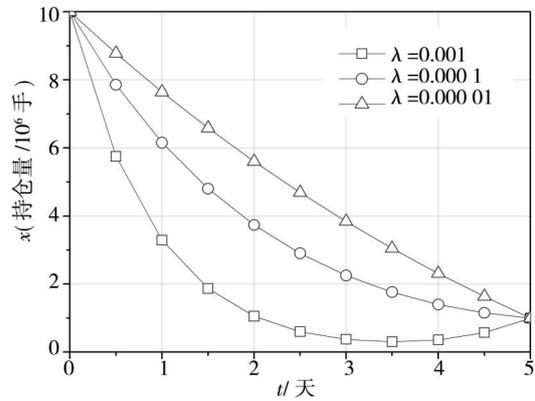


图 1 不同风险厌恶程度的出清轨迹

Fig. 1 Trading strategies with risk aversion

3.2 组合标准差对出清轨迹的影响

组合标准差越大, 则出清轨迹下移, 投资者在出清初期更倾向于出清更多的头寸以降低波动风险; 当组合标准差变小, 出清轨迹上移, 投资者更倾向于更缓慢出清(图 2).

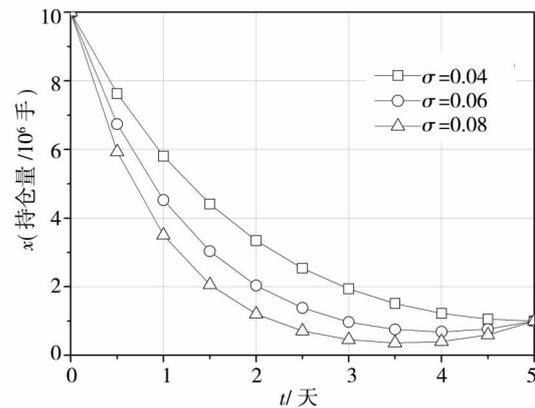


图 2 不同组合标准差的出清轨迹

Fig. 2 Trading strategies with standard deviation

3.3 相关系数不变, 不同套期保值比的出清轨迹

1) $\rho = 0$ 或 $\phi = 0$ 时, 出清过程退化为不考虑期货套保的情况, 即纯粹的股票出清;

2) 当 $\rho > 0$ 且 $\phi > 0$ 时, 随套期保值比的增加, 出清轨迹向上移动, 即随套期保值比的增加, 每次的出清量逐渐减少, 投资者更倾向于缓慢的

出清过程(图3).

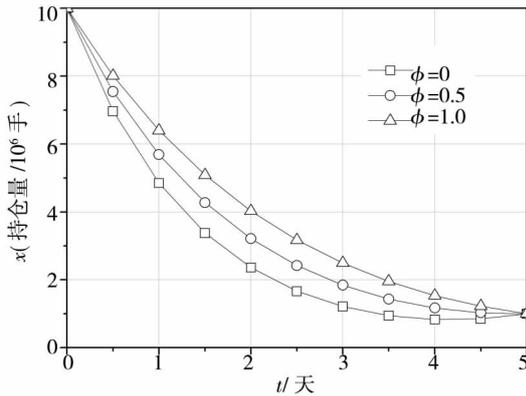


图3 $\rho = 0.8$ 时不同套期保值比的出清轨迹

Fig. 3 Trading strategies with hedging ratios and $\rho = 0.8$

3) 当 $\rho < 0$ 且 $\varphi > 0$ 时, 随套期保值比的增加, 出清轨迹向下移动, 即随套期保值比的增加, 每次的出清量逐渐增加, 投资者倾向于更快速的出清过程(图4).

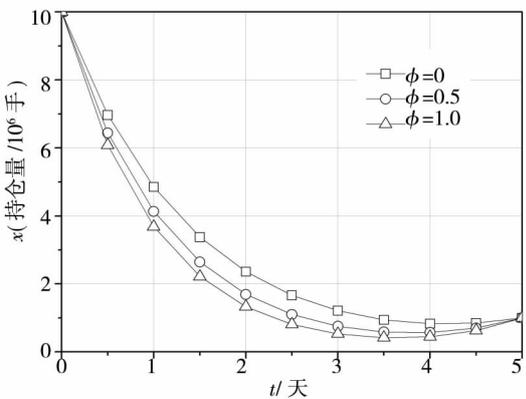


图4 $\rho = -0.8$ 时不同套期保值比的出清轨迹

Fig. 4 Trading strategies with hedging ratios and $\rho = -0.8$

3.4 套期保值比不变, 不同相关系数的出清轨迹(图5)

1) $\rho > 0$ 时, 随相关系数的增加, 出清轨迹向上移动, 即随相关系数的增加, 每次的出清量逐渐减少, 出清速率与相关系数呈反向变化, 且随套期保值比的增加, 其差异越大.

2) $\rho < 0$ 时, 随相关系数的增加, 出清轨迹向下移动, 即随相关系数绝对值的增加, 每次的出清量逐渐增加, 出清速率与相关系数绝对值呈同向变化, 且随套期保值比的增加, 其差异越大.

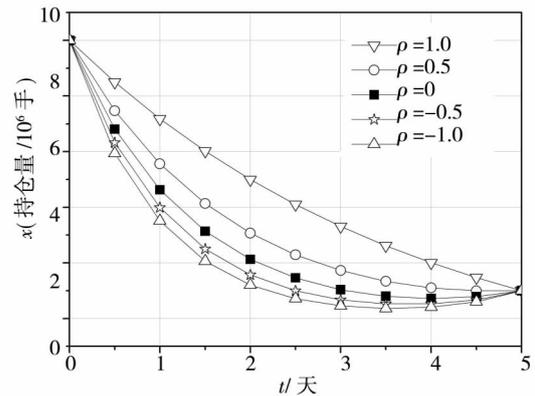


图5 不同相关系数的出清轨迹

Fig. 5 Trading strategies with different coefficients

3.5 完全变现与不完全变现比较(图6)

不完全变现的出清轨迹和完全变现的出清轨迹并不完全一样, 不完全出清可能会出现提前完成出清的情况发生, 这与模型的双曲线解有关.

不完全变现比完全变现的出清轨迹更向下凸, 说明在相同情况下, 不完全变现的出清速率更高, 投资者更倾向于在前期出清较多的头寸.

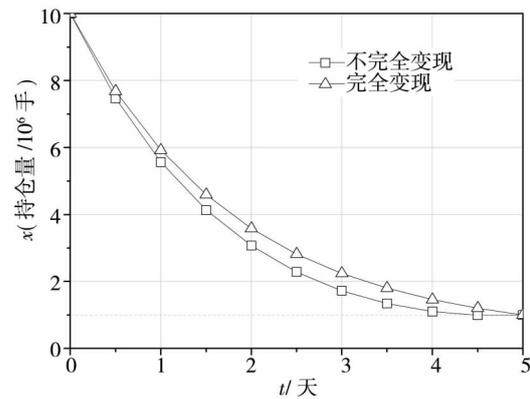


图6 完全变现与不完全变现出清轨迹比较

Fig. 6 Trading strategies with complete and partial liquidation

4 结束语

1) 假定股票和期货服从算术布朗运动, 投资者效用为均值-一方差形式, 价格冲击为线性冲击, 在连续时间框架下, 求取了单只股票与股指期货套期保值在给定出清时间内的不完全变现同步连续出清问题, 得到双曲线形式的出清轨迹.

2) 相较于完全出清, 不完全出清的投资者更倾向于更快的出清速率, 出清速率的增加也呈双曲线形式递减.

3) 参数分析表明: 当风险厌恶程度较大时, 投资者倾向于在初期出清较大规模的头寸, 以降低后期的风险; 组合标准差越大, 则出清轨迹下移, 投资者在出清初期更倾向于出清更多的头寸以降低波动风险; 组合漂移项为负时, 投资者偏向较快的出清过程; 当 $\rho > 0$ 随套期保值比的增加, 投资者更倾向于缓慢的出清过程, 当 $\rho < 0$ 则相反; 在给定套期保值比的情况下, 出清速率与相关系数呈反向变化.

4) 由于采用股指期货进行套期保值, 使得组合标准差降低, 起到平抑组合波动的作用, 因而可

以采取比无套期保值情况下更为缓慢的出清过程.

5) 不完全变现比完全变现的出清轨迹更向下凸, 而且不完全出清可能会出现提前完成出清的情况发生.

本文得到的股指期货套期保值不完全变现同步出清策略是在一定的理论简化假设前提下得到的, 进一步的研究中需要假定资产价格服从几何布朗运动, 价格冲击为非线性, 以更接近真实的市场. 本文的研究结果适合于市场较为平稳的情况和较短的出清周期, 对于真实的投资执行计划, 需要根据市场的具体情况对各参数进行滚动估计, 得到最优出清策略, 进而计算出清风险, 从而对整体投资组合进行风险评估.

参 考 文 献:

- [1] Almgren R, Chriss N. Optimal execution of portfolio transactions [J]. *Journal of Risk*, 2000, 3(2): 5-39.
- [2] Huberman G, Stanzl W. Optimal Liquidity Trading [R]. Columbia: Columbia University, 2001.
- [3] Almgren R. Optimal execution with nonlinear impact functions and trading-enhanced risk [J]. *Applied Mathematical Finance*, 2003, 10(1): 1-18.
- [4] Dutilleul R. Optimal liquidation of large security holding in thin market [J]. *Journal of Financial Economics*, 2002, 5(2): 197-221.
- [5] Konishi H. Optimal slice of a VWAP trade [J]. *Journal of Financial Markets*, 2002, 5(2): 197-221.
- [6] Mönch B. Strategic Trading in Illiquid Markets [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [7] Subramanian A. Optimal liquidation by a large investors [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2007, 68(4): 1168-1201.
- [8] 林 辉. 金融市场微观结构视角的 La-VaR 模型 [D]. 南京: 东南大学, 2004.
Lin Hui. La-VaR model based on financial market microstructure [D]. Nanjing: South East University, 2004. (in Chinese)
- [9] 熊 熊, 张 维, 李 帅, 等. 基于 Lotka-Volterra 模型的股指期货市场竞争分析 [J]. *系统工程学报*, 2009, 24(5): 581-588.
Xiong Xiong, Zhang Wei, Li Shuai, et al. Competitive analysis of index futures markets based on Lotka-Volterra model [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2009, 24(5): 581-588. (in Chinese)
- [10] 卢 斌, 华仁海. 基于 MCMC 方法的中国期货市场流动性研究 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(9): 98-106.
Lu Bin, Hua Renhai. Research on liquidity of Chinese futures markets via MCMC method [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(9): 98-106. (in Chinese)
- [11] 李悦雷, 张 维, 熊 熊, 等. 基于极值相关分析方法的股指期货操纵防范研究 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(11): 104-111.
Li Yuelei, Zhang Wei, Xiong Xiong, et al. Investigation on prevention of manipulation in the stock index futures markets based on method of extreme correlation [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(11): 104-111. (in Chinese)
- [12] 胡小平, 何建敏. 基于供应曲线的最优变现策略研究 [J]. *系统工程学报*, 2011, 26(2): 188-194.

Hu Xiaoping , He Jianmin. Research on optimal liquidation strategy based on supply curve [J]. Journal of Systems Engineering , 2011 , 26(2) : 188 - 194. (in Chinese)

Continuous optimal partial liquidation of the single stock's hedging under arithmetic Brownian movements

TANG Yan-wei , CHEN Gang , LIU Xi-hua

School of Economics , Qingdao University , Qingdao 266071 , China

Abstract: The continuous liquidation trajectory of the single hedged stock is derived under the arithmetic Brownian movements , mean-variance utility , and linear market impact. The parameters analysis shows that the investors are like to liquidate quickly if they are more risk averse or the portfolio's variance is larger; if the correlation coefficient is negative , they want to execute more quickly and vice versa; the liquidation velocity changes are opposite to that of the correlation coefficient under the given hedging ratio. The partial liquidation's trajectory is more convex than the full liquidation's. Sometimes , the investors would over liquidate firstly and then recover the position.

Key words: stock index futures; hedging; optimal liquidation

(上接第 37 页)

demand disruption environment. Considered two retailers competing for selling homogeneous products , we assumed that retailers can use inventory pooling strategy to mitigate customer demand risks when demands are disrupted. Thus , three non-cooperative game models are established: no disruption and no transshipment case (NDNT) , with disruption and no transshipment case (WDNT) , and with disruption and with transshipment case (WDWT) . Through a contraction mapping theory , we developed sufficient conditions for the Nash equilibrium to be existent and unique. We proved that each game of the three cases has a single pure strategy Nash equilibrium at symmetric configuration. Furthermore , we analyzed properties of the equilibrium and compared it with the other one. We also analyzed the monotone relationships of the competition degree parameters to the equilibriums based on solutions of partial derivatives equations and developed sufficient conditions that the transshipment policy is beneficial to the retailers. Through computation and simulation of a numerical example , we verified these conclusions. It is shown that retailers are always benefited from lateral transshipment when demands are disrupted because expected revenue will realize Pareto improvement after transshipment. However , relatively low transshipment prices will make retailers hurt by transshipment. Therefore , transshipment price configuration plays a key role in managing demand disruptions with transshipment. The results will provide theoretical supports for entities regarding disruption management.

Key words: supply chain management; disruption management; lateral transshipment; demand disruption