

Realized GAS-GARCH 及其在 VaR 预测中的应用^①

王天一¹, 黄卓^{2*}

(1. 对外经济贸易大学金融学院, 北京 100029; 2. 北京大学国家发展研究院, 北京 100871)

摘要: 论文提出了新的波动率模型 Realized GAS-GARCH, 并推导了该模型的 QMLE 参数估计. 该模型结合了 Generalized Autoregressive Score (GAS) 模型的基本思路, 把 Realized GARCH 模型扩展到包含厚尾分布的情形, 并采用了与厚尾分布参数相依的冲击响应函数. 与简单的厚尾分布扩展模型相比, 这种设定对于回报率中的极端值更加稳健. 在基于沪深 300 指数高频数据的实证结果中, 使用 GAS 冲击响应函数的模型对“在险价值”VaR 的预测能力显著的超过了传统的厚尾 Realized GARCH 模型.

关键词: Realized GARCH; 冲击响应函数; 厚尾分布; VaR

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2015)05-0079-08

0 引言

从 Andersen 等^[1]开创性的工作开始, 越来越多的文献已经证实, 使用高频数据可以获得波动率更精确的度量, 并引发了相关领域的大量研究^[2-7]. 由于 GARCH 模型在传统波动率建模中的出色表现, 如何将已实现测度与 GARCH 模型进行结合成为研究中的热点话题^②. 对于两者的结合, 最直接的做法是将已实现测度以外生变量的形式引入 GARCH 模型, 即 GARCH-X 模型. 这种方式虽然简单, 但缺乏针对已实现测度的建模部分, 因此模型无法进行多步预测. 为了解决这个问题, 研究者提出了将已实现测度纳入 GARCH 框架的 Realized GARCH 模型^[8]. 实证研究^[8-9]表明, 相比传统的 GARCH 模型而言, 应用已实现测度的 Realized GARCH 模型对波动率建模预测能力有显著的提升. 原始的 Realized GARCH 模型误

差设定基于正态分布, 后继研究^[9]指出这种设定并不能拟合数据中的偏峰厚尾现象, 并提出用 Skewed- t 分布改进模型对厚尾分布拟合能力的方法. 文献^[9]同时将冲击响应函数的幂指数放松为待估参数, 结果显示幂指数大部分都小于 2, 即原始的二次型设定存在设定问题.

以上现象显示, Realized GARCH 模型设定冲击响应函数对于收益率冲击的响应强度过大, 类似的现象在日数据 GARCH 模型中也常见^[10]. 其背后的机理在于, 不同尾部厚度的分布下同样大小的冲击其罕见程度不同, 分布的尾部越厚, 对于同样大小的冲击而言, 其罕见程度越低^③. 因此尾部厚的模型其冲击响应强度应该比尾部薄的模型小. 如果对于任何分布都采用同样的函数设定, 必然会导致某些分布下, 模型的冲击响应强度过度或者不足. 实际上, 现有的 GARCH 模型最早都是

① 收稿日期: 2012-09-20; 修订日期: 2013-07-01.

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(71201001; 71301027); 教育部人文社会科学青年基金资助项目(12YJC790073; 13YJC790146); 对外经济贸易大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(14YQ05); 对外经济贸易大学学科建设专项经费资助项目(XK2014116).

通信作者: 黄卓(1978—), 男, 湖北武汉人, 助理教授. Email: zhuohuang@nsd.pku.edu.cn

② 国内已有文献^[5-6]比较了已实现波动率和 GARCH 模型波动率之间的异同, 但是将两者相结合的文章并不多见.

③ 罕见程度可以用零均值检验的 p 值衡量, p 值越小, 说明冲击大于给定值的概率越小, 即该强度的冲击越罕见. 对于同一个实现值 x 而言, 分布尾部越薄, 对应的 P 值越小, 即越罕见.

针对误差服从正态分布设计的,对服从厚尾分布随机变量建模时(如收益率数据),其冲击响应强度过大是必然的.因此,对 GARCH 模型进行分布上的拓展,仅将误差分布修正成厚尾分布是不够的,还需要将模型本身的函数形式做相应的修正.正是基于这种思想,文献中提出了 generalized autoregressive score (GAS) 模型框架^[11].在这个模型框架下,数据进入模型的函数形式是依分布不同而不同的^④.

借助这个新框架,本文在 Realized GARCH 模型下推导出与“误差服从厚尾分布”这一假设相适应的冲击响应函数,从而完善了基于厚尾分布 Realized GARCH 模型^[9],并得到了 Realized GARCH 模型族内的一个全新的模型——Realized GAS-GARCH 模型.这种模型在误差服从正态分布时退化为原始的 Realized GARCH 模型.与简单修正误差分布的模型相比,新模型对于极端值的反应更弱.由于收益率序列常存在极端涨跌状况,能否准确建模冲击响应,合理应对极端值,对于波动率模型在风险控制方面应用的效果至关重要.以沪深 300 指数高频数据为例进行实证探讨,结果显示:1)对计算“在险价值”(value-at-risk) VaR 而言,使用 Skewed-t 分布可以得到更好的结果^⑤;2)对极端风险状况,使用 GAS 冲击响应函数的模型对 VaR 的预测能力显著地超过了简单分布拓展下的厚尾 Realized GARCH 模型^[9].

1 模型基本设定

原始的 Realized GARCH 模型设定如下^[8]

$$r_t = \sqrt{h_t} z_t \tag{1}$$

$$\ln h_t = \omega + \beta \ln h_{t-1} + \gamma \ln x_{t-1} \tag{2}$$

$$\ln x_t = \xi + \phi \ln h_t + \tau(z_t) + \sigma u_t \tag{3}$$

其中, x_t 是已实现测度; $z_t, \mu_t \sim N(0, 1)$ 且相互独立.方程(1)和(2)合起来就是 GARCH-X 模型,

方程(3)将已实现测度与条件波动率经由测量方程形式联系起来.由于 u_t 作为测量误差进入整个模型系统,讨论分布设定的时候总假设 $u_t \sim N(0, 1)$ ^⑥.由于已实现测度的计算只基于交易时间的收益率而条件波动率对应的是从一个收盘到下一个收盘的收益率,因此并不要求 $\phi = 1$.函数 $\tau(z_t)$ 描述了波动率对于收益率的冲击响应^⑦.

本文选取已实现核估计^[12]作为模型使用的已实现测度.在存在微观噪音的情况下,高频收益率之间会存在相关性,传统已实现波动率(realized variance)的计算方法忽略了这种相关性,从而会导致偏误.类似于异方差与序列相关稳健(HAC robust)标准差的计算方式,已实现核估计的计算方法为

$$RK = \sum_j \sum_{h=-H}^H K\left(\frac{h}{H}\right) |r_{t,j}| |r_{t,j-h}| \tag{4}$$

其中 $K(\cdot)$ 是核函数(kernel function).这里沿袭文献中常用方式,使用 Parzen 核^[12]作为核函数; H 是核函数的带宽.已实现核估计相比传统的已实现波动率,因其专门针对高频收益率之间的相关性进行设计,削弱了市场微观噪音导致的估计偏误.

金融资产收益率数据中普遍存在着偏峰厚尾的现象,虽然 Realized GARCH 模型结构本身能产生一定的峰度和偏度^[8],但仍不足以拟合数据^[9].为此,沿袭传统 GARCH 文献解决这个问题思路,使用 Skewed-t 分布^[13]作为收益率的分布

$$f(z | \nu, \zeta) = \begin{cases} bc \left[1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1-\zeta} \right)^2 \right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, & z < -a/b \\ bc \left[1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1+\zeta} \right)^2 \right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, & z \geq -a/b \end{cases} \tag{5}$$

且

④ 本文称这种性质为“分布相依性”(distribution dependent).

⑤ 由于 VaR 预测更依赖于分布的设定,因此 Skewed-t 分布的偏态性质会产生重要的影响,这一点与厚尾 Realized GARCH 模型对美国股市数据建模的结果^[10]不同.

⑥ 将测量误差改为厚尾分布并不能改变结果.

⑦ Realized GARCH 文献[8]中亦称 $\tau(z_t)$ 为杠杆函数,因为其设定上允许波动率对收益率不同方向的冲击做不同的反应.即 $\tau(z_t)$ 对杠杆效应进行了描述.

$$a = \frac{4\lambda c(\eta - 2)}{\eta - 1}$$

$$b = \sqrt{1 + 3\lambda^2 - a^2}$$

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta + 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\eta - 2)}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

其中, ν 是自由度; ζ 控制了分布的偏斜, 当 $\zeta > 0$ 时分布右偏, 当 $\zeta < 0$ 时分布左偏, 当 $\zeta = 0$ 时模型退化为标准 t 分布.

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu - 2)\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu - 2}\right)^{-\frac{\nu + 1}{2}} \quad (6)$$

原始文献中 [8] 设定冲击响应函数为二次型形式

$$\tau(z_i) = d_1 z_i + d_2 (z_i^2 - 1) \quad (7)$$

其自然拓展是放松函数的幂指数, 让数据决定合适的幂次

$$\tau(z_i) = d_1 z_i + d_2 (|z_i|^d - C(\nu, \zeta, d)) \quad (8)$$

其中 $C(\nu, \zeta, d) = E(|z_i|^d)$ 对于给定的分布是个常数. 由于测量方程有常数项, 函数设定中真正起作用的部分是 $\delta_1 z_i + \delta_2 |z_i|^d$. 易见, 这一部分并不随模型中误差分布的选取不同而发生本质变化.

为构建分布相依的冲击响应函数, 将 GAS 模型的思想运用到 GARCH 模型上, 设残差分布为 $f(z_i, h_i)$, 并将 h_i 视为数据驱动的时变系数. 构建 h_i 的对数似然函数

$$L = \ln f(z_i, h_i) \quad (9)$$

求解 MLE 的 Fisher Scoring 算法自然给出了系数 h_i 的更新方程

$$h_{i+1} = h_i + E(-L''(z_i, h_i))^{-1} L'(z_i, h_i) \quad (10)$$

$$= h_i + g(z_i, h_i)$$

如果误差服从标准 t 分布, 方差方程式为对数线性形式 $r_i = \exp(h_i/2) z_i$, 其中 z_i 是标准 t 分布. 按照式 (10) 的算法

$$\ln p(r_i | h_i) \propto \frac{h_i}{2} + \frac{\nu + 1}{2} \ln \left(1 + \frac{r_i^2}{(\nu - 2) e^{h_i}}\right) \quad (11)$$

$$\nabla_i = \frac{\partial \ln p(r_i | h_i)}{\partial h_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\nu + 1) r_i^2}{(\nu - 2) e^{h_i} + r_i^2} - 1 \right] \quad (12)$$

由标准 t 分布定义, $r_i = e^{h_i/2} \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} \varepsilon_i$, 其中

ε_i 服从 t 分布. 从而

$$b_i \equiv \frac{\nu r_i^2}{(\nu - 2) e^{h_i}} \sim F(1, \nu)$$

从而

$$\frac{r_i^2}{(\nu - 2) e^{h_i} + r_i^2} = \frac{b_i/\nu}{1 + b_i/\nu} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad (13)$$

由 Beta 分布性质有

$$S_i = E(\nabla_i \nabla_i)^{-1}$$

$$= \left[\frac{(\nu + 1)^2}{4} \frac{\nu/4}{(1/2 + \nu/2)^2 (1/2 + \nu/2 + 1)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{2(\nu + 3)}{\nu} \quad (14)$$

从而 GAS 更新项为

$$g(z_i, h_i) = \nabla_i S_i$$

$$= \left(1 + \frac{3}{\nu}\right) \left[\frac{(\nu + 1) z_i^2}{(\nu - 2) + z_i^2} - 1 \right] \quad (15)$$

由于小括号内的系数不依赖于 h_i , 从而不妨设更新项为

$$g(z_i, h_i) = \frac{(\nu + 1) z_i^2}{(\nu - 2) + z_i^2} - 1, (\nu > 2) \quad (16)$$

由于 $g(z_i, h_i)$ 可以写成 Beta 分布, 因此应用这种函数形式进行更新的 GARCH 模型又被称为 Beta- t -GARCH^[10]. 当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, 误差分布趋向正态分布, 此时亦有 $g(z_i, h_i) \rightarrow z_i^2 - 1$, 即模型退化称为原始的 Realized GARCH 模型. 也就是说, 只有当误差是正态分布时, 二次型冲击响应函数才有其合理性. 类比原始模型冲击响应函数的设定方式, 可以写出适用于标准 t 分布的 GAS 型冲击响应函数

$$\tau(z_i) = d_1 \sqrt{\frac{\nu + 1}{\nu - 2 + z_i^2}} z_i + d_2 \left[\left(\frac{\nu + 1}{\nu - 2 + z_i^2} \right) z_i^2 - 1 \right] \quad (17)$$

虽然 GAS 型冲击响应函数的幂指数设定仍然为

2,但是由于系数随着冲击绝对值增大而减小,最终效果和二次型设定是不同的.从下面的模拟可以看出,式(17)定义的冲击响应强度明显比二次型低.

针对 Skewed- t 分布计算过程略微复杂,这里给出简要的步骤:

对于 $z < -\frac{a}{b}$

$$\ln p(r_t | h_t) \propto -\frac{h_t}{2} - \frac{v+1}{2} \times \ln\left(1 + \frac{1}{v-2} \left(\frac{bz_t(h_t) + a}{1-\zeta}\right)^2\right) \quad (18)$$

注意到 $r_t = e^{h_t/2} z_t$, 有

$$\frac{\partial z_t(h_t)}{\partial h_t} = -\frac{r_t}{2} e^{-h_t/2} = -\frac{z_t}{2}$$

从而有

$$g(z_t, h_t) = \frac{(v+1)(bz_t+a)bz_t}{(v-2)\{1 + [2I(z_t \geq -a/b) - 1]\zeta\}^2 + (bz_t+a)^2} - 1 = \psi(v, \zeta, a, b, z_t)(bz_t^2 + az_t) - 1 \quad (20)$$

相应地,冲击响应函数可以写成

$$\tau(z_t) = d_1 \sqrt{\psi(v, \zeta, a, b, z_t)}(bz_t + a) + d_2 [\psi(v, \zeta, a, b, z_t)(bz_t^2 + az_t) - 1] \quad (21)$$

虽然 Realized GARCH 模型和随机波动率 (stochastic volatility) 模型一样拥有两个随机冲击,但是由于已实现测度的存在,模型参数依然可由极大似然估计 (maximum likelihood estimation) 得到. 由于 $z_t \perp u_t$, 对数似然函数可以分成两部分

$$l(r; x; \theta) = \sum_{t=1}^T \ln\left(\frac{f(z_t | h_t)}{\sqrt{h_t}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma_u^2) + \frac{u_t^2}{\sigma_u^2}\right) \quad (22)$$

其中, $f(z_t | h_t)$ 是收益率残差的条件分布; r 是收益率数据; x 是对数已实现核估计序列; θ 是参数向量; h_t 由式(2)计算可得.

本文使用沪深 300 指数 2006-03-22 到 2011-03-11 共 1 200 个交易日 1 min 的高频数据估计不同的模型,收益率计算方式使用常用的

$$\frac{\partial \ln p(r_t | h_t)}{\partial h_t} = -\frac{1}{2} - \frac{v+1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{v-2} \left(\frac{bz_t(h_t) + a}{1-\zeta}\right)^2\right)^{-1} \times \left(-\frac{z_t}{2} \frac{2}{v-2} \left(\frac{bz_t + a}{1-\zeta}\right) \frac{b}{1-\zeta}\right)$$

化简得到

$$\nabla_t = \frac{1}{2} \left[\frac{(v+1)bz_t(bz_t+a)}{(v-2)(1-\zeta)^2 + (bz_t+a)^2} - 1 \right] \quad (19)$$

对于 $z \geq -a/b$, 计算过程完全一致,仅需将 $1-\zeta$ 替换为 $1+\zeta$ 即可. 由 Score 函数的形式, $E(\nabla_t) = 0$, 从而

$$S_t = E(\nabla_t \nabla_t')^{-1} = \text{Var}(\nabla_t)^{-1}$$

其中求期望的随机变量为 z_t . 故 S_t 中不包含 z_t 项. 从而 GAS 更新项完全由 ∇_t 决定. 由此可以得到相应的 $g(z_t, h_t)$ 表达式

“收盘价-收盘价”收益率 (r_{cc}). 数据的本统计量如表 1.

模型估计结果见表 2,不同模型标注意义如下: N 代表使用正态分布的模型, T 代表使用 t 分布的模型, ST 代表使用 Skewed- t 分布的模型, s 表示使用 GAS 型冲击响应函数的模型, d 表示使用放松幂指数型冲击响应函数的模型,未标注 s 或 d 的表示使用二次型冲击响应函数的模型. 为节约空间,没有给出参数 ω, ξ, σ_u 的具体结果. 从结果上看, γ 在 0.4 左右, β 在 0.5 左右. 对比传统的 GARCH 模型估计结果中 GARCH 项系数远小于 ARCH 项系数的常见结果,此处明显变大的 γ 显示出已实现测度的在波动率预测中重要性. $\phi \approx 1$ 显示本文将 Realized GARCH 模型中的方程(3)称为测量方程是有意义的. $d_1 < 0, d_2 > 0$ 显示出的杠杆效应和文献中的一致,负向冲击导致波动率上升幅度比正向大. 幂指数 $d < 2$ 显示二次型设定反应过度. 使用 GAS 型冲击响应函数的模型其自由度大于使用二次型设定和放松幂指数设定的模型.

表 1 数据基本统计量
Table 1 Basis statistics for data

统计量	均值	中位数	方差	偏度	超额峰度
r_{cc}	0.082	0.248	2.098	-0.447	2.215
RK	3.322	2.032	3.861	4.070	30.056

表 2 不同模型参数估计结果
Table 2 Parameter estimations for different models

模型	β	γ	ϕ	d_1	d_2	d	v	ζ	$l(r; \theta)$
(N)	0.516 (0.036)	0.394 (0.028)	1.047 (0.018)	-0.17 (0.195)	0.067 (0.034)	-	∞	-	2 087.88
(N, d)	0.518 (0.692)	0.396 (0.814)	1.036 (1.249)	-0.174 (3.305)	0.101 (1.522)	1.645 (0.335)	∞	-	2 088.97
(T)	0.508 (0.018)	0.424 (0.034)	0.993 (0.036)	-0.169 (0.236)	0.067 (0.029)	-	8.001 (0.333)	-	2 106.75
(T, d)	0.51 (0.032)	0.427 (0.024)	0.979 (0.032)	-0.173 (0.019)	0.102 (0.026)	1.632 (0.252)	7.976 (1.967)	-	2 107.98
(T, s)	0.508 (0.018)	0.433 (0.022)	0.967 (0.090)	-0.181 (0.047)	0.103 (0.042)	-	11.37 (0.929)	-	2 107.06
(ST)	0.51 (0.312)	0.409 (0.149)	1.023 (0.181)	-0.172 (0.105)	0.069 (0.013)	-	7.84 (15.537)	-0.224 (0.131)	2 124.85
(ST, d)	0.512 (0.477)	0.412 (0.773)	1.011 (0.574)	-0.176 (0.520)	0.104 (0.527)	1.642 (0.337)	7.826 (1.315)	-0.223 (0.319)	2 125.98
(ST, s)	0.506 (0.027)	0.42 (0.051)	1.002 (0.032)	-0.209 (0.055)	0.117 (0.016)	-	11.409 (1.415)	-0.23 (0.090)	2 127.72

注: 括号里面是标准误, 未列出 (N, s) 是因为其与 (N) 等价。

按照模型估计的结果以 t 分布 Realized GARCH 模型为基础绘制了不同函数设定下的波动率对于收益率的冲击响应曲线, 结果如图 1。图中虚线是原始的二次型冲击响应函数的曲线, 点线是放松幂指数型冲击响应函数的曲线, 实线是 GAS 型冲击响应函数的曲线。从结果上看, 原始设定的冲击响应是最强的, 放松幂指数的模型冲击相应稍弱, 这和估计结果中系数 $d < 2$ 是对应的。GAS 型冲击响应函数对极端冲击的响应比另两种设定都弱, 这是因为和正态分布相比, 同样的冲击对于厚尾分布而言并不如对于正态分布而言那么“极端”, 因此模型的反应亦不需要如正态分

布那般强烈。

图 2 给出了沪深 300 指数对数波动率(用已实现核估计计算)与滞后一期的收益率之间的关系。除散点图外, 为刻画两者之间的关系, 对两者进行非参数回归, 结果见图 2 中实线^⑧。作为对比, 将二次曲线拟合的结果以虚线形式给出。可见, 对于沪深 300 指数而言, 在极端收益率情况下二次曲线型的冲击响应函数与实际数据表现差距较大。非参数曲线和图 1 中的 GAS 型冲击响应函数更接近, 进一步说明对 Realized GARCH 模型的改进是有意义的。

^⑧ 使用的是局部多项式平滑方法(local polynomial regression)。使用非参数方法而不是参数方法(如多项式拟合方法), 目的是为了 avoid 多项式拟合方式带来的对拟合曲线设定的依赖。

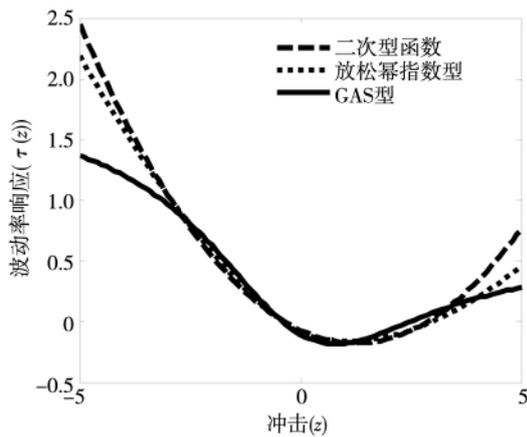


图1 不同设定的冲击响应函数

Fig. 1 Impulse responds function for different settings

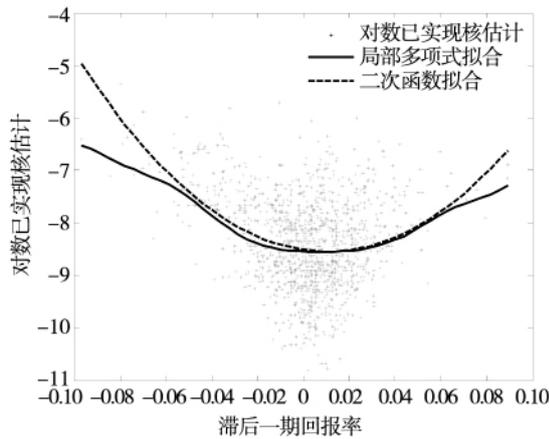


图2 对数已实现核估计与滞后一期回报率关系的非参数回归

Fig. 2 Nonparametric regression with ln(RK) on first order lagged returns

2 与标准 Realized GARCH 模型的实证效果比较

前面的讨论给出了与厚尾分布相适应的 Realized GARCH 模型设定,从最后的示意图上看,不同冲击响应函数的区别越到极端冲击情况越明显.由于 VaR 的预测特别依赖于模型产生分布的尾部性质,因此以 VaR 预测为例讨论不同冲击响应函数设定下,Realized GARCH 模型的表现.使用的数据同上一节,即沪深 300 指数从 2006 - 03 - 22到 2011 - 03 - 11 共 1 200 个交易日的高频数据^⑨.本文将数据分为两段,使用后面的 800 个数据点做样本外评价,预测下一期 VaR 使用的

模型参数由截止到当期为止的 400 个交易日的数据进行估计.虽然统计上看收益率的长期均值并不显著异于零,但是在预测短期 VaR 的时候均值仍然是重要的影响因素.这里对于均值的处理方式是将日收益率的均值设为 22 日移动平均值,直观地讲,这种处理方式假设了指数存在一个月的动量.这里并没有直接在均值方程式里加入常数项,而是从收益率数据中减去收益率的 22 日移动平均值后再估计模型参数.理由是:为了准确估计参数,应该选择相应长一些的数据,但是收益率长期看基本是零,对于日收益率均值的影响更主要的来自于短期内的信息.

本文使用的评价方法是 VaR 预测评价中常用的“失败频率”方法^[14].具体操作如下:

1) 对于 $t = i$,使用 $t \in [i - 400, i - 1]$ 的样本估计模型自由度参数 v_i ,偏斜参数 ζ_i ,并进行一步预测得到 h_i .

2) 使用 v_i, ζ_i, h_i 和给定的临界水平 α 计算出 $VaR_i(\alpha)$

$$VaR_i(\alpha) = \mu_i + F_{ST}^{-1}(\alpha; v_i, \zeta_i) \sqrt{h_i} \quad (23)$$

其中 $\mu_i = \sum_{t=i-22}^{i-1} \frac{r_t}{22}$.

3) 令 $V_i = I\{r_i > VaR_i\}$,向前一步并回到步骤 1) .

一个好的 VaR 预测值应该使得经验失败率 (empirical failure rate, EFR) 等于计算时设定的临界水平 α .由于事件 V_i 服从两点分布,故可对如下零假设 $H_0 : V_i \sim \text{Binomial}(\alpha)$ 构建似然比统计量

$$LR = 2\ln\left(\frac{(EFR)^{N_f}(1 - EFR)^{N - N_f}}{\alpha^{N_f}(1 - \alpha)^{N - N_f}}\right) \sim \chi^2(1) \quad (24)$$

其中 $N_f = \sum V_i, EFR = N_f/N$.

表 3 给出了 VaR 计算中常用的 3 个临界水平(10%, 5%, 1%)的结果,包括经验失败率,对应的似然比统计量,以及似然比统计量对应的 p 值. p 值衡量了模型的经验失败率和设定的理论失败率的差距, p 值越大,差距越小.不同模型标注意义和上一节一致.

⑨ 从图 1 中可见,放松幂指数型冲击响应函数与二次型冲击响应函数的差别并不大,因此没有再单独给出前者的 VaR 预测评价.

表 3 不同 Realized GARCH 模型一步 VaR 预测

Table 3 One step VaR forecast for different Realized GARCH models

$\alpha = 0.1$			
模型	经验失败率	似然比	p 值
(N)	0.095	0.226	0.635
(T)	0.106	0.341	0.559
(T ρ)	0.106	0.341	0.559
(ST)	0.096	0.126	0.722
(ST ρ)	0.098	0.056	0.813
$\alpha = 0.05$			
模型	经验失败率	似然比	p 值
(N)	0.063	2.447	0.118
(T)	0.064	2.941	0.086
(T ρ)	0.063	2.447	0.118
(ST)	0.054	0.231	0.631
(ST ρ)	0.054	0.231	0.631
$\alpha = 0.01$			
模型	经验失败率	似然比	p 值
(N)	0.020	6.262	0.012
(T)	0.018	3.715	0.054
(T ρ)	0.018	3.715	0.054
(ST)	0.008	0.553	0.457
(ST ρ)	0.011	0.121	0.728

不同风险水平之下,使用 Skewed- t 分布的模型总拥有最大的 p 值,并且一直不能拒绝零假设,说明 Skewed- t 分布模型的一步 VaR 预测能力最强。相比之下标准 t 分布模型的预测能力要弱一些,有时候甚至比使用正态分布的模型还差。这说明对于分位数预测,特别是对尾部分位数的预测而言,单独使用厚尾分布可能是不够的,分布的偏

态也需要特别考虑。不同冲击响应函数设定对于结果有影响,特别是在极端情况下的结果影响显著。使用 GAS 型冲击响应函数的模型其预测能力比使用二次型函数设定的模型强。在 1% 临界水平上,使用 GAS 型冲击响应函数的模型比使用二次型函数的模型其精度有显著提高,误差从 2.5% 下降到 1.3%。这说明在建模中,使用厚尾分布的同时应该辅以相应的分布相依的冲击响应函数以获得更好的结果。

3 结束语

为了进一步拟合收益率分布常见的厚尾性质,GARCH 类模型建模时往往以厚尾分布作为误差分布。然而,厚尾分布下采用与正态分布相同的模型结构会导致模型对收益率的冲击响应过度。为了解决这个问题,本文在 GAS 模型框架下以 t 分布和 Skewed- t 分布为例讨论了 Realized GARCH 模型合理的冲击响应函数设定,从而得到了 Realized GARCH 模型族内的一类新模型——Realized GAS-GARCH,完善并发展了基于厚尾分布的 Realized GARCH 模型^[9]。对于厚尾分布而言,新模型中波动率对收益率极端冲击的响应比单纯改动误差分布的模型要弱。为了验证改进模型的尾部性质,使用沪深 300 指数数据进行了 VaR 预测的简单实证。结果显示,对于极端风险值的预测,使用 Skewed- t 分布的新模型精度最高。

参考文献:

- [1] Andersen T G, Bollerslev T, Diebold F X, et al. Modeling and forecasting realized volatility [J]. *Econometrica*, 2003, 71 (5): 579 - 625.
- [2] Hansen P R, Lunde A. Forecasting Volatility Using High Frequency Data [M] // Clements M P, Hendry D F. *Oxford Handbook of Economic Forecasting*, Oxford University, 2011.
- [3] 陶利斌, 方兆本, 潘婉彬. 中国股市高频数据中的周期性和长记忆性 [J]. *系统工程理论与实践*, 2004, (6): 26 - 32.
Tao Libin, Fang Zhaoben, Pan Wanbin. The intraday periodicity and long-memory characters in high-frequency data of China stock market [J]. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2004, (6): 26 - 32. (in Chinese)
- [4] 文凤华, 刘晓群, 唐海如, 等. 基于 LHAR-RV-V 模型的中国股市波动性研究 [J]. *管理科学学报*, 2012, 15(6): 59 - 67.
Wen Fenghua, Liu Xiaoqun, Tang Hairu, et al. Research on China's stock market fluctuations based on LHAR-RV-V model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2012, 15(6): 59 - 67. (in Chinese)

- [5]徐正国,张世英. 调整“已实现波动率”与 GARCH 及 SV 模型对波动的预测能力的比较研究[J]. 系统工程,2004,22(8):60-63.
Xu Zhengguo,Zhang Shiyong. The comparative research on volatility prediction ability of adjusted realized volatility,GARCH model and SV model[J]. Systems Engineering,2004,22(8):60-63.(in Chinese)
- [6]于亦文. 实际波动率与 GARCH 模型的特征比较分析[J]. 管理工程学报,2006,20(2):65-69.
Yu Yiwen. A comparative analysis of realized volatility and GARCH model[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management,2006,20(2):65-69.(in Chinese)
- [7]魏 宇. 沪深 300 股指期货的波动率预测模型研究[J]. 管理科学学报,2010,13(2):66-76.
Wei Yu. Volatility forecasting models for CSI300 index futures[J]. Journal of Management Sciences in China,2010,13(2):66-76.(in Chinese)
- [8]Hansen P R,Huang Z,Shek H H. Realized GARCH: A complete model of returns and realized measures of volatility[J]. Journal of Applied Econometrics,2012,27(6):877-906.
- [9]王天一,黄 卓. 高频数据波动率建模:基于厚尾分布的 Realized GARCH 模型[J]. 数量经济技术经济研究,2012,(5):149-161.
Wang Tianyi,Huang Zhuo. High frequency volatility modeling: Realized GARCH model with fat-tail distribution[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics,2012,(5):149-161.(in Chinese)
- [10]Harvey A C,Chakravarty T. Beta-t-(E) GARCH[R]. Cambridge Working Papers in Economics,2008.
- [11]Creal D,Koopman S J,Lucas A. Generalized autoregressive score models with applications[J]. Journal of Applied Econometrics,2013,28(5):777-795.
- [12]Barndorff-Nielsen O E,Hansen P R,Lunde A,et al. Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise[J]. Econometrica,2008,76(6):1481-1536.
- [13]Hansen B. Autoregressive conditional density estimation[J]. International Economic Review,1994,35(3):705-730.
- [14]Kupiec P H,Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models[J]. The Journal of Derivatives,1995,3(2):73-84.

Realized GAS-GARCH model and its application in Value-at-Risk forecast

WANG Tian-yi¹,HUANG Zhuo^{2*}

1. School of Banking and Finance, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China;
2. National School of Development, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract: This paper proposed a new volatility model-Realized GAS-GARCH, and derived its Quasi-MLE estimator for the model parameters. In the light of Generalized Autoregressive Score (GAS) model^[3], this paper extended Realized GARCH model^[6] to fat-tail distribution with an appropriated distribution dependent impulse response function. Compared with the simple distribution modification, the current model is more robust to extreme returns. Empirical results from HuShen 300 high frequency data show that the Realized GARCH model with GAS impulse response function outperforms traditional Realized GARCH structure with fat-tail distributions.

Key words: Realized GARCH; impulse response function; fat-tail; VaR