债务违约风险与期权定价研究①

王安兴[1,2]，杜 琨[1]
(1. 上海财经大学金融学院，上海 200433; 2. 上海市金融信息化技术研究重点实验室，上海 200433)

摘要：论文分析当已知公司财务信息下的欧式期权定价问题，分别在公司资产服从 Merton、Black & Cox 和 Leland & Toft 违约风险模型下，给出了欧式期权的定价公式，并分别讨论了公司资本结构和债务违约边界对欧式期权价格的影响.

关键词：期权定价；资本结构；信用风险；违约边界
中图分类号：F830.91 文献标识码：A 文章编号：1007-9807(2016)01-0117-10

0 引 言

在资本市场中，很多上市公司发行股票和债券，同时，以这家公司的股票为标的的期权也交易活跃. 比如，在上海和深圳 A 股市场中，不少上市公司发行可分离可转债. 可分离可转债就是把普通可转债拆解成两个证券，一个证券是可转债的债权，另一个证券是可转债的转换为公司股票的转换权. 债权证券就是普通的债券，而转换权证券就是普通的期权. 上市公司发行可分离可转债之后，在市场中事实上同时出现公司债券、股票和期权等证券. 在通常的法律环境下，上市公司会披露公司财务信息. 如果公司债务违约，则公司将被清算，公司剩余资产权益归债权人，导致公司股票价值归零，公司股票期权价值也直接受到影响. 鉴于公司财务信息对判断公司债务违约风险的重要性，持有股权激励合约的经理人、期权交易的理性投资者有兴趣了解公司财务信息对期权价值的影响.

关于期权定价的研究始于 Black 和 Scholes[1] 和 Merton[2] 的开创性工作，在假设股票价格服从几何布朗运动的条件下，Black 和 Scholes[1] 和 Merton[2] 独立给出了欧式期权定价的 Black-Scholes-Merton(BSM) 模型.

在这以后，众多学者从不同的角度不断推广 Black-Scholes-Merton 模型. Heston[3] 假设股票价格的波动率是随机的，Merton[4] 在股票价格过程中引入跳越，Bakshi 等[5]，Bates[6-7]，Das 和 Sundaram[8]，Eraker[9]，Pan[10] 以及 Scott[11] 的期权定价模型都引入跳-扩散过程来模拟标的资产的价格过程.

由于经验数据显示股票价格不是正态分布，Barndorff-Nielsen[12] 假设标的资产价格服从逆高斯(NIG)分布，从而为期权定价. Eberlein 等[13] 采用广义双曲分布模拟标的资产收益率分布，Madan 和 Milne[14] 以及 Madan 等[15] 假设标的资产价格服从方差伽马(VG)过程，从而为期权定价. Carr 和 Wu[16] 假设股票价格服从时变 Levy 过程，并在此假设下为期权定价. Carr 和 Wu[17-18]，Carr 和 Linetsky[19] 假设股票价格服从跳过程的条件下债券违约、期权定价的关系，并应用于 CDS 定价等分析. Carr 和 Wu[20] 假设公司债务违约前股票大于门槛值 B，公司债务后股票价格小于 A($A<B$)，在给定股票价格服从“违约替换的扩散”(default-

---

① 收稿日期：2013-12-04；修订日期：2014-03-25.
基金项目：教育部科技创新工程重大项目培育资金资助项目(708040)；上海财经大学“211工程”三期重点学科建设资助项目；上海财经大学研究生科研创新基金资助项目(CXJJ-2011-395)；上海财经大学研究生创新基金资助项目(CXJJ-2011-395; CXJJ-2012-385).
作者简介：王安兴(1963—)，男，湖北襄樊人，博士，副教授. Email: awang@mail.shufe.edu.cn

able displaced diffusion) 过程下给出看跌期权的解析定价公式，Carr 和 Wu[20] 发现，用这样的看跌期权可以复制标准的信用保险合约.

关于公司债务违约、信用债券定价与公司资本结构的研究始于 Merton[21]. 如果公司资产价值大于公司负债，在公司股东没有动机债务违约. 如果将来公司资产价值降至某一水平，公司股东对公司债务违约，公司债权人取得公司股权. Merton[21] 假设公司资产价值用几何布朗运动描述，可违约公司股票和债券可看作是公司资产价值的或有索取权，给出公司债务定价的结构化模型.

Black 和 Cox[22] 认为公司债务到期之前的任何一个时间，如果公司资产价值跌至违约边界时，公司债务违约就会发生，公司的违约边界外生给定. Black 和 Cox[22] 还研究了优先和次级债务分级、安全条款、分红及现金分红限制对风险债务定价的影响. Geske[23] 采用了复合期权方法来对息票债券定价，并给出了在这一复合期权框架下的次级债务定价公式. Leland 等[24] 研究支付连续利息(也可等价地认为公司在每次到期都发行相同面额的新债为旧债的偿还融资) 的永久债券的信用风险，得到信用风险债券价格的解析解，Leland 等[24] 模型考虑了破产成本和税收对公司股东违约选择的影响和公司最佳资本结构，该模型的结果更多地回答了关于公司资本结构的问题.

Longstaff 和 Schwartz[25] 继承了 Black 和 Cox[22] 关于违约时间的假定，但是他们认为违约边界不是确定的，而是随机变动的. 他们将利率的动态过程引入到模型中，计算在 Vasicek 单因子利率模型下的信用风险定价，其研究表明，利率的动态变化对信用风险定价的影响并不如想象中的大. Leland 和 Toft[24] 认为公司的内部控制人可以控制公司的资产和负债规模与结构，因此公司违约边界是内生的，并分析了在这一假设下的风险债务定价问题. Briys 和 Varenne[26] 定义了一个随机违约门槛，该违约门槛定义为债券到期日之前以无风险利率贴现的固定值，只要公司价值到达这一门槛，债券持有人就收到一定比例(该比例是外生的) 的公司剩余资产，他们的模型确保支付给债券持有人的现金流不大于违约时的公司价值，且在任何时点门槛值都是公司是否破产的一个很重要的决定性因素，且公司能重新支付债券的本金. Huang 和 Huang[27] 实证检验各种债务违约风险的结构化模型拟合债券信用利差的优良性，发现对投资既债券，信用风险模型仅仅能够解释其信用利差的很小部分，信用风险模型对高收益债券的信用利差解释能力稍大.

关于隐含波动率显示出“Volatility smile/smirk”现象长期存在，其实是提醒所有的期权定价理论拟合市场期权价格数据不完美，Carr&Wu[20] 也仅仅对虚值期权(out-of-the-money) 进行实证检验. 研究新的期权定价理论依然有必要. 在期权定价理论研究中，基于公司资产价值模型条件下公司债务违约与期权定价理论的文献没有看到.

在 Black 和 Scholes[1]、Merton[2] 及后来的欧式期权定价公式研究中，对公司资产负债表中的公司股东权益价值(股票价格) 设定模型，没有涉及公司负债. 导致在欧式期权定价公式中没有出现公司负债，表示公司负债与期权价格没有直接关系. Merton[21] 及后来的公司债券违约风险研究中，对公司资产负债表中的公司资产价值设定模型，关注的重点是公司债券的违约风险，没有涉及公司股票期权的定价问题. 在不同文献的研究中，由于研究者假设的基本决策信息不同，他们给出了不同的结论.

本文假设决策者的决策基于公司资产价值相关(财务) 信息，对公司资产负债表中的公司资产价值设定模型，关注的重点是公司股票期权的定价问题. 尝试分析公司股票、公司债券和公司股票期权同时存在交易条件下，公司股东债务违约对期权价格影响，分析债务条款与期权价格的关系.

选择 Merton[21]、Black 和 Cox[22] 和 Leland 和 Toft[24] 等三个模型为例，是因为这三个模型在结构化信用风险模型中很有代表性. Merton 模型开创了结构化信用风险模型，Black-Cox 模型首先将违约时间随机化，Leland-Toft 模型首次将公司内部人的影响引入到结构化风险模型中. 其它的结构化信用风险模型都是在这三个模型的基础上发展而来的.

1　问题描述

假设上市公司发行股票、零息票债券，公司股东以公司资产(或收益)偿还公司债券，同时，以公司股票为标的的期权在市场中自由交易. 假设金融市场有效，债券、股票、期权的交易没有交易成本，信息对称，市场中的所有参与者同时获得信息，公司股东的资本结构(债务融资)选择与公司股票期权价格无关. 如果公司股东不按照债务合约规定偿还债务，则公司破产，公司股票价值变为零. 公司股东是否违约，取决于当时公司的资产价值和债券合约条款的规定. 根据公司资产价值模型假设和债券合约违约条件的差异，分别讨论在 Merton 模型、Black-Cox 模型和 Leland-Toft 模型下的欧式股票期权定价问题.

1.1　Merton 模型下的期权定价问题

Merton[21] 模型中假设下简单的经济: 设公司资产价值 $V(t)$，公司股票价格为 $S(t)$，公司债券到期日为 T，面值为 D，价格为 $B(t)$，没有票息(coupon)支付，在债券到期日支付债券面值，如果公司股东无法偿还债务，则公司破产，股票价值变为零. 公司资本结构外生给定. 该公司股票的看涨期权的敲定价格为 K，到期日为 T，市场无风险利率 r 是常数.

设公司资产价值 $V(t)$ 服从几何布朗运动

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}V(t)} = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t) \tag{1}$$

其中 $W(t)$ 为标准布朗运动. 风险调整后，在风险中性概率测度下有

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{V(t)} = r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\widetilde{W}(t) \tag{2}$$

其中 r 为(常数)无风险利率，$\widetilde{W}(t)$ 为风险中性概率测度下的标准布朗运动.

因为公司价值 = 股权价值 + 债券价值，所以

$$S(T) = [V(T) - D]^{+} \tag{3}$$

其中 $S(T)$ 为 T 时刻的股价. 由风险中性定价公式[28]，看涨期权在 0 时刻的价格为

$$\begin{aligned} C &= \widetilde{E}[e^{-rT}(S(T) - K)^{+}] \\ &= e^{-rT}\widetilde{E}[(V(T) - (D + K))^{+}] \end{aligned} \tag{4}$$

K 为期权敲定价格. 由式(3)可以看出，如果公司不负债，即 $D = 0$(由式(3)，此时有 $V = S$)，则该模型就退化为 Black-Scholes 模型.

看跌期权的表达式可以类似给出.

1.2　Black-Cox 模型下的期权定价问题

Merton[21] 模型假设债权人只能在债券到期日强迫公司破产清算，而事实上许多债券合约中有所谓的“安全条款(safety covenants)”，即当公司价值 $V(t)$ 低于某个临界值 $V_B(t)$ 时公司就会被强制破产清算，这个临界值 $V_B(t)$ 被称为破产边界. 下面就在 Black 和 Cox[22] 模型下求解欧式期权价格，分析债券合约中的“安全条款”如何影响期权价格.

假设一个与前一节相同的简单经济，仅仅公司资产价值模型不同: 在 Black 和 Cox[22] 中，假设公司资产价值服从几何布朗运动

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{V(t)} = (\mu - q)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t) \tag{5}$$

其中 q 为连续支付的红利率. 破产边界 $V_B(t) = Ce^{-\gamma(T-t)}$，其中 $C > 0$，$\gamma > 0$ 为常数. C 代表违约边界的大小，该值越大越容易违约. γ 代表违约边界随时间变化的速率，该值越大违约边界上升速度越快. 要求 $\gamma > 0$ 是因为投资人一般情况下在距离债券到期日越近的时刻越担心债券违约. 经过风险调整，在风险中性概率测度下有

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{V(t)} = (r - q)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\widetilde{W}(t) \tag{6}$$

设 $F(V(t), t)$ 为 t 时刻看涨期权的价值，则当 $t = T$ 时有

$$\begin{aligned} F(V(T), T) &= [S(V(T), T) - K]^{+} = [(V(T) - D)^{+} 1_{\{V(t) > V_B(t), \forall t \in [0,T]\}} - K]^{+} \\ &= [(V(T) - D)^{+} - K]^{+} 1_{\{V(t) > V_B(t), \forall t \in [0,T]\}} \\ &= [V(T) - (D + K)]^{+} 1_{\{V(t) > V_B(t), \forall t \in [0,T]\}} \end{aligned}$$

其中 $S(V(T), T)$ 代表 T 时刻的股票价格，它依赖于公司 T 时刻的价值 $V(T)$. 根据风险中性定价

公式，看涨期权在 0 时刻的价格为

$$F(V(0),0) = e^{-rT}\widetilde{E}\left[[V(T) - (D+K)]^{+} \times 1_{\{V(t) > V_B(t), \forall t \in [0,T]\}}\right] \tag{7}$$

看跌期权的价格可以类似给出. 从式(7)可以看出，如果假设公司不负债，即 $D = 0$ 且 $1_{\{V(t) > V_B(t), \forall t \in [0,T]\}} = 1$，则该模型就退化为 Black-Scholes 模型.

1.3 Leland-Toft 模型下的期权定价问题

Black 和 Cox[22] 模型中假设公司违约边界是外生给定的. 与此相反，Leland 和 Toft[24] 认为公司控制人(股东)能够决定公司何时破产，从而违约边界应该是内生的. 这时，公司资本结构也是内生的，公司股东选择最优资本结构. 依照 Leland 和 Toft[24] 中的假定，公司价值 $V(t)$ 依然满足式(5)和式(6). 公司在 0 时刻发行面值为 D 的债券，T 时刻到期，以后按滚动方式继续发债. 为简化分析，假设债券不付息，且没有破产成本. 根据以上假设，Leland 和 Toft[24] 中的内生违约边界为

$$V_B = \frac{AD}{rT(B-1)} \tag{8}$$

其中 $a = \frac{r-q-\sigma^2/2}{\sigma^2}$，$z = \frac{(a^2\sigma^4 + 2r\sigma^2)^{0.5}}{\sigma^2}$，$B = -2(z + 1/z\sigma^2 T)N(z\sigma\sqrt{T}) - \frac{2}{\sigma\sqrt{T}}n(z\sigma\sqrt{T}) + z - a + \frac{1}{z\sigma^2 T}$，$A = 2ae^{-rT}N(a\sigma\sqrt{T}) - 2ze^{-rT}N(z\sigma\sqrt{T}) - \frac{2}{\sigma\sqrt{T}}n(z\sigma\sqrt{T}) + \frac{2e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}}n(a\sigma\sqrt{T}) + z - a$，$n(.)$ 表示标准正态分布的概率密度函数，$N(\cdot)$ 表示标准正态分布的概率分布函数. 注意式(8)中的违约边界与时间 t 无关的常数.

假设一个与前一节相同的简单经济，但是，公司债务违约行为与 Leland & Toft[24] 相同，违约边界内生，期权价格与资本结构无关. 则在 Leland-Toft 模型下，期权价格 $F(V(t),t)$ 与 Black-Cox 模型下的股票期权价格高度类似，唯一的区别在于违约边界. 类似于上一节的 Black-Cox 模型，如果在 Leland-Toft 模型中假设公司不负债，则该模型也退化为 Black-Scholes 模型.

2 不同模型下的期权定价公式

在第 1 节中，已经根据风险中性资产定价理论给出了欧式看涨期权的计算方法，下面分别给出不同模型下的欧式期权的定价公式.

定理 1 如果公司资产价值服从 Merton[21] 模型，并且公司股东仅仅当债务到期时公司资产价值小于负债面值时违约，则欧式看涨期权的价格为

$$C(V(t),t) = V(t)N(d_1) - (K+D)e^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{9}$$

其中 $d_1 = \left[\ln\frac{V(t)}{K+D} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]/\sigma \times \sqrt{T-t}$，$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

若在式(9)中令 $D=0$，则式(9)就变成了 Black-Scholes 公式.

定理 2 如果公司价值服从 Black 和 Cox[22] 模型，股东当公司价值下降到外生违约边界以下时违约，则欧式看涨期权的价格为

$$F(V(t),t) = V(t)e^{-(q+\gamma)(T-t)}N(d_1) - (D+K)e^{-r(T-t)}N(d_2) - \left(\frac{V(t)}{V_B(t)}\right)^{-\frac{1}{\sigma^2}(r-q-\gamma)+1}\left[\frac{V_B^2(t)}{V(t)}e^{-(q+\gamma)(T-t)}N(d_3) - (D+K)e^{-r(T-t)}N(d_4)\right]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V(t)}{D+K}\right) + \left(r-q-\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{V_B^2(t)}{V(t)(D+K)}\right) + \left(r-q-\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_4 = d_3 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

若令 $D = \gamma = 0$，再令 $C \to 0+$ 则定理 2 中的公式就退化为 Black-Scholes 公式.

定理 2' 如果公司价值服从 Black 和 Cox[22] 模型，股东当公司价值下降到外生违约边界以下时

违约,则欧式看跌期权的价格为

$$G(V(t),t) = F(V(t),t) + Ke^{-r(T-t)} - \{V(t)e^{-(q+\gamma)(T-t)}N(d_1) - Pe^{-r(T-t)}N(d_2) - A\}$$

其中

$$A = \left(\frac{V(t)}{V_B(t)}\right)^{-\frac{1}{\sigma^2}(r-q-\gamma)+1}\left[\frac{V_B^2(t)}{V(t)}e^{-(q+\gamma)(T-t)}N(d_3) - Pe^{-r(T-t)}N(d_4)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V(t)}{D}\right)+\left(r-q-\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{V_B^2(t)}{V(t)D}\right)+\left(r-q-\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_4 = d_3 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

在 Black-Cox 模型下,违约边界是外生的,下面给出在内生违约边界条件下欧式期权的定价公式.

定理 3 如果公司资产价值服从 Leland 和 Toft[24] 模型,公司股东当公司资产价值下降到内生违约边界以下时违约,则欧式看涨期权的价格为

$$F(V(t),t) = V(t)e^{-q(T-t)}N(d_1) - (D+K)e^{-r(T-t)}N(d_2) - \left(\frac{V(t)}{V_B}\right)^{-\frac{1}{\sigma^2}(r-q)+1}\left[\frac{V_B^2}{V(t)}e^{-q(T-t)}N(d_3) - (D+K)e^{-r(T-t)}N(d_4)\right]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V(t)}{D+K}\right)+\left(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{V_B^2}{V(t)(D+K)}\right)+\left(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_4 = d_3 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

若令 $D\to 0+$,定理 3 中的公式就退化为 Black-Scholes 公式. 则定理 3 中的在 Leland-Toft 模型下,欧式看跌期权的价格与定理 2′中很相似,推导过程和各种参数的影响也基本相同. 不再给出其具体表达式.

定理 1 到定理 3 分别给出了在不同的公司资产模型和违约条件假设下欧式期权的定价公式,模型条件的假设不同,欧式期权的定价公式也不相同. 然而,在所有模型的假设下,公司债务和违约边界都出现在期权定价公式中. 这是与传统的 Black-Scholes-Merton 欧式期权定价模型显著不同的一个特征. 公司的资本结构、债务违约边界会影响欧式看涨期权的价格.

3 资本结构与期权价格

在文献 18 的定理 1 到定理 3 中,公司债务水平是影响期权价格的一个因素. 记公司杠杆率为 $L = D/(S+B)$,分析公司资本结构和违约边界对公司股票期权价格的影响. $S+B$ 为公司的初始资本,不妨假设 $S+B$ 为常数,杠杆率由负债水平 D 决定.

性质 1 如果公司资产价值服从 Merton[21] 模型,则欧式看涨期权的价格随杠杆率的上升而下降.

分析说明: 期权价格 C 关于敲定价 $D+K$ 递减,即 $\frac{\partial C}{\partial D} < 0$. 且负债 D 关于杠杆率 L 是递增的,即 $\frac{\partial D}{\partial L} > 0$. 综上所述有

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{\partial C}{\partial D}\cdot\frac{\partial D}{\partial L} < 0$$

所以,看涨期权的价格随杠杆率的上升而下降.

由于在 Merton 模型下公司只会在债券到期日违约,公司负债 D 对看涨和看跌期权价格的影响恰好相反.

性质 2 在 Black 和 Cox[22] 模型设定下,欧式看涨期权的价格随杠杆率的上升而下降,随外生违约边界的上升而下降.

分析说明: 由式(7)知,期权在 0 时刻的价格为

$$F(V(0),0) = e^{-rT}\tilde{E}\left[[V(T) - (D+K)]^+ \times 1_{\{V(t)>V_B(t),\forall t\in[0,T]\}}\right]$$

由于违约边界 $V_B(t)$ 外生给定,所以杠杆率的上升不影响违约边界而只影响行权收益 $[V(T)-(D+K)]^+$. 注意到负债 D 的增加减少看涨期权的行权收益,从而导致期权价格下降,即 $\frac{\partial F}{\partial D} < 0$. 所以有

$$\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{\partial F}{\partial D}\cdot\frac{\partial D}{\partial L}<0$$

即杠杆率上升导致看涨期权价格下降. 债券合约中安全条款对期权价格的影响通过示性函数 $1_{\{V(t)>V_B(t),\forall t\in[0,T]\}}$ 表现出来. 如果债权人要求更多的保护,他们就会通过提高 C 或者降低 γ 来提高违约边界的门槛 $V_B(t)=Ce^{-\gamma(T-t)}$,此时示性函数 $1_{\{V(t)>V_B(t),\forall t\in[0,T]\}}$ 会变小,从而看涨期权价格会下降.

在 Black-Cox 模型设定下,杠杆率上升使看跌期权的价格上升. 分析如下: 类似看涨期权,有风险中性定价公式得看跌期权的价格可表示为

$$\begin{aligned}G(V(T),T)&=e^{-rT}\widetilde{E}\left[(K-S(V(T),T))^{+}\right]\\&=e^{-rT}\widetilde{E}\left[(K-(V(T)-D)^{+}\times 1_{\{V(t)>V_B(t),\forall t\in[0,T]\}})^{+}\right]\end{aligned}$$

由此可见,负债 D 的上升使得看跌期权的价格 $G(V(T),T)$ 上升.

性质 3 在 Leland 和 Toft[24] 模型设定下,欧式看涨期权的价格随杠杆率的上升而下降,并且下降幅度比在 Black 和 Cox[22] 模型设定下更大.

分析说明: 由式(7)知,期权在 0 时刻的价格为

$$F(V(0),0)=e^{-rT}\widetilde{E}\left[[V(T)-(D+K)]^{+}\times 1_{\{V(t)>V_B,\forall t\in[0,T]\}}\right]$$

其中内生违约边界 V_B 由式(8)给出,所以杠杆率的上升不仅影响行权收益 $[V(T)-(D+K)]^{+}$,而且影响违约边界 V_B. 注意到负债 D 的增加减少看涨期权的行权收益,并且提高违约边界 V_B,即 D 的上升使得 $[V(T)-(D+K)]^{+}$ 和 $1_{\{V(t)>V_B,\forall t\in[0,T]\}}$ 同时下降. 与只影响行权收益的 Black-Cox 外生违约边界模型相比,在 Leland-Toft 内生违约边界模型中,杠杆率上升使得看涨期权价格下降的更多.

在 Leland 和 Toft[24] 模型设置下,杠杆率上升使看跌期权的价格上升且其上升幅度比在 Black 和 Cox1976 模型设定下更大. 分析如下: 类似看涨期权,由风险中性定价公式得看跌期权的价格可表示为

$$\begin{aligned}G(V(T),T)&=e^{-rT}\widetilde{E}\left[K-S(V(T),T)\right]^{+}\\&=e^{-rT}\widetilde{E}\left[K-(V(T)-D)^{+}\times 1_{\{V(t)>V_B,\forall t\in[0,T]\}}\right]^{+}\end{aligned}$$

由上式可见,债务 D 上升不仅使得 $(V(T)-D)^{+}$ 下降,而且通过使内生违约边界 V_B 上升也使得示性函数 $1_{\{V(t)>V_B,\forall t\in[0,T]\}}$ 减小,从而看跌期权的价格上升且上升幅度较 Black 和 Cox[22] 模型设定下更大.

4 数值模拟分析

1) 数值比较杠杆率与期权价格关系

期权价格的影响因素有当前公司资产价值 $V(0)$、市场无风险利率 r、公司资产波动率 σ、期权敲定价格 K、期权到期期限等. 模型中的参数,例如利率 r,波动率 σ 和敲定价格 K 等对期权价格的影响与标准的 Black 和 Scholes[1] 模型中相似,但是,BSM 的期权定价公式与公司资本结构无关,而本文的模型中,公司资本结构是影响期权价格的一个因素.

下面在 Black 和 Cox[22] 模型和 Leland 和 Toft[24] 模型下分别数值计算期权价格,关注的是公司杠杆率 L 对期权价格的影响. 由于 $L=D/(S+B)=D/V(0)$,从而 $D=V(0)L$. 将定理 2,定理 2′和定理 3 中的负债 D 用初始资产价值 $V(0)$ 与杠杆率 L 的乘积替换,可将杠杆率 L 直接反应到期权价格的公式中.

给定一组参数,令 $r=0.05$, $\gamma=0.03$, $q=0.04$, $T=0.5$, $t=0$, $V(0)=50$, $K=30$, $C=1$. $\sigma=0.3$. 在这组参数下,对杠杆率 L 取不同的值,计算出期权价格,列于表 1 中. 表 2 的数据由表 1 中数据计算而来,表示不同杠杆率下期权价格的差. 例如,"0.5 到 0.8"栏下的 1.880 6 表示杠杆率从 0.5 变化到 0.8 后,在 Black 和 Cox[22] 模型下的期权价格变化之差为 1.880 6.

表 1 不同财务杠杆下的期权价格

Table 1 The relationship between options price and financial leverage

	L	0.5	0.8	1	1.1	1.2
Black & Cox	看涨期权	2.141 1	0.260 5	0.052 9	0.023 0	0.009 8
	看跌期权	7.501 6	19.494 5	25.451 5	27.141 2	28.154 2
Leland & Toft	看涨期权	2.401 7	0.310 1	0.065 3	0.028 9	0.012 5

由表 1 中的数据可以看出，在 Black-Cox 模型下，看涨期权的价格随杠杆率的上升而下降，看跌期权的价格随杠杆率的上升而上升，这与性质 2 中的分析相一致. 由表 1 和表 2 中的数据可以看出，在 Leland-Toft 模型下，看涨期权的价格随杠杆率的上升而下降，并且下降速度快于在 Black-Cox 模型下的下降速度，这与性质 3 中的分析相一致.

表 2　看涨期权价格变化比较

Table 2 Comparing the change of call option prices

L	0.5 到 0.8	0.8 到 1	1 到 1.1	1.1 到 1.2
Black & Cox	1.880 6	0.207 6	0.029 9	0.013 2
Leland & Toft	2.094 6	0.244 8	0.036 4	0.016 4

表 1 和表 2 清楚地显示，期权价格与公司资本结构有关. 而 BSM 期权价格与公司资本结构无关. 这是 BSM 模型与本文的期权定价公式的显著差异.

2) 与 BSM 模型的数值比较

为了比较 BSM 模型与本文的期权定价公司的异同，首先需要给出在模型假设下，按照 BSM 模型计算欧式股票期权的定价公式. 而在本文模型框架下计算 BSM 模型下的期权公式，仅仅需要确定的输入参数是在当前(0 时刻) 股票的波动率. 下面给出股票的波动率计算方法.

在本文模型的框架下，公司资产价值 $V(t)$ 服从几何布朗运动，公司股票价格 $S(V,t)$ 是公司资产价值 $V(t)$ 的函数，应用 Ito 公式，可得

$$\mathrm{d}S(V,t) = \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (r-q)V\frac{\partial S}{\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial V^2}\right]\mathrm{d}t + \sigma V\frac{\partial S}{\partial V}\mathrm{d}W.$$

从而，在当前(0 时刻) 公司股票价格的波动率可表达为

$$\sigma_S = \sigma \frac{V}{S}\frac{\partial S}{\partial V}\bigg|_{t=0}.$$

Merton [21] 和 Black 和 Cox [22] 以及 Leland 和 Toft [24] 中都有股票 $S(V,t)$ 的公式，从而可以求出不同模型下的 σ_S. 在 Merton [21] 模型下，股票波动率表达式为

$$\sigma_S = \sigma(1 + D/S).$$

在 Black 和 Cox [22] 模型下，股票波动率的形式就复杂很多，为了节省篇幅，不再给出具体形式.

下面在 Merton [21] 和 Black 和 Cox [22] 模型下比较本文的期权定价公式所给价格与 BSM 模型所给期权价格的差异，分别在实值期权、虚值期权、平价期权情况下进行比较. 相对复杂的 Leland 和 Toft [24] 模型下的比较结论相同，就不在这里给出了.

取模型参数为 $r = 0.05$，$T = 1$，$t = 0$，$q = 0$，$\gamma = 0.1$，$\sigma = 0.3$，$D = 20$，$V_0 = 50$. 首先计算 Merton [21] 模型下的期权价格与 BSM 期权价格，结果列于表 3. 由于 Black 和 Cox [22] 模型中需要选择违约边界，分别对违约边界 $C = 15$、$C = 30$ 和 $C = 45$ 计算 Black 和 Cox [22] 模型下的期权价格与 BSM 期权价格，结果列于表 4. 由于参数 $D = 20$，$V_0 = 50$，$C = 15$ 对应于违约边界小于初始资产价值与债务面值之差，$C = 30$ 对应于违约边界等于初始资产价值与债务面值之差，$C = 45$ 对应于违约边界大于初始资产价值与债务面值之差.

表 3　Merton 模型下的期权价格与 BSM 价格

Table 3 Options prices under BSM model and Merton type model

	Merton 模型		
行权价格	$K = 0.8 * S$	$K = S$	$K = 1.2 * S$
本文看涨	9.983 0	6.656 8	4.271 8
BSM 看涨	9.791 7	6.677 3	4.501 5
本文看跌	2.580 6	5.147 6	8.655 8
BSM 看跌	2.387 7	5.166 6	8.884 0

从表 3 中的数据可以看出，在 Merton [21] 模型设定下，本文的期权价格与 BSM 公式所给期权价格差异不大. 这是因为 Merton [21] 假设债券只能在到期日违约，而从概率角度来说，一个时间点上的违约概率近似于零，因此造成了信用风险对看涨期权的折价效应很小.

从表 4 中的数据可以看出，在 Black 和 Cox [22] 模型设定下，本文的期权价格与 BSM 公式所给期权价格差异非常明显. 这是因为 Black 和 Cox [22] 假设债券在到期日前的任何时刻都可违

约，这样违约概率就比较大，因此造成了信用风险对看涨期权的折价效很明显.

从表 4 中的数据还可以看出信用风险的增大(C 增大) 对 BSM 公式所给期权价格无影响，这是因为 BSM 公式正没有考虑信用风险对期权的影响. 而本文的公式能够体现这种影响.

表 4 Black & Cox 模型下的期权价格与 BSM 价格

Table 4 Options prices under BSM model and Black & Cox type model

行权价格	$K = 0.8* S$			$K = S$			$K = 1.2* S$		
违约边界	$C = 15$	$C = 30$	$C = 45$	$C = 15$	$C = 30$	$C = 45$	$C = 15$	$C = 30$	$C = 45$
本文看涨	6.663 3	6.663 0	5.786 5	4.111 1	4.111 1	3.748 3	2.440 4	2.440 4	2.293 4
BSM 看涨	9.131 5	9.131 5	9.131 5	5.920 5	5.920 5	5.920 5	3.775 6	3.775 6	3.775 6
本文看跌	4.014 1	4.724 0	18.522 6	7.355 1	8.065 3	22.377 7	11.577 7	12.287 9	26.816 0
BSM 看跌	1.727 5	1.727 5	1.727 5	4.409 7	4.409 7	4.409 7	8.158 1	8.158 1	8.158 1

5 结束语

当已知公司财务信息时，能够判断公司债务违约风险，在此条件下，欧式期权定价公式与传统的 Black 和 Scholes [1] 和 Merton [2] 模型显著不同，公司财务杠杆大小和债券的违约边界对期权价格有影响. 在 Merton [21] 、Black 和 Cox [22] 和 Leland 和 Toft [24] 模型下，公司杠杆率上升则看涨期权价格下降，但下降的程度随模型的不同而有所不同. Leland 和 Toft 内生违约边界模型下债务额增加对欧式看涨期权的折价作用最为明显. 公司财务杠杆大小和债券的违约边界对欧式看跌期权价格的影响与其对看涨期权价格的影响恰好相反.

如果投资者拥有详细的关于公司资产价值信息，建议使用投资者本文的模型计算公式股票期权价格. 如果投资者仅仅有公司股票价格相关信息，则 BSM 期权定价公式可能是合适的选择. 投资者在期权市场交易或者应用期权做套期保值、风险管理时，必须充分利用掌握的信息条件. 如果投资者掌握有充分的公司资产与债务信息，建议投资者充分考虑公司股东债务违约风险的潜在影响.

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The valuation of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637 –654.

[2] Merton R C. Theory of rational option pricing [J]. Journal of Economic And Management Science, 1973, 4(1): 141 –183.

[3] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options [J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327 –343.

[4] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(76): 125 –144.

[5] Bakshi G, Cao C, Chen Z. Empirical performance of alternative option pricing models [J]. Journal of Finance, 1997, 52(5): 2003 –2049.

[6] Bates D S. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options [J]. Review of Financial Studies, 1996, 9(1): 69 –107.

[7] Bates D S. Post-87 crash fears in the SP500 futures option market [J]. Journal of Econometrics, 2000, 94(1 –2): 181 –238.

[8] Das S R, Sundaram R K. Of smiles and smirks: A term structure perspective [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1998, 34(2): 211 –240.

[9] Eraker B. Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices [J]. Journal of Finance, 2004, 59(3): 1367 –1404.

[10] Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study [J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63(1): 3 –50.

[11] Scott L O. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: Applications of Fou-

rier inversion methods [J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4): 413 - 426.

[12] Barndorff-Nielsen O E. Processes of normal inverse Gaussian type [J]. Finance and Stochastics, 1997, 2(1): 41 - 68.

[13] Eberlein E, Ulrich K, Karsten P. New insights into smile, mispricing, and value at risk: The hyperbolic model [J]. Journal of Business, 1998, 71: 371 - 406.

[14] Madan D B, Milne F. Option pricing with VG martingale components [J]. Mathematical Finance, 1991, 1(4): 39 - 55.

[15] Madan D B, Carr P, Chang E C. The variance gamma process and option pricing [J]. European Finance Review, 1998, 2: 79 - 105.

[16] Carr P, Wu L. Time-changed levy processes and option pricing [J]. Journal of Financial Economics, 2004, 17(1): 113 - 141.

[17] Carr P, Wu L. Theory and evidence on the dynamics interactions between sovereign credited fault swaps and currency options [J]. Journal of Banking and Finance, 2007, 31(8): 2383 - 2403.

[18] Carr P, Wu L. Stock options and credit default swaps: A joint framework for valuation and estimation [J]. Journal of Financial Econometrics, 2006, 8(4): 409 - 449.

[19] Carr P, Linetsky V. A jump to default extended CEV model: An application of Bessel processes [J]. Finance and Stochastics, 2006, 10: 303 - 330.

[20] Carr P, Wu L. A simple robust link between American puts and credit protection [J]. Review of Financial Studies, 2011, 24(2): 473 - 505.

[21] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates [J]. Journal of Finance, 1974, 29(2): 449 - 470.

[22] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions [J]. Journal of Finance, 1976, 31(2): 351 - 367.

[23] Geske R. The valuation of corporate liabilities as compound options [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1977, 12(4): 541 - 552.

[24] Leland H, Toft K. Optional capital structure endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads [J]. Journal of Finance, 1996, 51(3): 987 - 1019.

[25] Longstaff F A, Schwartz E S. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt [J]. Journal of Finance, 1995, 50(3): 789 - 819.

[26] Briys E, de Varenne F. Valuing risk fixed rate debt: An extension [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1997, 32(2): 239 - 248.

[27] Huang J, Huang M. How much of the corporate-treasury yield spread is due to credit risk? [J]. Review of Asset Pricing Studies, 2012, 2(2): 153 - 202.

[28] **史蒂文. 施里夫. 金融随机分析(第二卷) [M]. 上海: 上海财经大学出版社**, 2008.
Steve Shreeve. Stochastic Calculus for Finance (Volume II) [M]. Shanghai University of Finance and Economics Press, 2008. (in Chinese)

[29] **姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 第 2 版, 北京: 高等教育出版社**, 2008.
Jiang Lishang. Mathematical Models and Methods for Options Pricing [M]. 2nd edition, Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese)

Option pricing given corporate financial information

WANG An-xing[1,2], *DU Kun*[1]

1. School of Finance, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;
2. Shanghai Key Laboratory of Financial Information Technology, Shanghai 200433, China

Abstract: This paper analyzes the European option pricing given corporate financial information. The pricing formula for European option were given under Merton(1974)、Black & Cox(1976) and Leland & Toft (1996) models. We find that a company's capital structure has significant effects on European option prices.

Key words: option pricing; capital structure; credit risk; bankrupt boundary

数学附录

- **定理 1 的证明**

证明　由式(2)和式(4)可见，在 Merton[21] 假设下，期权价格与 BSM 模型的差异在于敲定价格变为 $K + D$. 当然，标的是公司价值 V，而 BSM 模型的标的是公司股票 S.

- **定理 2 的证明**

证明　由式(7)可见，$F(V(t),t)$ 被转化为了一个以 $V(t)$ 为标的物的下降敲出移动关卡看涨期权，敲定价为 $D + K$. 将该问题转化为对应的偏微分方程得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + (r - q) V \dfrac{\partial F}{\partial V} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 V^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial V^2} = rV & (D) \\ F(V_B(t),t) = 0 & (0 \leqslant t \leqslant T) \\ F(V(T),T) = (V(T) - (D + K))^+ & (V_{B(T)} < V(T) < \infty) \end{cases}$$

其中 $D = \{(V(t),t) \mid V_B(t) \leqslant V(t) < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. 注意到移动关卡(障碍)函数 $V_B(t) = Ce^{\gamma t}$ 是时间 t 的指数函数，从而有上面的偏微分方程有解析解

$$F(V(t),t) = V(t)\,e^{-(q+\gamma)(T-t)} N(d_1) - (D + K)\,e^{-r(T-t)} N(d_2) - \left(\frac{V(t)}{V_B(t)}\right)^{-\frac{1}{\sigma^2}(r-q-\gamma)+1} \left[\frac{V_B^2(t)}{V(t)} e^{-(q+\gamma)(T-t)} N(d_3) - (D + K)\,e^{-r(T-t)} N(d_4)\right]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{V(t)}{D + K}\right) + \left(r - q - \gamma + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

$$d_3 = \frac{\ln\left(\dfrac{V_B^2(t)}{V(t)(D + K)}\right) + \left(r - q - \gamma + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},\quad d_4 = d_3 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

求解偏微分方程的过程比较复杂，不在文中给出，感兴趣的读者可以参看姜礼尚[29]中 pp. 263 – 265 的内容.

- **定理 2' 的证明**

证明　利用看涨看跌平价关系得

$$[S(V(T),T) - K]^+ = [K - S(V(T),T)]^+ + S(V(T),T) - K$$

将上式两边贴现到 t 时刻，然后在风险中性概率测度下取条件期望得

$$e^{-r(T-t)} \widetilde{E}\,[(S(V(T),T) - K)^+ \mid F(t)] =$$

$$e^{-r(T-t)} \widetilde{E}\,[(K - S(V(T),T))^+ \mid F(t)] + e^{-r(T-t)} [\widetilde{E}S(V(T),T) - K \mid F(t)]$$

上式左端为看涨期权价格(用 $call$ 表示)，右端第一项为看跌期权的价格(用 put 表示). 从而得

$$call = put + e^{-r(T-t)} \widetilde{E}\,[S(V(T),T) - K \mid F(t)]$$

$$put = call + e^{-r(T-t)} K - e^{-r(T-t)} \widetilde{E}\,[S(V(T),T) \mid F(t)]$$

$$put = call + e^{-r(T-t)} K - e^{-r(T-t)} \widetilde{E}\,[(V(T) - D)^+ 1_{\{V(t) > V_B(t),\forall t \in [0,T]\}} \mid F(t)]$$

上式中看涨期权的价格 $call$ 已经在定理 2 中给出，所以要求 put 只需求出上式右段最后一项. 而这一项恰好是一个以公司价值 $V(t)$ 为标的的下降敲出移动关卡看涨期权，敲定价为 D，移动关卡为 $V_B(t) = Ce^{\gamma t}$. 所以要求 $\widetilde{E}\,[(V(T) - D)^+ \times 1_{\{V(t) > V_B(t),\forall t \in [0,T]\}} \mid F(t)]$ 的解析表达式，只需将定理 2 中 $F(V(t),t)$ 的表达式中的 K 换为 0 即可. 从而看跌期权的价格的解析表达式就可以求出. 也可以像求解看涨期权价格那样直接求解看跌期权的价格，但过程会非常复杂.

- **定理 3 的证明**

证明　只需用式(8)所给出的内生违约边界代替定理 2 中的外生违约边界即可. 具体来说就是在定理 2 的证明中令 $\gamma = 0$，$C =$ 式(8) 即可.