第18卷第7期
2015年7月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 18 No. 7
Jul. 2015

投资组合保险策略收益保证的定价研究①
——基于有限跳跃 Levy 过程

张 飞[1,2]，刘海龙[1]
(1. 上海交通大学安泰经济与管理学院，上海 200052; 2. 中国金融期货交易所研发部，上海 200122)

摘要: 向下的价格跳跃会引致投资组合保险出现缺口风险，因而将价格跳跃考虑在内对收益保证类金融产品保本费用的定价研究对于为该类产品进行担保的机构具有重要的决策参考价值. 文章采用有限跳跃 Levy 过程来刻画风险资产的价格过程，并对随机利率条件下 CPPI 策略与 TIPP 策略收益保证进行定价. 文章给出了固定混合策略下收益保证的解析定价公式. 数值分析的结果表明: (1) 传统 GBM 假定下的收益保证定价会低估收益保证的价格; (2) TIPP 策略收益保证的价格要低于 CPPI 策略; (3) CPPI 策略与 TIPP 策略收益保证的价格与策略乘数、收益保证水平正相关，与风险资产价格的波动率无关.

关键词: CPPI 策略; TIPP 策略; 有限跳跃 Levy 过程; 收益保证; 缺口风险
中图分类号: F830.59　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2015)07-0082-11

0 引 言

投资组合保险(portfolio insurance，PI)是一类动态投资组合管理技术，它使得投资者的投资组合在投资期限到期时或期间某一时点的价值不低于某个事先设定的值(通常是投资期初资产价值的某个百分比). 由于 PI 策略为投资者实现既定保值目标提供了易于操作的工具而为广大投资者尤其是机构投资者所青睐. 基于期权的投资组合保险(option-based portfolio insurance，OBPI)策略与固定比例投资组合保险(constant proportion portfolio insurance，CPPI) 策略是最常用的两种 PI 策略，为市场中大多数收益保证类金融产品，如保本基金、银行结构化理财产品、保险类理财产品等，所采用[1-4]. 例如，据刘海龙等[5]的统计，我国 20 只保本基金中有 19 只采用 CPPI 策略作为自身资产配置的唯一或主要策略. OBPI 策略常常需要运用标的资产来复制所需的期权，考虑到新兴金融市场中存在诸多交易限制，如融资成本较高、禁止卖空或允许卖空的证券品种非常有限以及卖空成本高昂等问题，该策略的运用非常有限. 尽管 CPPI 策略具有简单、可控以及富有灵活性等优点，该策略只能对本金进行保护，而未能对投资期内的收益或资本利得进行保护. 针对 CPPI 策略的不足，学者们在该策略的基础上相继提出了一些改进策略，最流行的当属 Estep 和 Kritzman[6]提出的时间不变投资组合保护(time-invariant portfolio protection，TIPP) 策略. TIPP 策略提出应该在市场处于上升行情中提高策略价值底线(floor) 以便对投资期间的收益进行保护. 收益保证类金融产品的投资者常常要向产品的发行机构或管理机构缴纳一定比例的管理费和保本费. 保本费是第三方提供到期偿付能力担保的费用，该费用可视为收益保证服务的市场价格. 不管对收益保证进行担保的机构还是对收益保证产品的投资者而言，如何确定一个合适的保本费用(率)是一个十

① 收稿日期: 2012-11-27; 修订日期: 2015-04-19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71273169).
作者简介: 张 飞(1983—)，男，河南开封人，博士. Email: feizhang717@126.com

分重要的现实问题. 保本费率定的过低不足以补偿担保方所承担的风险,定的过高则会损害收益保证产品投资者的利益并降低产品的吸引力. 对收益保证服务的定价是否适当的评定则至少需要在理论上对收益保证服务提供一个定价基准. 对于通过采用 CPPI 策略与 TIPP 策略配置资产的收益保证产品而言,主要有两类因素会导致到期时投资组合市值低于期初设定的收益保证水平,即会诱发缺口风险(gap risk) : 非连续交易(discontinuous trading) 与资产价格向下跳跃(downward jump) [6-9]. 而缺口风险直接影响第三方提供偿付能力担保的费用并最终体现为较高的保本费率,因此更加贴近实际的定价研究必须考虑非连续交易与资产价格存在跳跃的情形.

连续时间市场环境下将价格跳跃考虑在内对 PI 策略进行的研究还非常少. Prigent 和 Tahar [10] 考察了 CPPI 策略的一个变体: 对缓冲额(cushion) 进行额外保险的情形,即每当投资组合的价值到达给定的底部水平(floor) ,投资者就会获得固定数额的支付. Prigent 和 Tahar [10] 给出了对缓冲额进行额外保险的价值,并将分析扩展到风险资产价格服从有限跳跃(finite-activity) Levy 过程的情形. 而 Cont 和 Tankov [8] 则在更为一般的情形下考察了 CPPI 策略的触底概率、期望损失以及损失的分布. Cont 和 Tankov [8] 证明了在风险资产价格存在跳跃情形下即便投资者可以连续交易,缺口风险总是存在的. 国内对 PI 策略的研究主要集中在策略绩效的实证评估上,如杜少剑等 [11] 、陈湘鹏等 [12] 、刘鹏和史本山 [13] 等. 王亦奇和刘海龙 [14] 在纯扩散模型假设下结合 CPPI 策略对多期收益保证的价值进行了测算. 目前还未看到在跳跃扩散模型假定下对 PI 策略进行研究的国内文献. 总体上,国内外对资产价格存在跳跃情形下的 PI 策略的研究还很少.

本文考察在随机利率金融市场中当风险资产价格存在有限跳跃情形下运用 CPPI 策略与 TIPP 策略配置资产时收益保证的定价问题,并考虑借款限制对收益保证定价的影响. 本文的研究是对 Cont 和 Tankov [8] 、王亦奇和刘海龙 [14] 等研究的扩展. Cont 和 Tankov [8] 未能考虑借款限制对收益保证价格的影响; 王亦奇和刘海龙 [14] 假定风险资产价格服从纯扩散模型因而未能考虑资产价格的跳跃对缺口风险进而对收益保证价格的影响. 本文的研究与另外一大类对收益保证价值进行测算的文献相联系但与后者又存在显著差别. 对收益保证价值的测算研究大多不考虑投资策略的选择对投资收益进而对收益保证价值的影响,即收益保证价值的测算与投资策略的运用是分离的. Chang 等 [15] 是该方面研究的一个新近例子. 由于综合考虑了资产价格跳跃、随机利率以及借款限制等对收益保证定价的影响,相对于已有的研究,本文对收益保证的定价研究更加贴近现实因而对现实市场中收益保证产品保本费用的确定具有更强的指导意义. 一方面,对于为收益保证产品提供担保的机构来说,本文的分析结果可以为其确定保本费用(率) 提供直接指导; 另一方面,不同策略下收益保证成本的比较结果可以为收益保证类金融产品的发行方或管理方选取合意的资产配置策略以及策略参数提供有力的指导. 而资产配置策略以及策略参数的选择可以控制向投资者收取的保本费用(率) 并最终增强产品的吸引力.

1　模　型

1.1　市场假定

假定无摩擦市场中有两种资产可供连续交易: 保守性资产(reserve asset) 与风险资产(active asset) . 根据 Black 和 Jones [2] 对保守性资产与风险资产的定义以及投资上的可操作性,本文选取货币市场账户作为保守性资产,选取股票作为风险资产. 假定风险资产在投资期内未派发股利或其他现金流. 货币市场账户过程 B_t 与风险资产的价格过程 S_t 分别由以下两个随机微分方程刻画

$$\mathrm{d}B_t = B_t r_t \mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\mathrm{d}S_t = S_{t-} \mathrm{d}L_t \tag{2}$$

其中 r_t 为市场瞬时短利率(instantaneous short rate of interest) ,L 是一个一维 Levy 过程,该过程定义在带流概率空间($\Omega, F, \{F(t)\}, P$) 上. P 表示真实世界概率测度. Levy 过程可分为有限跳跃(finite-activity) 与无限跳跃(infinite-activity) 两类,前者由于其简便性应用较为广泛. Merton [16] 提出的对数正态跳跃扩散(log-normal jump diffusion，LNJD) 模型与 Kou[17] 提出的双指数跳跃扩散 (double exponential jump diffusion，DEJD) 模型是理论与经验研究中最常用的有限跳跃 Levy 过程. 在 Levy 过程假定下，存在一个等价鞅测度(equivalent martingale measure) Q 使得贴现的资产价格过程为鞅过程. 值得注意的是，在本文设定的金融市场条件下，除非 L 为布朗运动，否则市场是不完备的，等价鞅测度也不是唯一的. 在业界的实际操作中，鞅测度的选择往往要根据期权的市场价格校准(calibration) 而得. 在等价鞅测度 Q 下，假定市场瞬时短利率 $r(t)$ 服从一个纯扩散模型

$$\mathrm{d}r_t = \mu(t, r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_r(t, r_t)\,\mathrm{d}W_t^r \tag{3}$$

其中 W^r 为 Q 测度下的标准一维维纳过程(Wiener process)，随机扩散项 $\mu(t, r_t)$ 与随机波动项 $\sigma_r(t, r_t)$ 满足惯常的技术假定.

为了考虑价格跳跃因素对收益保证价格的影响，本文采用有限跳跃 Levy 过程来对风险资产价格进行建模. 但出于比较的目的，本文将首先考察风险资产价格服从 GBM 过程情形下的收益保证的定价问题，该简单情形下的结果可以作为比较基准(benchmark) 以彰显价格跳跃风险的引入对收益保证价格的影响. 根据 Levy-Ito 分解公式，任何一个有限跳跃 Levy 过程均可表示为一个带漂移的布朗运动与有限个独立泊松过程之和相叠加的形式. 有关 Levy 过程分解的详细论述可参见 Sato[18] 及 Cont 和 Tankov[19]. 于是，在 Q 测度下，GBM 过程与有限跳跃 Levy 过程情形下的风险资产价格 S_t 分别满足

$$\mathrm{d}S_t = r_t S_t\,\mathrm{d}t + \sigma_S S_t\,\mathrm{d}W_t^S \tag{4}$$

$$\mathrm{d}S_t = [r_t - \lambda E^Q(K-1)]\,S_{t-}\,\mathrm{d}t + \sigma_S S_{t-}\,\mathrm{d}W_t^S + S_{t-}(K-1)\,\mathrm{d}N_t \tag{5}$$

其中 $\sigma_S > 0$ 为常数，W^S 为 Q 测度下的标准一维维纳过程，N_t 表示强度为 λ 的泊松过程，跳跃幅度(jump size or amplitude) 为 $K > 0\ Q-\text{a.e.}$，$E^Q(K) < \infty$，$\{K\}$ 独立同分布，且 W^r、W^S、N、K 相互独立. W^r 与 W^S、N、K 相互独立表明影响市场瞬时短利率变动的随机因素与影响风险资产价格的随机因素是相互独立的. 而 W^S 与 N、K 相互独立则表明引致风险资产价格在某些时点上发生大幅变动的随机因素与驱动股价连续变动的随机因素是独立的，该假定是跳跃扩散模型运用中的常规假定[16,17]. 本文的分析可以很容易地扩展到连续派发股利的情形. 在连续派发股利情形下，假定连续时间的股利率为 d，则在 Q 测度下风险资产价格过程应分别满足

$$\mathrm{d}S_t = (r_t - d)\,S_t\,\mathrm{d}t + \sigma_S S_t\,\mathrm{d}W_t^S \tag{6}$$

$$\mathrm{d}S_t = [r_t - d - \lambda E^Q(K-1)]\,S_{t-}\,\mathrm{d}t + \sigma_S S_{t-}\,\mathrm{d}W_t^S + S_{t-}(K-1)\,\mathrm{d}N_t \tag{7}$$

与不考虑股利的情形相比，二者只是漂移项稍有不同而已. 可见，连续派发股利情形下的研究除了分析上稍稍繁琐些以外，并未增加多少洞见(insight) .

1.2 投资组合模型

CPPI 策略的基本原理是将资产的一部分配置在保守性资产上并将剩余部分资产或者称为缓冲额(cushion) 加杠杆放大后投资在风险资产上，以期通过保守性资产取得本金的保护并通过风险性资产取得市场上升行情中的收益. CPPI 策略旨在对本金进行保护而未能对期间的收益进行保护. TIPP 策略则提出对 CPPI 的价值底线(floor) 进行修改，认为应在市场处于上升行情时调高价值底线而在市场处于下行行情中保持原有的价值底线. 假定投资期限为 T，投资期初的资金为 A_0，收益保证水平为 G. 策略的乘数记为 m，$m > 1$. TIPP 策略的底部百分比(floor percentage) 参数记为 f，$0 < f < 1$. 策略的投资组合市值过程记为 A_t^i，$i \in \{\mathrm{CPPI}, \mathrm{TIPP}\}$. 在时点 $t \in [0, T]$ 上，CPPI 策略的价值底线为

$$F_t^{CPPI} = F_0\, \mathrm{e}^{\int_0^t r_s \mathrm{d}s} \tag{8}$$

TIPP 策略的价值底线为

$$F_t^{TIPP} = f \cdot \max\{A_s^{TIPP}, 0 \leqslant s \leqslant t\} \tag{9}$$

两策略的缓冲额，C_t^i，皆为投资组合市值 A_t^i 与价值底线 F_t^i 之差，即

$$C_t^i = A_t^i - F_t^i, i \in \{\mathrm{CPPI}, \mathrm{TIPP}\} \tag{10}$$

当 $A_t^i \leqslant F_t^i$，所有资金均投资于保守性资产. 由于策略的自融资(self-financing) 性质，在本文的分析中有无借款限制等价于是否允许卖空保守性资产. 鉴于许多新兴金融市场中存在借款与卖空(国内称之为融资融券) 限制，或虽然逐步允许融资融券但融资的成本较高或融券证券品种受限，

对于在这些市场中实施 PI 策略的投资者而言，了解卖空或借款限制对 PI 策略的影响具有重要意义. 为了考察借款限制对收益保证价格的影响，本文分以下两种情形来讨论. 为表述的需要，引入记号 $\tau = \inf\{t: A_t^i \leqslant F_t^i, 0 < t \leqslant T\}$，$i \in \{\text{CPPI}, \text{TIPP}\}$. τ 表示投资组合市值 A_t^i 首次低于价值底线 F_t^i 的时间点.

1) 无借款限制(允许卖空保守性资产)

时点 $t \in [0,T]$ 上各策略投资在风险资产上的资金为

$$E_t^i = \begin{cases} m(A_t^i - F_t^i), \text{if } 0 \leqslant t < \tau Q - \text{a.s.} \\ 0, \text{if } t \geqslant \tau Q - \text{a.s.} \end{cases} \tag{11}$$

其中 $i \in \{\text{CPPI}, \text{TIPP}\}$. 由策略的自融资性质，不难得出 A_t^i 应满足

(i) 当 S_t 服从 GBM 过程时

$$dA_t^i = \begin{cases} r_t A_t^i dt + m(A_t^i - F_t^i)\sigma_S dW_t^S, \text{if } 0 \leqslant t < \tau Q - \text{a.s.} \\ r_t A_t^i dt, \text{if } t \geqslant \tau Q - \text{a.s.} \end{cases} \tag{12}$$

(ii) 当 S_t 服从有限跳跃 Levy 过程时

$$dA_t^i = \begin{cases} r_t A_{t-}^i dt + m(A_{t-}^i - F_{t-}^i)(\sigma_S dW_t^S + d\widetilde{Z}_t), \\ \quad \text{if } 0 \leqslant t < \tau Q - \text{a.s.} \\ r_t A_t^i dt, \text{if } t \geqslant \tau Q - \text{a.s.} \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\widetilde{Z}_t = \sum_{j=1}^{N_t}(K_j - 1) - \lambda t E^Q(K_j - 1)$ 为一带补偿的(compensated) 复合泊松过程.

2) 存在借款限制(禁止卖空保守性资产)，即要求 $m C_t^i \leqslant A_t^i$. 于是，时点 $t \in [0,T]$ 上投资在风险资产上的资金为

$$E_t^i = \begin{cases} \min\{m(A_t^i - F_t^i), A_t^i\}, \text{if } 0 \leqslant t < \tau Q - \text{a.s.} \\ 0, \text{if } t \geqslant \tau Q - \text{a.s.} \end{cases} \tag{14}$$

同样由策略的自融资性质，可得出 A_t^i 应满足

(i) 当 S_t 服从 GBM 过程时

$$dA_t^i = \begin{cases} r_t A_t^i dt + \min\{m(A_t^i - F_t^i), A_t^i\}\sigma_S dW_t^S, \\ \quad \text{if } 0 \leqslant t < \tau Q - \text{a.s.} \\ r_t A_t^i dt, \text{if } t \geqslant \tau Q - \text{a.s.} \end{cases} \tag{15}$$

(ii) 当 S_t 服从有限跳跃 Levy 过程时,

$$dA_t^i = \begin{cases} r_t A_{t-}^i dt + \min\{m(A_{t-}^i - F_{t-}^i), A_{t-}^i\} \times \\ \quad (\sigma_S dW_t^S + d\widetilde{Z}_t), \text{if } 0 \leqslant t < \tau Q - \text{a.s.} \\ r_t A_t^i dt, \text{if } t \geqslant \tau Q - \text{a.s.} \end{cases} \tag{16}$$

1.3　收益保证的定价

根据第 1.2 部分的假定，投资期末收益保证的支付(payoff) 为 $\max\{G - A_T^i, 0\}$，$i \in \{\text{CPPI}, \text{TIPP}\}$. 由该支付的表达形式不难看出，收益保证等同于一个欧式看跌期权. 但该看跌期权并非普通香草(plain vanilla) 型期权，因为投资组合的市值过程具有路径依赖性(path-dependency) . 由风险中性定价理论，该收益保证的价格为

$$C^i = E^Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right)\max\{G - A_T^i, 0\}\right], \quad i \in \{\text{CPPI}, \text{TIPP}\} \tag{17}$$

由方程(12) 与(13) 或方程(15) 与(16) 可以看出 A_t^i 的表达式是较为复杂的分段形式，这将无法得到收益保证价格的封闭解. 本文第 2 部分采用数值算例来揭示模型参数及借款限制对收益保证价格的影响. 当 CPPI 策略的乘数等于 1 时，对应的策略为买入持有(buy-and-hold，BH) 策略; 当 CPPI 策略的乘数介于 0 与 1 之间，且价值底线为 0 时，对应的策略为固定混合(constant-mix，CM) 策略，且 CM 策略在风险资产上的配置比例参数对应 CPPI 策略乘数. 由于本文假定随机利率与绝对收益保证，即便是在 BH 策略与 CM 策略下收益保证也无封闭形式的定价公式. 王亦奇和刘海龙[14] 文献中 CM 策略下封闭形式的定价公式依赖于其采用的盯住短利率 r_t 的相对收益保证的设定形式. 但应该注意到的是，我国金融市场中几乎所有的收益保证产品皆为单期绝对收益形式. 出于说明或示例的目的，本文提供单期相对收益保证设定下 CM 策略收益保证的封闭形式定价公式，如命题 1 与命题 2 所示②.

命题 1　假定金融市场的短利率 r_t 由式(3) 刻画，保守性资产价格 B_t 与风险资产价格 S_t 分别

② 命题 1 与命题 2 的证明主要基于策略的自融资性质，感兴趣的读者可联系作者索取.

满足式(1)与式(4). 假定初始资金为 A_0，以市场短利率 r_t 为参照来设定收益保证水平，其形式为 $\eta A_0 \int_0^T r_t \mathrm{d}t$，$0 < \eta < 1$. 则 CM 策略下收益保证的价格为

$$C_{GBM}^{CM} = \eta A_0 N(d_+) - A_0 N(d_-) \tag{18}$$

其中 $N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数，$d_\pm = \dfrac{\ln(\eta)}{m\sigma_S\sqrt{T}} \pm \dfrac{1}{2} m\sigma_S\sqrt{T}$.

命题 2　假定金融市场的短利率 r_t 由式(3)刻画，保守性资产价格 B_t 与风险资产价格 S_t 分别满足式(1)与式(5). 假定初始资金为 A_0，以市场短利率 r_t 为参照来设定收益保证水平，其形式为 $\eta A_0 \int_0^T r_t \mathrm{d}t$，$0<\eta<1$. 则 CM 策略下收益保证的价格为

$$C_{FL}^{CM} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^j}{j!} E^Q \left[\eta A_0 N(\tilde{d}_+) - \tilde{A}_0 N(\tilde{d}_-)\right] \tag{19}$$

其中 $N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数

$$\tilde{d}_\pm = \frac{\ln\left(\dfrac{\eta A_0}{\tilde{A}_0}\right) + \lambda m E^Q(K-1)T}{m\sigma_S\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2} m\sigma_S\sqrt{T} \tag{20}$$

以及

$$\tilde{A}_0 = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda m E^Q(K-1)T} \prod_{i=1}^{j} [m(K_i - 1) + 1] \tag{21}$$

2　数值分析

由于投资组合模型的复杂分段形式，无法得到各策略下收益保证封闭形式的定价公式. 本部分通过数值算例来揭示模型参数的变动以及借款限制对收益保证价格的影响. 本文数值分析的核心是模拟生成瞬时短利率 r_t 与投资组合市值 A_t^i 的若干路径. 连续时间金融市场中常用的短利率模型有 Vasicek 模型[20] 与 CIR 模型[21]. 由于 Vasicek 模型会产生与市场观测不符的负利率，故本文采用 CIR 模型来刻画市场短利率. CIR 模型下，r_t 服从如下平方根(square-root)过程

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(\beta - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_r \sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t^r \tag{22}$$

其中 $\alpha > 0$ 表示均值回复速率(mean-reverting rate)、$\beta > 0$ 表示短利率的长期均值(long-term mean)、$\sigma_r > 0$ 为波动率参数. 对于 $r(t)$ 路径的模拟，采用 Glasserman[22] 中的算法. 为了模拟 A_t^i 的路径，必须得给出跳跃幅度的具体概率分布. 由 Merton[16] 引入的 LNJD 过程是金融领域最早的跳跃扩散模型，该模型可解释经验研究中广泛存在的资产日收益率的非对称尖峰厚尾特征(asymmetric leptokurtic feature)与期权定价中的波动率微笑(volatility smile)现象，再加上其自身的简便性，该过程广泛应用于连续时间条件下的金融市场研究. 本部分便采用 LNJD 过程来对风险资产的价格进行模拟. 令 $Y = \ln(K)$. LNJD 过程下 Y 服从正态分布，其概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{23}$$

其中 μ，$\sigma > 0$ 分别为均值与方差参数. 不失一般性，假定期初投资额为 1 000，即 $A_0 = 1\,000$. 令投资期限为 1 年，即 $T = 1$，步长为 0.004，即每年模拟 250 个交易日观测，模拟产生 70 000 条样本路径③. 鉴于 A_t^i 的复杂表达形式，本文采用欧拉离散化(Euler discretization)方法来对其进行模拟. 模拟采用的参数值如表 1 所示. 值得注意的是，本文设定的模型包含较多参数，考察每一个参数的变动对收益保证价格的影响将费时且计算成本较高，这是由于相对于连续样本路径的随机过程而言，带跳随机过程假定下定价模型的数值计算往往需要模拟更多的样本路径才能得到收敛的结果. 由于收益保证水平 G、策略乘数 m，底部百分比参数 f 以及借款限制是影响收益保证价格的重要因素，本文数值模拟着重考察收益保证价格与这四个因素之间的关系. 由于 CPPI 策略收益保证所内嵌的看跌期权在本质上是一个波动率产品[8]，本文还将考察风险资产价格的波动率 σ_S 对收益保证价格的影响④.

③ 在实际操作中作者以 10 000 条样本路径为单位依次追加了样本路径数量，当样本路径数量达到 70 000 条时所得模拟结果已较为稳定.

④ 尽管价格跳跃分布的相关参数(包括 λ，μ 以及 σ)也影响收益保证的价格，但在给定投资对象的条件下，这些参数往往可以视为外生给定的. 相对而言可以人为设定的参数(收益保证水平参数 G、策略乘数参数 m 以及底部百分比参数 f)对收益保证价格的影响更为重要.

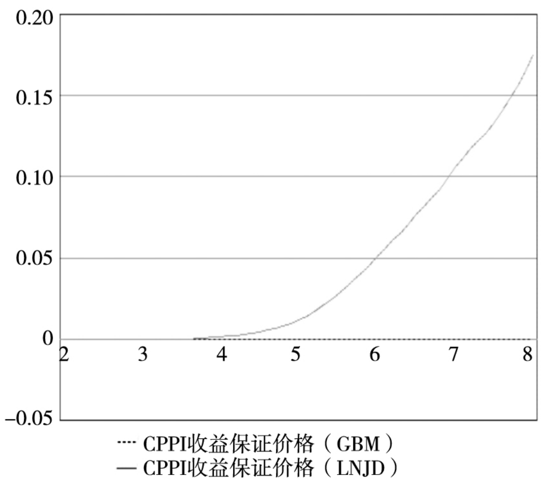
表 1　仿真参数值的设定

Table 1 Parameter values for simulation

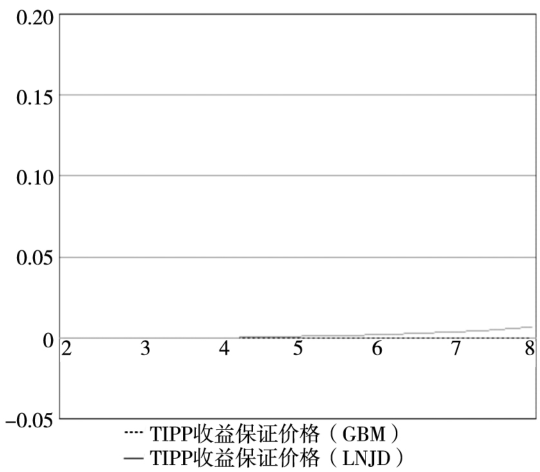
r_0	α	β	σ_r	σ_S	λ	μ	σ	A_0	G	m	F_0	f
0.04	0.15	0.05	0.10	0.20	20.00	0.00	0.10	1 000	900	6.00	900	0.90

2.1　收益保证价格与策略乘数

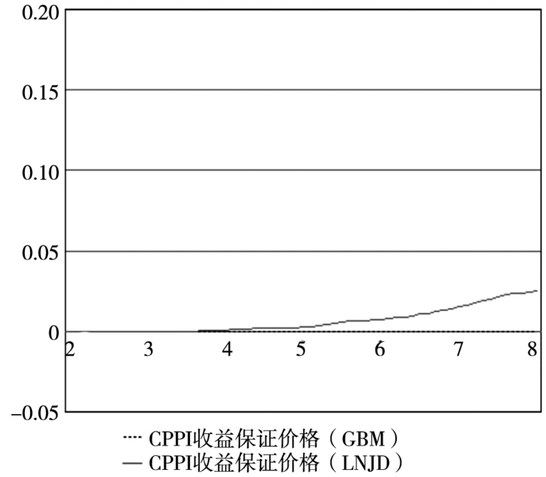
图 1 报告了 CPPI 与 TIPP 策略收益保证的价格(C^i, $i \in$ { CPPI, TIPP}) 与策略乘数(m) 之间的关系. 图 1(a) –(d) 的结果表明,无论是否存在借款限制,1) 风险资产价格连续变化时,CPPI 策略与 TIPP 策略皆不存在缺口风险,CPPI 策略与 TIPP 策略收益保证的价格皆为 0,策略乘数的变化不影响收益保证价格; 2) 风险资产价格存在跳跃时,CPPI 策略与 TIPP 策略收益保证的价格皆随着乘数的增大而上升; 3) 风险资产价格存在跳跃时,CPPI 策略与 TIPP 策略收益保证的价格均大于 GBM 假定下的价格,且二者之间的差异随着乘数增大而增加. 可见,传统 GBM 假定下对收益保证的定价研究低估了收益保证的缺口风险从而致使其定价偏低,而对收益保证估值偏低会损害对收益保证进行担保的机构的利益,因为其所收取的保本费不足以补偿其所承担的缺口风险. 当风险资产价格出现跳跃时,CPPI 与 TIPP 策略收益保证的价格会随策略乘数的提高而上升,且乘数越大其上升的越快. 这表明,乘数的选取是控制策略缺口风险进而控制收益保证价格的重要因素. 收益保证类金融产品的发行者或管理者可以通过选取适当的策略乘数来控制向投资者收取的保本费用以增强产品的竞争力. 将图 1(a) 与图 1(c) 进行比较不难看出,当风险资产价格连续变动时,借款限制对 CPPI 策略收益保证的缺口风险从而对收益保证的价格没有影响; 但当风险资产价格出现跳跃时,借款限制显著降低了 CPPI 策略收益保证的缺口风险,从而显著降低了收益保证的价格. 这比较容易理解: 当存在借款限制时,CPPI 策略投资于风险资产的头寸受到限制,从而投资组合对于价格向下跳跃的风险敞口受到抑制,收益保证所面临的缺口风险也会显著下降,最终收益保证的价格就会相应下降. 图 1(b) 与图 1(d) 的结果表明,不论价格是否存在跳跃,借款限制对 TIPP 策略收益保证的价格不产生影响. 由于 TIPP 策略的价值底线棘轮式上升(ratchet up) ,投资期内的收益或资本利得已经经由该机制导入到保守性资产中,从而投资于风险资产的比重已受到抑制,这使得借款限制对于 TIPP 策略的影响远不如像对 CPPI 策略那样显著. 将图 1(a) 与图 1(c) 分别与图 1(b) 与图 1(d) 进行比较,不难看出,TIPP 策略下收益保证的价格显著低于 CPPI 策略下的价格,至少从降低保本费用的角度来看,TIPP 策略要优于 CPPI 策略.



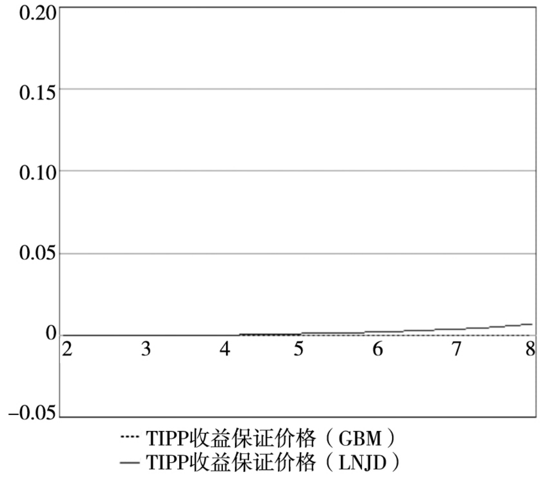
(a) 无借款限制



(b) 无借款限制



（c）有借款限制



（d）有借款限制

图 1　收益保证价格与乘数关系图

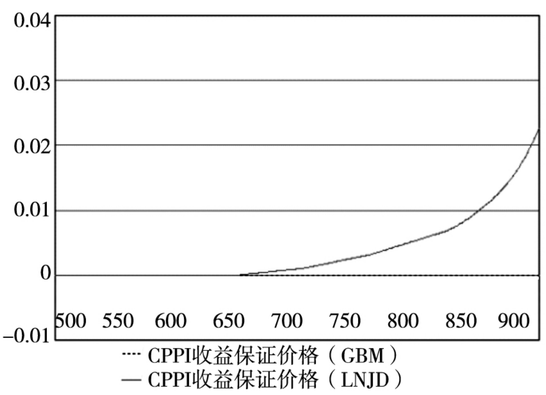
Fig. 1 Prices of the return guarantees and the multiple

2.2　收益保证价格与收益保证水平

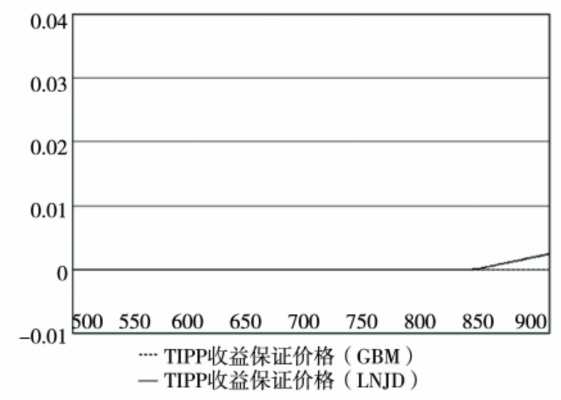
图 2 给出了 CPPI 与 TIPP 策略收益保证的价格（C^i，$i \in$ {CPPI，TIPP}）与收益保证水平（G）之间的关系. 从图 2（a）–（d）的结果可以看出，无论是否存在借款限制，当风险资产价格服从 GBM 过程时，TIPP 与 CPPI 策略收益保证的价格皆为 0，收益保证水平的变动对收益保证价格不产生影响；当风险资产价格服从 LNJD 过程时，TIPP 与 CPPI 策略收益保证的价格随着收益保证水平的上升而上升. 可见，其他条件保持不变，收益保证水平设定的越高，投资组合对于价格向下跳跃的风险暴露就越容易引致缺口风险，从而会使收益保证的价格上升. 将图 2（a）与图 2（c）的结果进行比较，不难看出，考虑借款限制后，LNJD 过程假定下 CPPI 策略收益保证的价格较不存在借款限制时明显下降，这是由于借款限制使得 CPPI 策略变得更为保守所致. 图 2（b）与图 2（d）的结果则反映出，借款限制对 TIPP 策略收益保证的价格与收益保证水平之间的关系未产生任何影响.

2.3　收益保证成本与风险资产波动率

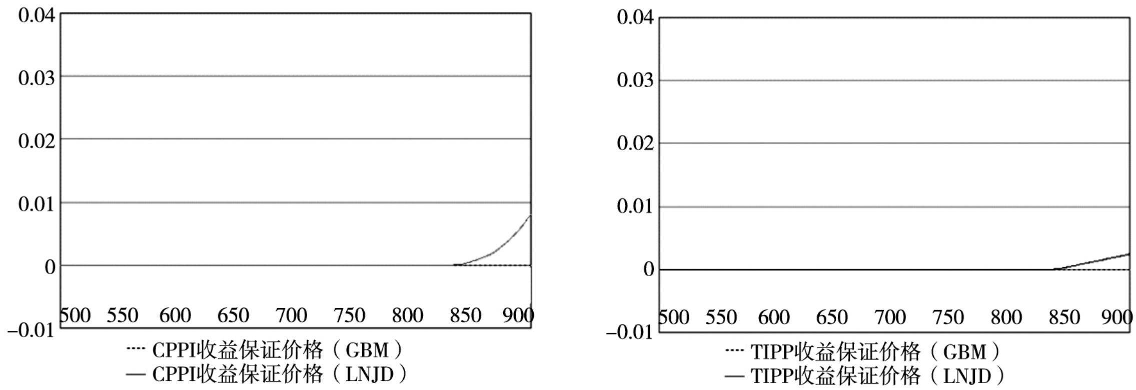
图 3 报告了风险资产价格波动率（σ_S）的变动对收益保证价格（C^i，$i \in$ {CPPI，TIPP}）的影响.



（a）无借款限制



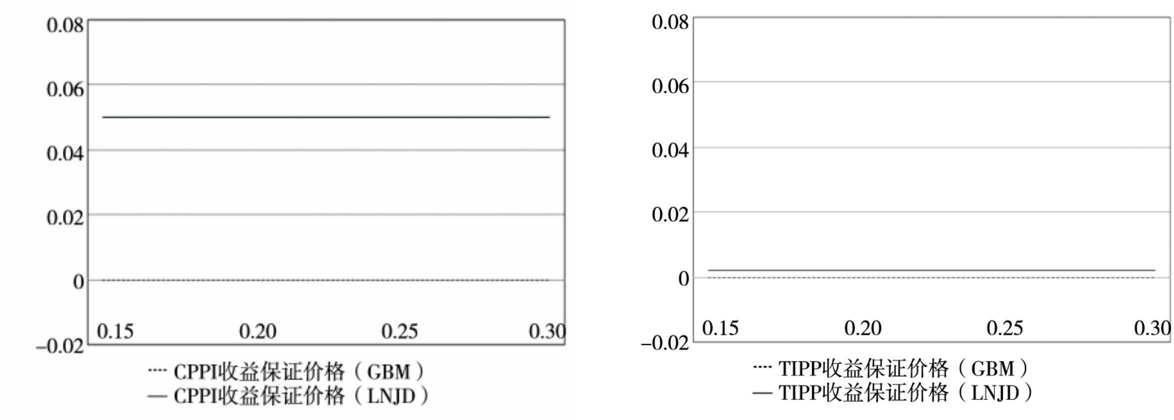
（b）无借款限制



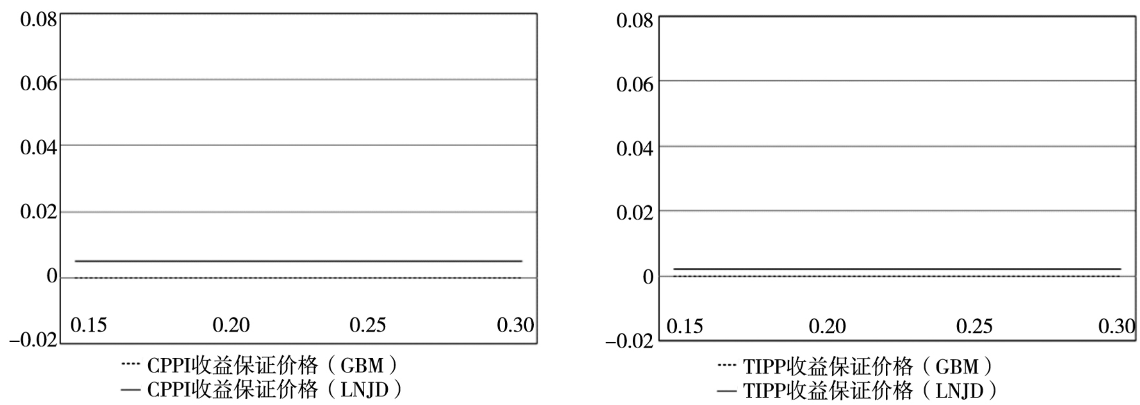
（c）有借款限制　　（d）有借款限制

图 2 收益保证价格与收益保证水平关系图

Fig. 2 Prices of the return guarantees and the guarantee level



（a）无借款限制　　（b）无借款限制



（c）有借款限制　　（d）有借款限制

图 3　收益保证价格与风险资产波动率关系图

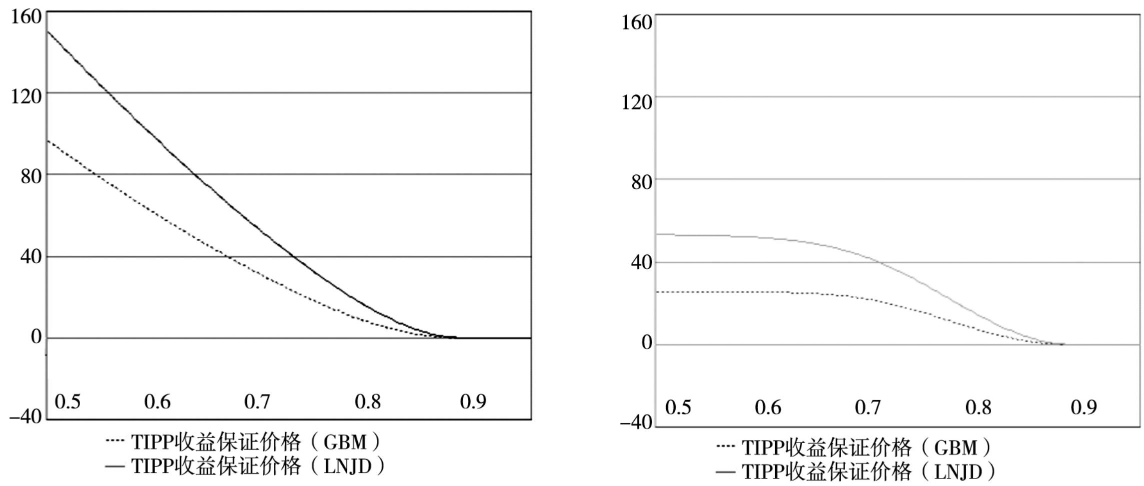
Fig. 3 Prices of the return guarantees and the volatility of the active asset price

从图 3（a）–（d）的结果来看，无论是否存在借款限制，（1）风险资产价格连续变动时，CPPI 与 TIPP 策略收益保证的价格均为 0，风险资产价格波动率参数的变动对收益保证价格不产生影响；（2）风险资产价格存在跳跃时，CPPI 与 TIPP 策略收益保证的价格均大于 0，并且 CPPI 与 TIPP 策略收益保证的价格不随风险资产价格波动率的变动而变动. 可见，如果风险资产价格是连续变动的，连续交易总可以使得投资组合的市值不低于价值底线，即连续交易可以化解风险资产价格的

连续波动所可能引致的缺口风险. 但当风险资产价格存在跳跃时，价格跳跃时点上连续交易也无法消除(向下的)价格跳跃所引致的缺口风险[9]. 本文假定风险资产价格的连续部分(布朗运动)与非连续部分(价格跳跃)是相互独立的，于是，从图 3(a)–(d)中两条曲线之间的差异可以清晰直观地反映出价格跳跃的引入对收益保证价格的影响.

2.4 收益保证成本与 TIPP 底部百分比参数

图 4 给出了 TIPP 策略收益保证的价格(C^{TIPP})与策略底部百分比参数(f)之间的关系.



(a) 无借款限制 (b) 有借款限制

图 4 TIPP 收益保证价格与底部百分比参数关系

Fig. 4 Price of the TIPP return guarantee and the floor percentage

图 4(a)与(b)的结果表明，TIPP 策略收益保证的价格与策略底部百分比参数呈负相关关系，且该关系不受借款限制与价格跳跃因素的影响. 给定策略乘数(m)与收益保证水平(G)条件下，TIPP 策略的风险敞口主要受底部百分比参数(f)的影响. 底部百分比参数(f)设定的越高，TIPP 策略配置在保守性资产上的资金比重就越大，配置在风险资产上的资金比重就越小，整个投资组合的风险敞口就越小，风险资产价格波动及价格跳跃所引致的缺口风险就越低，从而收益保证的价格就越低. 将图 4(a)与(b)的结果进行比较，可以看出，借款限制降低了 TIPP 策略收益保证的价格，且当底部百分比参数(f)越低时该效应越显著. 这不难理解: TIPP 策略底部百分比参数(f)设定的越低，TIPP 策略越激进(aggressive)，配置在风险资产上的比重更可能触及借款限制所规定的上限，借款限制的约束作用就越明显; 反之，TIPP 策略底部百分比参数(f)设定的越高，TIPP 策略越保守(conservative)，配置在风险资产上的比重越难有机会触及借款限制所规定的上限，借款限制的约束作用就越不明显.

从以上对图 1 – 图 4 的分析可以看出: (1) 考虑价格跳跃后的收益保证价格要高于传统 GBM 假定情形下的价格; (2) TIPP 策略收益保证的价格要低于 CPPI 策略; (3) CPPI 与 TIPP 策略收益保证的价格与策略乘数以及收益保证水平正相关，与风险资产价格波动率无关; (4) TIPP 策略收益保证的价格与策略底部百分比参数负相关; (5) 借款限制会显著降低 CPPI 策略收益保证的价格而对 TIPP 策略收益保证的价格影响相对较小.

3 结束语

本文考察了风险资产价格服从有限跳跃 Levy 过程情形下 CPPI 策略与 TIPP 策略收益保证的定价问题. 由于两策略下投资组合的复杂分段特征，无法得到收益保证封闭形式的定价公式. 本文以 CM 策略为例，给出了收益保证的解析定价公式. 对于 CPPI 策略与 TIPP 策略下的收益保证

定价问题,文章通过数值算例考察了策略乘数 m、收益保证水平参数 G、风险资产价格波动率参数 σ_S 以及底部百分比参数 f 的变动对收益保证价格的影响. 文章的研究结果对理论研究与业界实践都具有重要的启示或参考价值. 比如,本文的研究结果至少有以下几个方面的含义或启示: (1) 基于传统 GBM 假定的定价研究会低估收益保证的价格,因而会对为收益保证进行担保的第三方机构的利益造成损害; (2) 至少从降低保本费用(率) 的角度来说,TIPP 策略要优于 CPPI 策略; (3) 策略乘数的选择是控制收益保证缺口风险因而也是控制保本费用(率) 的关键所在,收益保证类金融产品的发行方与管理方可通过选取合适的乘数以便将保本费率控制在合意的范围内以增强产品的吸引力; (4) 在 CPPI 策略的运用中,借款限制或对保守性资产的卖空限制(或者是缺乏做空该资产的金融工具,如期货等) 可能会使购买保本类金融产品的投资者受益.

参 考 文 献:

[1] Perold A F. Constant Proportion Portfolio Insurance [R]. Boston: Harvard Business School, 1986.

[2] Black F, Jones R C. Simplifying portfolio insurance [J]. Journal of Portfolio Management, 1987, 14(1): 48 - 51.

[3] Leland H E, Rubinstein M. The Evolution of Portfolio Insurance [R] // Luskin D L. Portfolio Insurance: A Guide to Dynamic Hedging. New York: John Wiley and Sons, 1988.

[4] Leland H E. Who should buy portfolio insurance [J]. Journal of Finance, 1980, 35(2): 581 - 594.

[5] 刘海龙, 刘富兵, 杨继光. 社会保障基金资产配置策略研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
Liu Hailong, Liu Fubing, Yang Jiguang. Study of Asset Allocation Strategies of Social Security Funds [M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese)

[6] Estep T, Kritzman M. TIPP: Insurance without complexity [J]. Journal of Portfolio Management, 1988, 14(4): 38 - 42.

[7] Black F, Perold A F. Theory of constant proportion portfolio insurance [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1992, 16(3 - 4): 403 - 426.

[8] Bertrand P, Prigent J L. Portfolio insurance: The extreme value approach to the CPPI method [J]. Finance, 2002, 23(2): 69 - 86.

[9] Cont R, Tankov P. Constant proportion portfolio insurance in the presence of jumps in asset prices [J]. Mathematical Finance, 2009, 19(3): 379 - 401.

[10] Prigent J, Tahar F. CPPI with Cushion Insurance [R]. THEMA University of Cergy-Pontoise, Working Paper, 2005.

[11] 杜少剑, 陈伟忠, 刘元海. 投资组合保险策略的蒙特卡洛实证比较分析 [J]. 中国矿业大学学报, 2005, 34(3): 363 - 368.
Du Shaojian, Chen Weizhong, Liu Yuanhai. Empirical comparison and analysis of portfolio insurance strategies based on Monte Carlo simulation [J]. Journal of China University of Mining and Technology, 2005, 34(3): 363 - 368. (in Chinese)

[12] 陈湘鹏, 刘海龙, 钟永光. 中国证券市场上执行 OBPI 与 CPPI 策略比较研究 [J]. 系统工程理论方法应用, 2006, 15(6): 503 - 508.
Chen Xiangpeng, Liu Hailong, Zhong Yongguang. Portfolio insurance strategies OBPI versus CPPI based on Chinese securities market [J]. Journal of Systems and Management, 2006, 15(6): 503 - 508. (in Chinese)

[13] 刘　鹏, 史本山. 投资组合保险绩效评价——基于 VaR 和 ES 的实证研究 [J]. 西南交通大学学报(社会科学版), 2010, 11(4): 61 - 64.
Liu Peng, Shi Benshan. The empirical study about portfolio insurance performance: Based on VaR and ES [J]. Journal of Southwest Jiaotong University (Social Sciences), 2010, 11(4): 61 - 64. (in Chinese)

[14] 王亦奇, 刘海龙. 结合资产配置策略测算多期收益保证价值 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(11): 42—51, 62.
Wang Yiqi, Liu Hailong. Pricing multi-period return guarantees combined with asset allocation strategy [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(11): 42 - 51, 62. (in Chinese)

[15] Chang C C, Lien Y H, Tsay M H. Pricing dynamic guaranteed funds under a double exponential jump diffusion process [J]. Academic Economic Papers, 2012, 40(2): 269 – 306.

[16] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 125 – 144.

[17] Kou S G. A Jump-diffusion model for option pricing [J]. Management Science, 2002, 48(8): 1086 – 1101.

[18] Sato K. Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[19] Cont R, Tankov P. Financial Modelling with Jump Processes [M]. Chapman & Hall/CRC, 2003.

[20] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177 – 188.

[21] Cox J, Ingersoll Jr J, Ross S. A theory of the term structure of interest rates [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385 – 407.

[22] Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering [M]. Springer Verlag, 2004.

[23] Shreve S E. Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models [M]. Springer Verlag, 2004.

Pricing of rate of return guarantees under the management of portfolio insurance strategies: Models based on finite-activity Levy process

ZHANG Fei[1,2], *LIU Hai-long*[1]

1. Antai College of Economics and Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China;
2. R&D Department, China Financial Futures Exchange, Shanghai 200122, China

Abstract: Downward jumps in asset prices can trigger gap risk of portfolio insurance; it is more realistic to incorporate the impact of downward jumps in pricing the rate of return guaranteed products and is of great importance to the institutions insuring the return guarantees. This study employs finite-activity Levy processes to model the price process of active asset and prices the CPPI- and TIPP-managed return guarantees. As a result of the piecewise property of the underlying portfolios, analytic results cannot be obtained. For illustrative purposes, analytical pricing formulae are obtained for the constant-mix strategy. Our numerical results suggest that, (1) The return guarantees are undervalued under the traditional GBM assumption; (2) The TIPP-managed return guarantee is less expensive than its CPPI counterpart; (3) The prices of the return guarantees managed both by CPPI and by TIPP are positively correlated with the multiple and the guarantee level, but independent of the volatility of the active asset price.

Key words: constant proportion portfolio insurance (CPPI) strategy; time-invariant portfolio protection (TIPP) strategy; finite-activity Levy process; rate of return guarantee; gap risk