一种激励相容的多单位在线双边拍卖机制①

王雅娟[1]，王先甲[2]
(1. 武汉科技大学管理学院，武汉 430081; 2. 武汉大学经济与管理学院，武汉 430072)

摘要： 针对动态环境下诸如证券交易、计算网格资源分配、排污权交易等双边拍卖市场，研究了多单位在线双边拍卖机制. 首先描述了多个买家和多个卖家在任意时间进入和离开拍卖平台，且买家和卖家均可交易多单位同质物品的在线双边拍卖问题; 然后，针对该问题设计了多单位在线双边拍卖机制，进而，证明了该机制不仅满足个体理性，物质平衡和弱预算平衡，还能引导买卖双方报告真实的进入时间、离开时间和物品估值; 最后，通过算例验证了该机制的可行性和合理性.

关键词： 在线双边拍卖; 多单位; 激励相容; 个体理性; 物质平衡; 弱预算平衡
中图分类号： F724.59 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007-9807(2015)08-0001-11

0 引 言

在线拍卖是一种允许竞标人在任意时间到达拍卖平台投标并离开拍卖平台的市场机制，该机制必须在完全未知将来投标和决策序列的情况下，立即对当前投标做出分配和支付的决策[1]. 与传统的离线拍卖相比，以互联网为载体的在线拍卖不受时间和空间的限制，因而具有广阔的应用前景[2-4]. 在诸如证券交易、计算网格资源分配、排污权交易等在线拍卖实践中，存在多个买家和多个卖家，且拍卖标的为多单位同质物品，因此，设计符合上述特性的在线双边拍卖机制[5]显得尤为重要.

由于在线双边拍卖涉及不确定性，再加上“多对多”的市场结构，使在线双边拍卖机制设计更为复杂，其关键在于激励买卖双方报告真实的私有信息. Huang[6]和殷红[7]为简化问题，均假设买卖双方在统一的时间进入拍卖平台，从而设计了多单位在线双边拍卖机制，该机制可引导买卖双方披露其真实的物品估值. 考虑买卖双方在任意时间到达和离开拍卖平台的研究目前尚处在探索阶段. Blum[8]针对动态环境下买卖双方仅交易单位物品的双边拍卖市场，提出了满足激励相容的在线出清算法. Bredin[9]基于激励相容约束，对买卖双方仅交易单位物品的在线双边拍卖问题提出了一般性的框架. Wang[10]和Gerding[11]针对买卖双方交易单位可再用物品的情形，研究了在线双边拍卖机制. 文献[8-11]仅对买卖双方交易单位物品进行了研究，若考虑买卖双方交易多单位同质物品将导致更为复杂的激励问题和决策问题. Miyashita[12]假设买卖双方自愿报告真实的到达时间和离开时间，从而设计了可激励买卖双方报告真实估值的多单位在线双边拍卖机制，然而，在实际的在线双边拍卖市场中，买卖双方均有动机谎报到达时间和离开时间.

为了使在线拍卖研究更切合实际，本文在多个买家和多个卖家在任意时间到达和离开拍卖平台，且买家和卖家均可交易多单位同质物品的假设下，设计了多单位在线双边拍卖机制. 该机制不

① 收稿日期: 2013-07-23; 修订日期: 2014-09-02.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71071119; 71231007); 湖北省教育厅人文社会科学研究资助项目(14G114).
作者简介: 王雅娟(1983—)，女，湖北武汉人，博士，讲师. Email: 16174208@qq.com

仅能在完全未知将来投标序列的情况下,立即对当前投标做出分配和支付的决策,而且能吸引买卖双方自愿参与,激励他们报告真实的进入时间、离开时间和物品估值,同时,在各时期保证了在线拍卖市场的物质平衡和弱预算平衡,从而为达成交易的买卖双方在各自的离开时间分别获得物品和支付创造了条件. 另外,将本文所设计的多单位在线双边拍卖机制应用到证券市场中,结果表明,该机制具有较高的应用价值.

1 问题描述与假设

同离线双边拍卖一致的是在线双边拍卖的参与人包括多个买家和多个卖家. 然而,在线双边拍卖的运作方式有其独特的特点: 允许买家和卖家在拍卖周期内的任意时间进入拍卖平台投标和离开拍卖平台,同时要求在线拍卖组织者在未知将来投标和决策序列的情况下,根据当前投标做出分配和支付的决策. 可见,在线双边拍卖机制是在不确定未来的情况下做出的决策系列,由此,本文将其规范化为序贯决策问题.

首先给出下述假设,然后在此基础上设计多单位在线双边拍卖机制:

1) 多单位在线双边拍卖是在一个离散的、可能无限的时间周期 $T = \{0,1,\cdots,t,\cdots\}$ 上探讨的,采用的是密封价格拍卖的形式;

2) 参与人都是风险中性的,参与人集合为 X,其中卖家集合为 $S \in X$,买家集合为 $B \in X$,记卖家人数 $|S| > 1$,买家人数 $|B| > 1$.

3) 参与人 $i \in X$ 的类型可表示为一个三维向量

$$\omega_i = (a_i, d_i, v_i) \in T \times T \times (\underline{v_i}, \overline{v_i}) = \Omega_i$$

其中,a_i 和 d_i 分别为参与人 i 的进入时间和离开时间;v_i 为参与人 i 在等待区间 $[a_i, d_i]$ 上对单位物品的估值,若 $v_i < 0$,表明该参与人为卖家,若 $v_i > 0$,表明该参与人为买家,Ω_i 是参与人 i 的所有可能类型集合. ω_i 为参与人 i 的私人信息,即只有参与人 i 自己知道 ω_i.

这里将进入时间理解为参与人初次了解拍卖的时间或初次愿意交易物品的时间,同时,将离开时间理解为参与人愿意交易物品的最后时间.

4) 参与人 $i \in X$ 的供给量或需求量为 q_i 单位,Δ 为拍卖组织者规定的最长等待时间,$d_i \leqslant a_i + \Delta$,为公共信息.

例如,在线拍卖市场上存在2个买家和1个卖家,买家类型分别为 $\omega_1 = (2,2,5)$,$\omega_2 = (0,1,8)$,其需求量均为2,卖家的类型为 $\omega_3 = (1,2,-4)$,其供给量为3. 上述信息表明,买家1在时期2欲购买2单位物品且对单位物品的估值为5,而在时期2以外的时期,该买家对单位物品的估值为0; 买家2在时期0和时期1欲购买2单位物品且对单位物品的估值为8,而在时期0和时期1以外的时期,该买家对单位物品的估值为0; 卖家3在时期1和时期2欲出售3单位物品且对单位物品的估值为 -4,而在时期1和时期2以外的时期,该卖家对单位物品的估值为 $-\infty$.

5) 记 $\Omega = \prod_{i \in X} \Omega_i$,$\Omega_{-i} = \prod_{j \neq i, j \in X} \Omega_j$,$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_i, \cdots) \in \Omega$,$\omega_{-i} = (\omega_1, \cdots, \omega_{i-1}, \cdots \omega_{i+1}, \cdots) \in \Omega_{-i}$,$\omega^{(\leqslant t)}$ 为到达时间在第 $t \in T$ 时期之前及第 t 时期的所有参与人类型,$\omega_{-i}^{(\leqslant t)}$ 为除参与人 i 以外到达时间在第 $t \in T$ 时期之前及第 $t \in T$ 时期所有参与人的类型.

6) 由于类型为私人信息,理性的参与人为了自身利益,可能报告虚假类型. 由于进入时间为参与人初次了解拍卖的时间或初次愿意交易物品的时间,故参与人不可能在 a_i 之前进入拍卖平台,参与人 i 可能报告的类型集合见定义1.

定义1 设参与人 $i \in X$ 的真实类型为 ω_i,称下式为参与人 i 可能报告的类型集合.

$$\lambda(\omega_i) = \{\hat{\omega}_i = (\hat{a}_i, \hat{d}_i, \hat{v}_i) \mid i \in X,$$
$$a_i \leqslant \hat{a}_i \leqslant \hat{d}_i, \hat{v}_i \in (\underline{v_i}, \overline{v_i})\} \subseteq \Omega_i$$

7) 由显示原理[13]可知,多单位在线双边拍卖机制等同于一类直接机制,即在这些机制下,参与人被要求直接报告他们的真实类型. 直接机制由分配规则 $Q = \{Q_i^{(t)} \mid t \in T, i \in X\}$ 和支付规则 $M = \{M_i^{(t)} \mid t \in T, i \in X\}$ 组成,记为(Q, M). 其中,一般元素 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) \in N$,$Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 表

示参与人 i 在第 t 时期交易的物品数量; 一般元素 $M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \in R$，若 $M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) < 0$，$-M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 表示卖家 i 在第 t 时期出售单位物品获得的支付价格，若 $M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) > 0$，$M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 表示买家 i 在第 t 时期为单位物品所支付的价格.

为了简化符号，记 $Q_i(\omega) = \sum_{t \in [a_i, d_i]} Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 为参与人 i 在整个 T 时期交易的物品数量，记 $M_i(\omega) = \sum_{t \in [a_i, d_i]} M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 为参与人 i 在整个 T 时期的支付价格.

8) 假设参与人的效用为拟线性效用形式[14]，根据机制 (Q, M)，当参与人 i 报告真实类型 ω_i 时，其效用为

$$U_i(\omega) = v_i Q_i(\omega_i, \omega'_{-i}) - M_i(\omega_i, \omega'_{-i})$$

当参与人 i 报告虚假类型 $\hat{\omega}_i \in \lambda(\omega_i)$ 时，其效用为

$$U_i(\omega) = v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i})$$

其中 $\omega'_{-i} \in \lambda(\omega_{-i}) = \prod_{j \neq i, j \in X} \lambda(\omega_j)$.

2　多单位在线双边拍卖机制设计

2.1　多单位在线双边拍卖机制设计模型

拍卖组织者作为在线机制设计者，他的目标是设计分配有效的机制以实现全社会福利最大化，全社会福利不仅包括了买家和卖家的效用，还包括了拍卖组织者获得的拍卖剩余. 那么，当参与人真实报告其类型时，设计有效的多单位在线双边分配规则等价于求解下述全社会福利最大化模型(LP)

$$\max \sum_t \left\{ \sum_{i: a_i \leq t \leq d_i, i \in B} v_i Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) - \sum_{i: a_i \leq t \leq d_i, i \in S} v_i Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \right\}$$

$$\sum_{i: a_i \leq t \leq d_i} Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0 \qquad \forall t \in T \qquad (1)$$

$$\sum_{t \in [a_i, d_i]} Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \leq q_i \qquad \forall i \in X \qquad (2)$$

$$Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \geq 0 \qquad \forall i \in X \qquad (3)$$

其中，式(1) 为物质平衡约束，该约束可避免任意时期出现空头交易，保证拍卖组织者能在买家离开时为其分配所赢得的物品; 式(2) 表示参与人的交易量不能超过其供给量或需求量.

然而，在实际的拍卖市场中，参与人均有可能报告虚假类型，若采用上述分配规则将导致市场无效乃至崩溃，因此上述模型不完善，模型的解不可行. 拍卖组织者为了实现机制的可行性，关键之一就在于是否能解决在线拍卖中存在的信息不对称，即引导参与人真实暴露其类型，从而避免市场操纵，保证拍卖公平、有效. 然而，在在线拍卖这样的自由环境中，不能强制参与人说实话，因此，需要设计一种满足占优策略激励相容性的机制，即当拍卖机制运作时，不论其余参与人如何投标，参与人均可以通过真实报告到达时间、离开时间以及估值，获得最大效用.

定义 2　若对所有的 $i \in X, \omega \in \Omega, \hat{\omega}_i \in \lambda(\omega_i), \omega'_{-i} \in \lambda(\omega_{-i})$ 有

$$U_i(\omega) \geq v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) \qquad (4)$$

则称在线双边拍卖机制对于参与人是满足占优策略激励相容的，

其次，为吸引参与人的自愿参与，所设计的拍卖机制须满足个体理性约束，即参与人参与在线拍卖机制所获得的效用不小于其保留效用，这里将参与人保留效用标准化为零.

定义 3　如果对所有的 $i \in X, \omega \in \Omega$，有

$$v_i Q_i(\omega) - M_i(\omega) \geq 0 \qquad (5)$$

则称在线双边拍卖机制对于参与人是满足个体理性的.

最后，为保证拍卖组织者在每个时期均能获得非负的拍卖剩余，拍卖机制须满足弱预算平衡约束，即参与人在每个时期的支付之和不小于零. 拍卖剩余可用于组织和管理拍卖市场的支出，以及作为政府财政增收或拍卖行的收入.

定义 4　如果对 $\forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$，有

$$\sum_{i: a_i \leq t \leq d_i} M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \geq 0 \qquad (6)$$

称在线双边拍卖机制是满足弱预算平衡约束的.

Myerson 和 Satterthwaite[15] 指出，不存在可实现全社会福利最大化的有效双边拍卖机制，同

时满足激励相容性、个体理性、弱预算平衡. 因此，本文将用效率对多单位在线双边拍卖机制的性能进行评价. 多单位在线双边拍卖机制的效率是指在该机制下获得的全社会福利与模型(LP)所产生的最大全社会福利的比[6]，其中在多单位在线双边拍卖机制下获得的全社会福利为 $Eff(U) = \sum_{i\in X} v_i Q_i$，模型(LP)所产生的最大全社会福利为模型(LP)的目标值，记为 $Eff(LP)$，因此，多单位在线双边拍卖机制的效率为 $Eff(U)/Eff(LP)$.

2.2 多单位在线双边拍卖机制

多单位在线双边拍卖机制是基于价格表的拍卖机制，即在任意的时期 t，对于任意的参与人 i，其分配和支付依赖于价格 $c_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) \in R$.

定义5 若 $t \in [a_i, d_i]$，$q_i > \sum_{t' \in [a_i, t-1]} Q_i^{(t')}(\omega^{(\leqslant t')})$，且 $v_i > \max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t-1\}} \{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leqslant \gamma)})\}$，称参与人 $i \in X$ 在第 $t \in T$ 时期处于活跃状态，

下面给出多单位在线双边拍卖机制的具体实施程序.

步骤1 初始化 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = 0$，$M_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = 0$，$t = 0$，记第 $t = 0$ 时期的活跃参与人集合为 $X^{(t)} = \{i \mid i \in X, 0 \in [a_i, d_i]\}$.

步骤2 对于任意的 $i \in X^{(t)}$，若 $v_i > c_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$，则参与人 i 赢得拍卖，且令

$$M_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = \max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t\}} \{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leqslant \gamma)})\}$$

步骤3 记第 t 时期赢得拍卖的卖家集合为 $S^{(t)} = \{i \mid v_i > c_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}), v_i < 0, i \in X^{(t)}\}$，第 t 时期赢得拍卖的买家集合为 $B^{(t)} = \{i \mid v_i > c_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}), v_i > 0, i \in X^{(t)}\}$. 若 $\sum_{i\in S^{(t)}} q_i \leqslant \sum_{i \in B^{(t)}} q_i$，那么任意卖家 $i \in S^{(t)}$ 交易 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = q_i$ 单位物品，任意买家 $i \in B^{(t)}$ 交易 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = q_i - \left(\dfrac{\sum_{i\in B^{(t)}} q_i - \sum_{i \in S^{(t)}} q_i}{|B^{(t)}|}\right)$ 单位物品; 若 $\sum_{i\in S^{(t)}} q_i \geqslant \sum_{i\in B^{(t)}} q_i$，那么任意卖家 $i \in S^{(t)}$ 交易 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = q_i - \left(\dfrac{\sum_{i\in S^{(t)}} q_i - \sum_{i\in B^{(t)}} q_i}{|S^{(t)}|}\right)$ 单位物品，任意买家 $i \in B^{(t)}$ 交易 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = q_i$ 单位物品.

步骤4 更新 $q_i = q_i - Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$，$t = t + 1$，若 $t \in T$，则此时活跃参与人集合为

$$X^{(t)} = \{i \mid i \in X, t \in [a_i, d_i], v_i > \max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t-1\}} [c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leqslant \gamma)})], q_i \neq 0\}$$

并重复步骤2到4.

可见，对于任意的时期 t，当参与人 $i \in X^{(t)}$ 且满足条件 $v_i > c_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 时，步骤2和步骤3给出了 $M_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 和 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 的数学描述，当参与人 $i \in X^{(t)}$ 且满足条件 $v_i \leqslant c_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 时，$M_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = 0$，$Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = 0$，当参与人 $i \notin X^{(t)}$ 时，$M_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = 0$，$Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)}) = 0$. 由于 $M_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 和 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 分别为支付规则 $M = \{M_i^{(t)} \mid t \in T, i \in X\}$ 和分配规则 $Q = \{Q_i^{(t)} \mid t \in T, i \in X\}$ 的一般元素，从而可得多单位在线双边拍卖机制.

一旦参与人在第 t 时期赢得拍卖，其交付时间安排如下: 买家立即向拍卖组织者转移其在该时期的支付，且在报告的离开时间获得整个 T 时期赢得的物品; 卖家立即向拍卖组织者转移其在该时期出售的物品，且在报告的离开时间获得整个 T 时期赢得的支付.

2.3 价格表

现针对参与人 i，给出第 t 时期 $c_i^{(t)}(\omega^{(\leqslant t)})$ 的计算规则.

步骤1 记 v_j^{b} 和 q_j^{b} 分别为 $X^{(t)} \cup \{i\}$ 中买家 $j \in B \cap (X^{(t)} \cup \{i\})$ 的估值和购买量，v_l^{s} 和 q_l^{s} 分别为 $X^{(t)} \cup \{i\}$ 中卖家 $l \in S \cap (X^{(t)} \cup \{i\})$ 的估值和供给量. 分别将买家估值按从高到低排序，卖家估值的绝对值按从低到高排序，不失一般性，假设

$$v_1^{\mathrm{b}} > v_2^{\mathrm{b}} > v_3^{\mathrm{b}} > \cdots, -v_1^{\mathrm{s}} < -v_2^{\mathrm{s}} < -v_3^{\mathrm{s}} < \cdots \tag{7}$$

假设上述序关系是严格的，因为如果参与人报告的价格相同可以合并他们的供给或需求数量，将他们看为同一人. 同时，参与人也可以将其供给或需求数量分开，如一个买家想要以不同的价格购买单位物品，那么，可以把这一买家看作是不同个体.

步骤2 将所有买家需求量按降价排序作图，所有卖家供给量按升价排序作图[5]，可得4种情形.

步骤 3　图 1 为第 1 种情形，两者的交点（若两者相交为一条线段，则取其中点）对应一个卖家 k 和一个买家 r，他们的报价关系为

$$v_r^b \geq -v_k^s \geq v_{r+1}^b,\quad \sum_{l=1}^{k-1} q_l^s \leq \sum_{j=1}^{r} q_j^b \leq \sum_{l=1}^{k} q_l^s \tag{8}$$

故，当 $i \in S$ 时，$c_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = v_k^s$，当 $i \in B$ 时，$c_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = v_r^b$.

图 2 为第 2 种情形，两者的交点（若两者相交为一条线段，则取其中点）对应一个卖家 k 和一个买家 r，他们的报价关系为

$$-v_{k+1}^s \geq v_r^b \geq -v_k^s,\quad \sum_{j=1}^{r-1} q_j^b \leq \sum_{l=1}^{k} q_l^s \leq \sum_{j=1}^{r} q_j^b \tag{9}$$

图 3 和图 4 分别为第 3 种和第 4 种情形，两者无交点，以两者中较短线段的末端向较长线段作垂线，与较长线段相交于一点，这两点分别对应卖家 k 和买家 r，他们的报价关系为

$$v_r^b \geq -v_k^s,\quad \sum_{j=1}^{r-1} q_j^s \leq \sum_{l=1}^{k} q_l^b \leq \sum_{j=1}^{r} q_j^s$$

或

$$\sum_{j=1}^{r-1} q_j^b \leq \sum_{l=1}^{k} q_l^s \leq \sum_{j=1}^{r} q_j^b \tag{10}$$

同理，在第 2 种、第 3 种和第 4 种情形下，对于 $\forall i \in X$，$c_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 的取值同第 1 种情形.

综上所述，$c_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 具有以下特点：

1）与到达时间在第 t 时期之后的参与人类型无关；

2）与第 t 时期赢得交易的参与人估值无关.

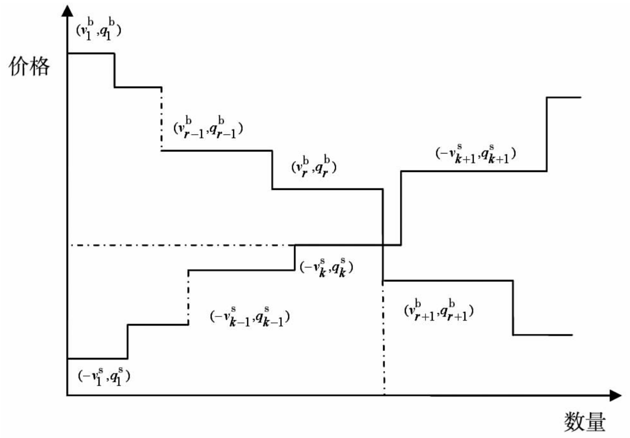

图 1　第 1 种情形下的匹配图

Fig. 1 Matching graph about case 1

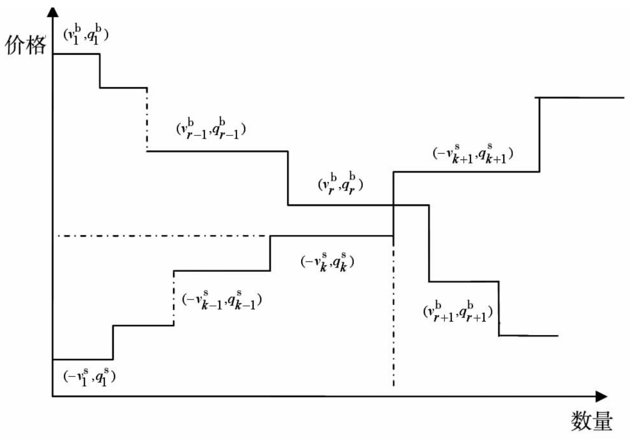

图 2　第 2 种情形下的匹配图

Fig. 2 Matching graph about case 2

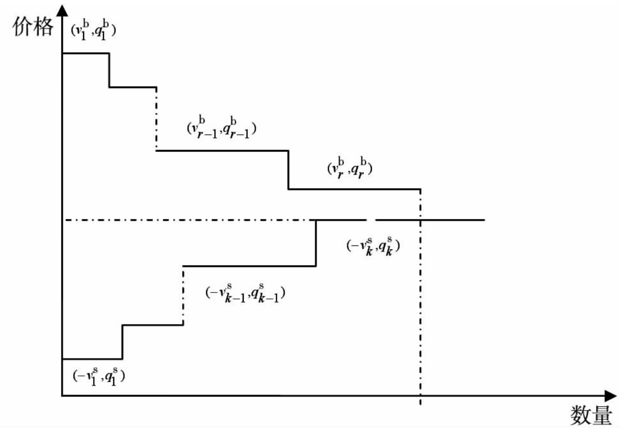

图3 第3种情形下的匹配图

Fig. 3 Matching graph about case 3

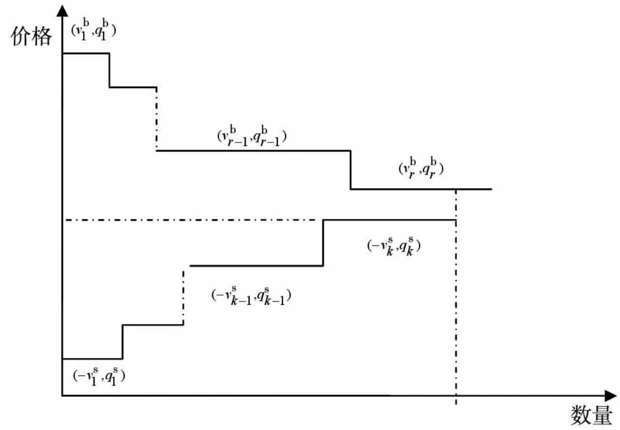

图4 第4种情形下的匹配图

Fig. 4 Matching graph about case 4

3 多单位在线双边拍卖机制的特性

本节将证明,由第3节所描述的拍卖机制是满足占优策略激励相容性、个体理性、物质平衡以及弱预算平衡的.

引理1 在本文设计的拍卖机制下,如果真实类型为 $\omega_i=(a_i,d_i,v_i)\in\Omega_i$ 的参与人 $i\in X$ 报告类型为 $\hat{\omega}_i=(a_i,d_i,\hat{v}_i)\in\lambda(\omega_i)$ 且 $\hat{v}_i\neq v_i$,则对所有的 $\omega'_{-i}\in\lambda(\omega_{-i})$,$\omega_{-i}\in\Omega_{-i}$ 有

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i})-M_i(\omega_i,\omega'_{-i})\geqslant v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})-M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

证明 分3种情形进行讨论. 第1,当参与人 i 真实报告其类型为 ω_i 时,若在第 $t_1=\max\{d_i-\Delta,0\}$ 时期,有 $v_i\leqslant c_i^{(t_1)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t_1)})$,那么

$$Q_i(\omega_i,\omega'_{-i})=\sum_{t\in[a_i,d_i]}Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})=0,$$

$$M_i(\omega_i,\omega'_{-i})=\sum_{t\in[a_i,d_i]}M_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})=0$$

参与人 i 在整个 T 时期的效用为0. 当其报告类型为 $\hat{\omega}_i$ 且 $\hat{v}_i>v_i$,$\hat{v}_i>c_i^{(t_1)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t_1)})$ 时,使得

$$Q_i(\omega_i,\omega'_{-i})=\sum_{t\in[a_i,d_i]}Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})\neq 0$$

根据 $c_i^{(t_1)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t_1)})$ 的计算规则可知,$\hat{v}_i>c_i^{(t_1)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t_1)})\geqslant v_i$,那么

$$M_i^{(t)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})=\max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t\}}\{c_i^{(\gamma)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant\gamma)})\}\geqslant v_i$$

参与人 i 的效用不大于0. 故

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i})-M_i(\omega_i,\omega'_{-i})\geqslant v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})-M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

当其报告类型为 $\hat{\omega}_i$ 且 $\hat{v}_i<v_i$ 时,则 $Q_i(\omega_i,\omega'_{-i})=0$,$M_i(\omega_i,\omega'_{-i})=0$,参与人 i 的效用为0,故

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i})-M_i(\omega_i,\omega'_{-i})=v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})-M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

第2,当参与人 i 真实报告其类型为 ω_i 时,若存在时期 $t_1<d_i$,使得

$$v_i>\max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t_1\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant\gamma)})\}$$

则 $Q_i^{(t_1)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t_1)})>0$. 若 $0<\sum_{t\in[a_i,t_1]}Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})<q_i$,且在第 $t_1+1<d_i$ 时期,有

$$\max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t_1+1\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant\gamma)})\}\geqslant v_i$$

则第 t_1 时期为该参与人赢得拍卖的最后时期,即

$$\sum_{t\in(t_1,d_i]}Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})=0$$

当其报告类型为 $\hat{\omega}_i$ 且 $\hat{v}_i>v_i$ 时,则

$$\sum_{t\in[a_i,t_1]}Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})=\sum_{t\in[a_i,t_1]}Q_i^{(t)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)}),$$

$$\sum_{t\in[a_i,t_1]}M_i^{t}(\omega_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})=\sum_{t\in[a_i,t_1]}M_i^{(t)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t)})$$

若 $\hat{v}_i>\max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t_1+1\}}\{c_i^{(\gamma)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant\gamma)})\}$,那么

$$Q_i^{(t_1+1)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{'(\leqslant t_1+1)})\neq 0,$$

$$M_i^{(t_1+1)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le t_1+1)}) = \max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t_1+1\}}\{c_i^{(\gamma)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le\gamma)})\} \ge v_i$$

参与人 i 在时期 t_1+1 的效用不大于 0，故

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i}) - M_i(\omega_i,\omega'_{-i}) \ge v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

当报告其类型为 $\hat{\omega}_i$ 且 $\hat{v}_i < v_i$ 时，可能导致该参与人失去原有的交易，使得

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i}) - M_i(\omega_i,\omega'_{-i}) \ge v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

第 3，当参与人 i 真实报告其类型为 ω_i 时，若存在时期 $t_1 \le d_i$ 使得

$$\sum_{t\in[a_i,t_1]} Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)}) = q_i$$

那么当其报告类型为 $\hat{\omega}_i$ 且 $\hat{v}_i > v_i$ 时，该参与人的效用不变，即

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i}) - M_i(\omega_i,\omega'_{-i}) = v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

当报告其类型为 $\hat{\omega}_i$ 且 $\hat{v}_i < v_i$ 时，可能导致该参与人失去原有的交易，使得

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i}) - M_i(\omega_i,\omega'_{-i}) \ge v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

综上所述，当真实类型为 $\omega_i=(a_i,d_i,v_i)$ 的参与人 i 报告类型为 $\hat{\omega}_i=(a_i,d_i,\hat{v}_i)$ 时，有

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i}) - M_i(\omega_i,\omega'_{-i}) \ge v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

引理 1 表明，真实类型为 $\omega_i=(a_i,d_i,v_i)$ 的参与人 i 报告类型为 $\hat{\omega}_i=(a_i,d_i,\hat{v}_i)$ 时所获得的效用不大于真实报告其类型时所获得的效用.

引理 2　在本文设计的拍卖机制下，如果真实类型为 $\omega_i=(a_i,d_i,v_i)\in\Omega_i$ 的参与人 $i\in X$ 报告其类型为 $\hat{\omega}_i=(\hat{a}_i,\hat{d}_i,v_i)\in\lambda(\omega_i)$ 且 $[\hat{a}_i,\hat{d}_i]\subseteq[a_i,d_i]$，则对所有的 $\omega'_{-i}\in\lambda(\omega_{-i})$，$\omega_{-i}\in\Omega_{-i}$ 有

$$v_iQ_i(\omega_i,\omega'_{-i}) - M_i(\omega_i,\omega'_{-i}) \ge v_iQ_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i,\omega'_{-i})$$

证明　分两种情形进行讨论. 第 1，当参与人 i 真实报告其类型为 ω_i 时，若存在时期 $t\in[a_i,\hat{a}_i)$，有 $v_i > \max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)})\}$，使得 $\sum_{t\in[a_i,\hat{a}_i)} Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)}) \ne 0$，那么当该参与人报告其类型为 $\hat{\omega}_i$ 时，该参与人将失去在区间 $[a_i,\hat{a}_i)$ 上原有的交易机会，即 $\sum_{t\in[a_i,\hat{a}_i)} Q_i^t(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le t)}) = 0$.

若存在 $t\in[\hat{a}_i,\hat{d}_i]$，有 $Q_i^{(t)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le t)})\ne 0$，则 $c_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)}) = c_i^{(t)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le t)})$ 与 v_i 无关. 由于 $\max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\le\gamma)})\}$ 独立于 a_i，且关于 d_i 是非增的，则对于任意的 $t\in[\hat{a}_i,\hat{d}_i]$ 有

$$\begin{aligned}M_i^{(t)}(\omega_i,\omega'^{(\le t)}_{-i}) &= \max_{\gamma\in\{\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le\gamma)})\}\\ &\le \max_{\gamma\in\{\max\{\hat{d}_i-\Delta,0\},\cdots,t\}} c_i^{(\gamma)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le\gamma)})\\ &= M_i^{(t)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le t)})\end{aligned}$$

由于 $\max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\le\gamma)})\}$ 关于 t 是非减的，则对于任意的 $t'\in[a_i,\hat{a}_i)$ 和 $t\in[\hat{a}_i,\hat{d}_i]$

$$\begin{aligned}M_i^{(t')}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)'}) &= \max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t'\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le\gamma)})\}\\ &\le \max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le\gamma)})\}\\ &= M_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)})\end{aligned}$$

同时，根据本文设计的分配规则可知

$$\sum_{t\in[a_i,\hat{d}_i]} Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)}) \ge \sum_{t\in[\hat{a}_i,\hat{d}_i]} Q_i^{(t)}(\hat{\omega}_i,\omega_{-i}^{(\le t)})$$

故

$$v_i\sum_{t\in[a_i,\hat{d}_i]} Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega'^{(\le t)}_{-i}) - \sum_{t\in[a_i,\hat{d}_i]} M_i^{(t)}(\omega_i,\omega'^{(\le t)}_{-i}) \times Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega'^{(\le t)}_{-i}) \ge v_i\sum_{t\in[\hat{a}_i,\hat{d}_i]} Q_i^t(\hat{\omega}_i,\omega'^{\le t}_{-i}) - \sum_{t\in[\hat{a}_i,\hat{d}_i]} M_i^t(\hat{\omega}_i,\omega'^{\le t}_{-i})\,Q_i^t(\hat{\omega}_i,\omega'^{\le t}_{-i})$$

当参与人 i 真实报告其类型为 ω_i 时，若 $\sum_{t\in(\hat{d}_i,d_i]} Q_i^{(t)}(\omega_i,\omega_{-i}^{(\le t)}) \ne 0$，那么当该参与人报告其类型为 $\hat{\omega}_i$ 时，该参与人将失去在区间

$(\hat{d}_i, d_i]$上的交易机会,即

$$\sum_{t \in (\hat{d}_i, d_i]} Q_i^{(t)}(\hat{\omega}_i, \omega_{-i}^{(\leq t)}) = 0,$$

$$\sum_{t \in (\hat{d}_i, d_i]} M_i^{(t)}(\hat{\omega}_i, \omega_{-i}^{(\leq t)}) = 0$$

因此

$$v_i Q_i(\omega_i, \omega'_{-i}) - M_i(\omega_i, \omega'_{-i}) \geq v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i})$$

第 2,当参与人 i 真实报告其类型 ω_i 时,若对于任意的时期 $t \in [a_i, \hat{a}_i)$,有 $\max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t\}} \{c_i^{(\gamma)}(\omega_i, \omega_{-i}^{(\leq \gamma)})\} \geq v_i$,即 $Q_i^{(t)}(\omega_i, \omega_{-i}^{(\leq t)}) = 0$,那么当该参与人报告其类型为 $\hat{\omega}_i$ 时,对于任意的时期 $t \in [\hat{a}_i, \hat{d}_i]$

$$\max_{\gamma \in \{\max\{\hat{d}_i - \Delta, 0\}, \cdots, t\}} \{c_i^{(\gamma)}(\hat{\omega}_i, \omega_{-i}^{(\leq \gamma)})\} \geq \max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t\}} \{c_i^{(\gamma)}(\omega_i, \omega_{-i}^{(\leq \gamma)})\} \geq v_i$$

即 $Q_i^{(t)}(\hat{\omega}_i, \omega_{-i}^{(\leq t)}) = 0$,可见该参与人在区间 $[\hat{a}_i, \hat{d}_i]$ 上仍然无法获得交易机会,故

$$v_i Q_i(\omega_i, \omega'_{-i}) - M_i(\omega_i, \omega'_{-i}) = v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) = 0$$

综上所述,当真实类型为 $\omega_i = (a_i, d_i, v_i)$ 的参与人 i 报告类型为 $\hat{\omega}_i = (\hat{a}_i, \hat{d}_i, v_i)$ 且 $[\hat{a}_i, \hat{d}_i] \subseteq [a_i, d_i]$ 时,有

$$v_i Q_i(\omega_i, \omega'_{-i}) - M_i(\omega_i, \omega'_{-i}) \geq v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i})$$

引理 2 表明,真实类型为 $\omega_i = (a_i, d_i, v_i)$ 的参与人 i 报告类型为 $\hat{\omega}_i = (\hat{a}_i, \hat{d}_i, v_i)$ 且 $[\hat{a}_i, \hat{d}_i] \subseteq [a_i, d_i]$ 时所获得的效用不大于真实报告其类型时所获得的效用.

定理 1　本文设计的拍卖机制对参与人是满足占优策略激励相容性的.

证明　假设参与人 $i \in X$ 的真实类型为 $\omega_i = (a_i, d_i, v_i) \in \Omega_i$,其报告类型为 $\hat{\omega}_i = (\hat{a}_i, \hat{d}_i, \hat{v}_i) \in \lambda(\omega_i)$. 根据交付时间安排,赢得拍卖的卖家 i 在报告的离开时间获得支付;赢得拍卖的买家 i 在报告的离开时间获得物品,故为及时获得效用,参与人不会故意延长他的离开时间,即 $[\hat{a}_i, \hat{d}_i] \subseteq [a_i, d_i]$.

根据引理 1,对于任意的 $\hat{\omega}_i = (\hat{a}_i, \hat{d}_i, v_i) \in \lambda(\omega_i)$,有

$$v_i Q_i(\hat{\hat{\omega}}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\hat{\omega}}_i, \omega'_{-i}) \geq v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i})$$

由引理 2 得知

$$v_i Q_i(\omega_i, \omega'_{-i}) - M_i(\omega_i, \omega'_{-i}) \geq v_i Q_i(\hat{\hat{\omega}}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\hat{\omega}}_i, \omega'_{-i})$$

因此

$$v_i Q_i(\omega_i, \omega'_{-i}) - M_i(\omega_i, \omega'_{-i}) \geq v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i})$$

即

$$U_i(\omega) \geq v_i Q_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i}) - M_i(\hat{\omega}_i, \omega'_{-i})$$

证毕.

定理 2　本文设计的拍卖机制对参与人是满足个体理性的.

证明　对于任意的参与人 $i \in X$,若存在时期 $t \in T$ 使得 $v_i > \max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t\}} \{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leq \gamma)})\}$,那么该参与人在时期 t 赢得拍卖,即 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \neq 0$ 且

$$M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = \max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t\}} \{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leq \gamma)})\} < v_i$$

此时其获得的效用为

$$(v_i - M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})) Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) > 0$$

若存在时期 $t \in T$ 使得 $v_i \leq \max_{\gamma \in \{\max\{d_i - \Delta, 0\}, \cdots, t\}} \{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leq \gamma)})\}$,那么该参与人在时期 t 未能赢得拍卖,即 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0$, $M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0$,此时该参与人获得的效用为 $(v_i - M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})) Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0$. 因此,参与人 i 在时间周期 T 上获得的总效用为

$$v_i Q_i(\omega) - M_i(\omega) \geq 0$$

证毕.

定理 3　本文设计的拍卖机制是满足物质平衡约束和弱预算平衡约束的.

证明　根据本文设计的分配规则可知,在任意

的时期 t，有 $\sum_{i\in B^{(t)}} Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) - \sum_{i\in S^{(t)}} Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0$，同时，在第 t 时期未能赢得拍卖的参与人 i 的分配为 $Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0$，即 $\sum_{i:a_i\leq t\leq d_i} Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0$. 因此，该机制是满足物质平衡约束的.

根据 $c_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 的计算规则可知，在每个时期 γ，当 $i \in B$，有 $c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leq \gamma)}) = v_r^b$，当 $i \in S$，有 $c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leq \gamma)}) = v_k^s$，且 $v_r^b + v_k^s \geq 0$，同时，根据本文设计的支付规则可知，在第 t 时期赢得拍卖的参与人 i 的单位支付为 $M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = \max_{\gamma\in\{\max\{d_i-\Delta,0\},\cdots,t\}}\{c_i^{(\gamma)}(\omega^{(\leq\gamma)})\}$，故在任意的时期 t，有

$$\sum_{i\in B^{(t)}} M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) + \sum_{i\in S^{(t)}} M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \geq 0$$

则

$$\sum_{i\in B^{(t)}} M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})\, Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) + \sum_{i\in S^{(t)}} M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})\, Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \geq 0$$

同时，在第 t 时期未能赢得拍卖的参与人 i 的单位支付为 $M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) = 0$，即

$$\sum_{i:a_i\leq t\leq d_i} M_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})\, Q_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)}) \geq 0$$

证毕.

4 算　例

假设某证券交易所采用本文设计的拍卖机制在时期 $T = \{0,1,2,3\}$ 内进行证券交易，令 $\Delta = 2$. 现有 5 个风险中性的卖家和 5 个风险中性的买家参与竞价，表 1 为买卖双方的投标信息.

表 1　卖家和买家投标信息

Table 1　Bidding of sellers and buyers

卖家			买家		
编号	类型	供给量	编号	类型	购买量
1	(0,1,－1.7)	5	1	(0,2,2.9)	4
2	(0,1,－2.1)	2	2	(0,2,2.0)	3
3	(0,2,－2.0)	3	3	(1,2,2.2)	1
4	(1,3,－1.9)	1	4	(1,3,2.8)	1
5	(2,3,－2.6)	6	5	(0,2,1.8)	2

1) 首先进入第 $t = 0$ 时期，此时活跃参与人的类型为 (0,1,－1.7)，(0,1,－2.1)，(0,2,－2.0)，(0,2,2.9)，(0,2,2.0)，(0,2,1.8). 根据 $c_i^{(t)}(\omega^{(\leq t)})$ 的计算规则可知，当 $i \in B$ 时，$c_i^{(0)}(\omega^{(\leq 0)}) = 2.0$，当 $i \in S$ 时，$c_i^{(0)}(\omega^{(\leq 0)}) = 2.0$，将上述参与人的估值与相应的 $c_i^{(0)}(\omega^{(\leq 0)})$ 比较，可知卖家 1 和买家 1 赢得拍卖，而其余参与人未能赢得拍卖. 根据支付规则，卖家 1 获得的单位支付为 2.0，买家 1 的单位支付为 2.0，其余参与人支付为 0. 根据分配规则，卖家 1 共出售 4 单位证券，买家 1 获得 4 单位证券. 同时，对于卖家 1，更新 $q_1 = 1$，对于买家 1，更新 $q_1 = 0$.

在第 $t = 1$ 时期，活跃参与人的类型为 (0,1,－1.7)，(1,3,－1.9)，(1,2,2.2)，(1,3,2.8)，根据拍卖机制，卖家 1 出售 1 单位证券，其获得的单位支付为 1.9；买家 4 获得 1 单位证券，其单位支付为 2.2，其余参与人未能赢得拍卖且支付为 0. 而在第 $t = 2$ 时期及第 $t = 3$ 时期，无交易产生.

2) 卖家 1 的效用为 $(2.0－1.7)\times4+(1.9－1.7)\times1 = 1.4$，买家 1 的效用为 $(2.9－2.0)\times4 = 3.6$，买家 4 的效用为 $(2.8－2.2)\times1 = 0.6$，其余参与人效用为 0，故该机制满足个体理性.

3) 在第 0 期的拍卖剩余为 $(2.0－2.0)\times4 = 0$，第 1 期的拍卖剩余为 $(2.2－1.9)\times1 = 0.3$. 可见，该机制满足弱预算平衡.

4) 当 $t = 0$ 时，$\sum_{i:a_i\leq0,i\in B} Q_i^{(0)}(\omega^{(\leq 0)}) - \sum_{i:a_i\leq0,i\in S} Q_i^{(0)}(\omega^{(\leq 0)}) = 4 - 4 = 0$，当 $t = 1$ 时，$\sum_{i:a_i\leq1,i\in B} Q_i^{(1)}(\omega^{(\leq 1)}) - \sum_{i:a_i\leq1,i\in S} Q_i^{(1)}(\omega^{(\leq 1)}) = 1 - 1 = 0$，可见，该机制满足物质平衡约束.

5) 用此算例分析本文机制的占优策略激励相容性.

根据该机制拍卖规定可知，参与人不会夸大

他的离开时间,其可能报告的类型集合为

$$\lambda(\omega_i) = \{\hat{\omega}_i = (\hat{a}_i, \hat{d}_i, \hat{v}_i) \mid i \in X,$$
$$a_i \leqslant \hat{a}_i \leqslant \hat{d}_i \leqslant d_i, \hat{v}_i \in (\underline{v}_i, \overline{v}_i)\} \subseteq \Omega_i$$

对于任意的卖家,如卖家 1,当 $\omega_1 = (0,1,-1.7)$ 是他的真实类型时,若真实投标可赢得交易,效用为 1.4. 若报 $\hat{\omega}_1 = (0,1,-1.3)$,当进入第 $t = 0$ 时期时,卖家 1 分别在第 $t = 0$ 时期和第 $t = 1$ 时期出售 4 单位证券和 1 单位证券,其效用仍为 $(2.0 - 1.7) \times 4 + (1.9 - 1.7) = 1.4$; 若报 $\hat{\omega}_1 = (0,0,-1.2)$,当进入第 $t = 0$ 时期时,卖家 1 仅能在第 $t = 0$ 时期出售 4 单位证券,其效用 $(2.0 - 1.7) \times 4 = 1.2 < 1.4$; 若报 $\hat{\omega}_1 = (0,1,-2.1)$ 或 $\hat{\omega}_1 = (0,0,-2.2)$ 或 $\hat{\omega}_1 = (1,1,-2.6)$ 或 $\hat{\omega}_1 = (1,1,-1.4)$,卖家 1 未能赢得交易,其效用为 0. 因此,真实投标是卖家 1 的占优策略.

对于任意的买家,如买家 2,当 $\omega_2 = (0,2,2.0)$ 是他的真实类型时,若真实投标未能赢得交易,效用为 0. 若报 $\hat{\omega}_2 = (0,2,3.0)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (0,1,3.1)$,买家 2 均可在第 $t = 0$ 时期获得 3 单位证券,其效用为 $(2 - 2.9) \times 3 = -2.7 < 0$; 若报 $\hat{\omega}_2 = (0,2,1.0)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (0,1,1.1)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (1,2,3.0)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (1,2,1.2)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (1,1,3.1)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (1,1,1.7)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (2,2,3.1)$ 或 $\hat{\omega}_2 = (2,2,1.1)$,买家 2 均未能赢得交易,其效用为 0. 因此,真实投标是买家 2 的占优策略.

6) 在本文设计的在线双边拍卖机制下,全社会福利为 $(-1.7) \times 4 + (-1.7) \times 1 + 2.9 \times 4 + 2.8 \times 1 = 5.9$. 根据模型(LP) 可知,最大全社会福利为 6.3. 因此,本文所设计的拍卖机制的效率为 5.9/6.3 = 93.6%.

这说明本文设计的在线双边拍卖机制对资源的配置是富有效率的. 市场效率的损失源于在信息不对称的在线双边市场中,拍卖组织者为激励买家和卖家申报真实的类型,需要提供一定的信息租金给赢得拍卖的买家和卖家[16],在有物质平衡和弱预算平衡的约束条件下,这样做的直接结果是减少市场交易量,从而导致少量效率的损失.

5 结束语

本文提出了多单位在线双边拍卖机制,讨论和分析了该机制的若干性能,并作为算例将该机制应用于证券市场中. 与现有的拍卖机制相比,本文的拍卖机制具有以下特点:

1) 本文是在买卖双方在任意时间到达和离开拍卖平台,且均可交易多单位同质物品的前提下设计拍卖机制;

2) 该机制不仅满足个体理性,还满足占优策略激励相容性,即真实地报告进入时间、离开时间和物品估值是买卖双方的占优策略;

3) 该机制满足物质平衡和和弱预算平衡,从而为买卖双方在报告的离开时间分别获取赢得的物品和支付创造了条件;

4) 通过算例对该机制的效率进行了分析,结果表明该机制对资源配置是富有效率的.

参 考 文 献:

[1] Hajiaghayi M T, Kleinberg R, Mahdian M, et al. Online auction with re-usable goods[C]// Proceedings of the 6th ACM Conference on Electronic Commerce, New York: ACM, 2005: 165 – 174.

[2] 陈 剑, 陈熙龙, 宋西平. 逢低买入与固定价格机制比较研究[J]. 管理科学学报, 2003, 6(5): 34 – 39.
Chen Jian, Chen Xilong, Song Xiping. Comparison of group-buying auction and fixed-pricing mechanism[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(5): 34 – 39. (in Chinese)

[3] 杜 黎, 胡奇英. 一类网上英式拍卖: 顾客投标行为研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(3): 31 – 38.
Du Li, Hu Qiying. Study on bidding strategies in online auction[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(3): 31 – 38. (in Chinese)

[4] 王 宏. 多物品网上拍卖的最优设计[J]. 管理科学学报, 2011, 14(12): 1 – 16.
Wang Hong. Optimal mechanism design for multi-unit online auctions[J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(12): 1 – 16. (in Chinese)

[5] 詹文杰，汪寿阳．评“Smith 奥秘”与双向拍卖的研究进展[J]．管理科学学报，2003，6(1)：1－12.
Zhan Wenjie，Wang Souyang. Review on the Smith's mystery and development of double auctions[J]. Journal of Management Sciences in China，2003，6(1)：1－12. (in Chinese)
[6] Huang P，Scheller-Wolf A，Sycara K. Design of a multi-unit double auction e-market[J]. Computational Intelligence，2002，18(4)：596－417.
[7] 殷　红，王先甲．网上双边拍卖机制设计及其实现[J]．系统工程理论与实践，2004，(10)：110－116.
Yin Hong，Wang Xianjia. Design of mechanism for online double auction：Theory and implementation[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，2004，(10)：110－116. (in Chinese)
[8] Blum A，Sandholm T，Zinkevich M. Online algorithms for market clearing[J]. Journal of the ACM，2006，53(5)：971－980.
[9] Bredin J，Parkes D C，Duong Q. Chain：A dynamic double auction framework for matching patient agent[J]. Journal of Artificial Intelligence Research，2007，(30)：133－179.
[10] Wang S G，Xu P，Xu H X. Truthful online double auction for spectrum allocation in wireless networks[J]. IEEE Transactions on Computers，2010，(6)：1691－1702.
[11] Gerding E H，Stein S，Robu V，et al. Two-sided online markets for electric vehicle charging[C]// AAMAS '13，USA：2013，986－996.
[12] Miyashita K. Online double auction mechanism for perishable goods[J]. Electronic Commerce Research and Applications，2014，13(5)：355－367.
[13] McAfee R P，McMillan J. Auctions and bidding[J]. Journal of Economic Literature，1987，25(2)：699－738.
[14] 李　军，刘树林．基于 Cobb-Douglas 效用函数的多属性采购拍卖[J]．管理科学学报，2012，15(3)：54－60.
Li Jun，LIU Shulin. Multi-attribute procurement auctions based on Cobb-Douglas utility function[J]. Journal of Management Sciences in China，2012，15(3)：54－60. (in Chinese)
[15] Myerson R B，Satterthwaite M A. Efficient mechanisms for bilateral trading[J]. Economic Theory，1983，29(2)：265－281.
[16] 殷　红．多物品拍卖机制设计理论与方法[M]．上海：学林出版社，2009.
Yin Hong. Theory and Method of Multi-objects Auction Mechanism Design[M]. Shanghai：Academia Press，2009. (in Chinese)

Incentive compatible mechanism for multiunit online double auction

WANG Ya-juan[1]，*WANG Xian-jia*[2]
1. School of Management，Wuhan University of Science and Technology，Wuhan 430081，China；
2. School of Economics and Management，Wuhan University，Wuhan 430072，China

Abstract: In this paper，we present a multiunit online double auction mechanism，which can be used in the market of dynamic environments for securities trading，resource allocation on computational grids，emission trade，etc. Firstly，we describe an online double auction problem，in which multiple agents arrive and depart over time and bid for multiunit goods. Secondly，we design a multiunit online double auction mechanism for the above auction problem. Thirdly，we prove that the mechanism not only satisfy individual rationality，material balance and weakly budget balance，but also can induce agents to reveal their true arrival time，departure time and values. Finally，a numerical example is given to verify the feasibility and rationality of the mechanism.

Key words: online double auction；multiunit；incentive compatibility；individual rationality；material balance；weakly budget balance