

基于均值-AS 模型的资产配置^①

曾 燕¹, 黄金波²

(1. 中山大学岭南(大学)学院, 广州 510275; 2. 广东财经大学金融学院, 广州 510320)

摘要: AS 指标是诺贝尔经济学奖得主 Aumann 与其合作者 Serrano 近期基于不确定条件下的选择理论提出的新的风险度量指标, 具有诸多优点, 被学者们广泛关注. 本文基于均值-AS 模型研究了正态分布和一般分布下的资产配置问题. 在正态分布下, 得到了组合边界的解析式, 深入探讨了组合边界的特征. 在一般分布下, 将 AS 指标的矩估计式嵌入均值-AS 模型, 实现了风险估计与投资组合优化同步进行. 在较弱的条件下, 证明了均值-AS 模型是凸优化问题, 可基于迭代思想设计算法得到模型的数值解. 蒙特卡洛模拟结果表明该模型和算法准确有效. 最后, 基于中国 A 股市场数据给出了实例分析.

关键词: 均值-AS 模型; AS 指标; 组合边界; 矩估计

中图分类号: F830.9; F224.7; O224 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2016)02-0095-14

0 引 言

日常生活中人们常常需要在不确定环境下进行决策, 从而形成了不确定条件下的选择理论. Diamond 和 Stiglitz^[1] 指出: 人们在决定是否参与一项具有不确定性的游戏时, 会考虑两个关键因素: 一是该游戏的风险有多大, 二是个人的风险偏好或风险承受能力如何. Arrow^[2-3] 和 Pratt^[4] 定义了风险规避的概念, 解决了第二个因素的度量问题. 这是个主观的概念, 依赖于个人的效用函数, 然而他们未能解决第一个问题. 该问题在金融风险管理领域得到了广泛研究, Markowitz^[5] 的开拓性工作之一就是采用方差来度量风险. 随后学者们提出了一些新的风险度量指标, 如下半方差、下偏矩、在险价值(VaR)、条件在险价值(CVaR)等, 并对收益-风险框架下的资产配置问题进行了深

入研究. 但是, 金融风险领域的这些风险度量指标有以下两方面不足. 第一, 这些均为技术性指标, 都是运用概率统计方法定义出来的, 没有考虑人的经济行为. 这些风险度量指标与人的风险偏好之间不能形成对偶关系. 换句话说, 倘若一方面利用这些指标得出资产的风险值, 同时另一方面也可以通过一些方法得到人们的风险规避系数, 但它们之间的关系无法确定. 第二, 这些风险度量指标大多数不满足随机占优单调性^②[6]. 在不确定条件下的选择理论中, 随机占优单调性是被广泛接受的能够客观刻画风险的理论^[7-9].

为了弥补上述风险度量指标的不足, 诺贝尔经济学奖得主 Aumann 与其合作者 Serrano 基于不确定条件下的选择理论, 提出了新的风险度量指标, 简称 AS 指标^[6]. 该指标满足两个基本公理: 对偶性和正齐次性, 并具有一阶与二阶

① 收稿日期: 2014-04-11; 修订日期: 2014-11-20.

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(71231008); 国家自然科学基金资助项目(71201173; 71571195); 广东省自然科学基金杰出青年基金资助项目(2015A030306040); 广东省自然科学基金资助项目(S2013010011959); 广州市哲学社会科学“十二五”规划资助项目(15Q20); 中国博士后科学基金资助项目(2014M562246).

作者简介: 曾 燕(1984—), 男, 江西吉安人, 博士, 副教授. Email: zengy36@mail.sysu.edu.cn

② 随机占优单调性是指: 如果一种资产收益率的分布一阶(或二阶)随机占优另一种资产的收益率分布, 那么前一种资产的风险要小于后一种资产.

随机占优单调性. 此外, 他们还证明了任何满足对偶性和正齐次性的风险度量指标都是 AS 指标的正数倍. Homm 和 Pigorsch^[10] 在更为一般的假设下, 证明了 AS 指标的存在性. Schulze^[11] 拓展了 AS 指标的应用范围, 严格证明了相应条件下 AS 指标的存在性, 并推导出收益率服从指数分布、泊松分布、Gamma 分布、方差-Gamma 分布等几种特殊分布下 AS 指标的解析式. 为了解决 AS 指标只测度绝对风险的不足, Schreiber^[12] 建立了测度相对风险的风险度量指标的理论框架. Foster 和 Hart^[13] 在 AS 指标的启发下, 提出了可替代 AS 指标且可操作的仅关心财富水平的风险指标. 而 Bali 等^[14] 提出了更为一般的风险指标, 拓展了 Aumann 和 Serrano^[6] 及 Foster 和 Hart^[13] 的研究, 并推导出多种 S&P500 指数期权隐含的风险度量指标. 在 AS 指标的应用方面, Homm 和 Pigorsch^[15] 利用 AS 指标定义了投资表现指标, 该指标拓展了夏普比率, 包含了峰度、偏度等高阶矩的信息. 如果投资者对这些信息比较关注, AS 指标是更好的风险度量指标. 此外, Chen 等^[16] 基于 AS 指标得到了现货与期货的套期保值策略, 给出了正态分布下最优套保比率的解析式, 以及一般分布下最优套保比率的估计式. 他们发现基于 AS 指标的套保比率统计上显著不同于基于方差的套保比率, 基于 AS 指标的套保比率相对较低, 并且该指标有更好的经济解释和理论性质, 实证研究也支持上述理论发现.

对 AS 指标的相关研究还在持续深入, 据笔者了解目前还没有学者探讨 AS 指标下的资产配置问题. 本文尝试基于均值-AS 模型对正态分布和一般分布下的资产配置问题进行探讨. 在正态分布假设下, 得到了不含无风险资产和含无风险资产时组合边界的解析式, 并与均值-方差模型对比, 深入探讨了组合边界的特征. 在一般分布假设下, 将 AS 指标的矩估计式嵌入投资组合决策模型, 实现了风险估计与投资组合优化同步进行. 在非常弱的条件下, 证明均值-AS 模型是凸优化问题, 并可用数值算法得到其数值解. 蒙特卡洛模拟结果表明基于 AS 矩估计量的模型和算法是有效且准确的. 最后给出了一个基于我国股票市场数

据的实证算例.

1 AS 指标的定义和性质

Aumann 和 Serrano^[6] 在具有不确定性赌局 (gamble) 决策的框架下提出了 AS 指标. 假设随机变量 x 为某次赌局的净收益, ω 为决策者的初始财富, 假定决策者的效用函数为常绝对风险规避 (CARA) 效用函数

$$U(\omega) = -\gamma^{-1} \exp(-\gamma\omega)$$

风险规避系数 $\gamma > 0$, 决策者参与该项赌局将得到期望效用 $E[U(\omega + x)]$. 如果存在 γ^* 使得

$$-\frac{1}{\gamma^*} \exp(-\gamma^* \omega) = E\left[-\frac{1}{\gamma^*} \exp(-\gamma^* (\omega + x))\right]$$

成立, 则通过定义 $S_x := 1/\gamma^* > 0$, 上式可写为

$$E\left[\exp\left(-\frac{x}{S_x}\right)\right] = 1 \quad (1)$$

Aumann 和 Serrano^[6] 建议使用 S_x 作为该赌局的风险指标. 他们直接由式 (1) 定义该风险指标, 不需依赖效用函数的具体形式. 只是在 CARA 效用函数下, 该指标的定义式 (1) 正好可以由参与赌局的期望效用与不参与赌局的效用相等得到. 基于此, Chen 等^[16] 把 CARA 效用函数作为推导式 (1) 的纽带. 从式 (1) 来看, 该指标是个客观的数值, 仅依赖于净收益的分布, 不依赖于个人的任何特征, 特别是不依赖个人的效用函数.

定理 1 随机变量 x 满足条件 $P(x < 0) > 0$ 且 $E[x] > 0$ 时, 方程 (1) 存在唯一正数解, 其中 $P(\cdot)$ 表示概率, $E[\cdot]$ 为期望算子.

$P(x < 0) > 0$ 表明该赌局存在损失的可能性. $E[x] > 0$ 表明本文考虑的是风险规避者的决策问题, 因为 $E[x] \leq 0$ 时, 风险规避者一定不会参与该赌局, 此时风险可以定义为无穷大. 现实中大部分投资者都是风险规避者, 这样风险-收益权衡研究才有意义. 可见条件 $P(x < 0) > 0$ 和 $E[x] > 0$ 与现实很相符. 若无特殊说明, 下文假设这两个条件成立.

从 AS 指标的定义式 (1) 可看出, 该指标相对于传统的金融风险度量指标有不少优点. 例如, 方差指标只关心离散程度而并不关心方向如何, 它把向上和向下偏离都看作风险, 而 AS 指标通过

给予收益方更少的权重而给损失方更大的权重, 弥补了方差这一缺点. 夏普比率也经常被用作风险指标^[15], 它隐含了个假设, 即资产收益率的均值和标准差完全刻画了资产的收益与风险, 然而金融市场上的实际数据常常表现出尖峰厚尾、非对称等特征, AS 指标是资产收益率的矩生成函数, 除均值和方差外, 还考虑了高阶矩包含的信息. 虽然 VaR 和 CVaR 是近年来被金融领域广泛采用的两大风险度量指标, 已被写入了巴塞尔协议 III 及各国金融监管当局的官方文件, 但是作为风险度量, 这两个指标都有共同不足: 只关心资产的损失方, 而不考虑其收益方, 即使在损失方, VaR 也只关心某一设定概率下的最大损失门限值, CVaR 只关心超过这个门限值的损失的期望. AS 指标不仅考虑了损失还考虑了收益. 此外, Aumann 和 Serrano^[6] 给出了 AS 指标的几个重要性质并对它们进行了详细证明.

性质 1 AS 指标具有随机占优单调性, 即 x_1 一阶(或二阶)随机占优 x_2 , 则 $S_{x_1} < S_{x_2}$.

性质 2 AS 指标具有正奇次性, 即对任意 $t > 0$ 和满足正则条件的变量 x , 有 $S_{tx} = tS_x$.

性质 3 若两个赌局的净收益变量 x_1, x_2 相互独立, 则两个赌局加和的净收益变量 $x_1 + x_2$ 的风险在 x_1 和 x_2 的风险之间, 即 $\min\{S_{x_1}, S_{x_2}\} \leq S_{x_1+x_2} \leq \max\{S_{x_1}, S_{x_2}\}$.

推论 如果两个赌局各自的净收益变量 x_1, x_2 独立同分布, 则它们具有相同的风险值, 即 $S_{x_1} = S_{x_2}$, 并且二者加和的风险值 $S_{x_1+x_2} = S_{x_1} = S_{x_2} = S$.

性质 4 AS 指标具有次可加性, 即对任意两个赌局的净收益变量 x_1 和 x_2 , 有 $S_{x_1+x_2} \leq S_{x_1} + S_{x_2}$.

性质 5 记 S_x^N 为 x 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 假设下的 AS 指标, 则 $S_x^N = \frac{\sigma^2}{2\mu}$.

2 资产和资产组合的 AS 指标

金融市场上的投资组合选择是典型的不确定

条件下的决策过程, 其产生的收益为一随机变量. 因此, AS 指标可用来度量风险资产与资产组合的风险. Homm 和 Pigorsch^[15] 及 Chen 等^[16] 采用 AS 指标度量金融资产的风险, 研究了基金表现测度和风险对冲等问题. 假设投资者的投资总额为 ω , 效用函数为 CARA, 某金融资产的收益率为 r , 存在某 γ^* , 使式子

$$-\frac{1}{\gamma^*} \exp(-\gamma^* \omega) = E\left[-\frac{1}{\gamma^*} \exp(-\gamma^* \omega(1+r))\right]$$

成立. 令 $S_{\omega r} = 1/\gamma^*$, 上式可化为

$$E\left[\exp\left(-\frac{\omega r}{S_{\omega r}}\right)\right] = 1$$

根据正齐次性可得 $S_{\omega r} = \omega S_r$. 可见, 资产收益率的风险与投资者所拥有的财富无关, 由其收益率的分布唯一决定. 投资者面临的总风险与其投资额呈线性关系. 所以下面将投资者的财富标准化为 1.

假设市场上存在 $n (n \geq 2)$ 种风险资产, 第 i 种资产的收益率为 r_i , 则 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ 为 n 种资产的收益率向量^③. 设 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$ 为投资者在 n 种资产上的头寸, $w'r$ 为投资组合的收益率. 根据式 (1), 该组合的风险 S_w 可通过下式求出^④

$$E\left[\exp\left(-\frac{w'r}{S_w}\right)\right] = 1 \tag{2}$$

令 $z := w'r/S_w$, $B(w) := E[\exp(-z)r]$, $C(w) := E[\exp(-z)w'r]$.

定理 2 如果 $C(w) < 0$, 则 S_w 是组合头寸 w 的凸函数.

证明见附录.

其实 $C(w) < 0$ 是相对容易满足的假设条件, 这是由 $\exp\left(-\frac{x}{S_x}\right)x$ 的函数形式决定的. 对任意固定实数 $S_x > 0$, 当 $x < 0$ 时, 函数 $\exp\left(-\frac{x}{S_x}\right)x$ 取值为负数, 且随着 x 的下降而趋向于 $-\infty$. 而当 $x >$

③ 如无特殊说明所有向量都定义为列向量, 符号“'”表示转置.

④ 按照前文定义组合的 AS 指标应记为 $S_{w'r}$, 但为了简洁在不引起混淆的情况下, 简写为 S_w .

0 时, 函数值 $\exp\left(-\frac{x}{S_x}\right)x$ 为正数而且随着 x 的增加而趋于零. 只要组合的收益率不是极端地集中在大于零的收益方, 即 $w'r$ 能够取到充分的负值, $C(w) < 0$ 即可满足. 在实际的金融市场中, 几乎所有风险资产的收益率都有正有负, 所以 $C(w) < 0$ 是个较弱的条件. 下文实证研究也证实了这个结论. 此外, 在正态分布假设下, 显然有 $C(w) = -\mu_p < 0$, 其中 μ_p 为组合收益率的均值^⑤.

3 正态分布下的 Mean-AS 模型

假设上述 n 种风险资产的收益率向量 r 服从多元正态分布 $N(\mu, \Sigma)$, 市场交易无摩擦, 且允许投资者进行卖空操作. 投资者的财富标准化为 1, 记 e 为元素全是 1 的 n 维列向量, 则 $w'e = 1$. 根据多元正态分布的性质, 组合收益率 $w'r$ 服从一元正态分布 $N(\mu_p, \sigma_p^2)$, $\mu_p = w'\mu$, $\sigma_p^2 = w'\Sigma w$. 根据性质 5, 资产组合的风险 $S_w^N = \frac{\sigma_p^2}{2\mu_p}$. 沿用均值-方差模型的两个基本假设: 1) Σ 是正定矩阵; 2) r_1, r_2, \dots, r_n 是非共线性的. 类似于均值-方差模型, 可建立如下均值-AS 模型

$$(P_1) \begin{cases} \min_w S_w^N = \frac{w'\Sigma w}{2w'\mu} \\ \text{s. t. } w'\mu \geq u, w'e = 1 \end{cases}$$

其中 u 为给定的收益率. 可以证明不等式约束在最优解处是紧的.

容易看出, 在正态分布假设下优化问题 (P_1) 的最优策略与均值-方差模型的最优策略是相同的. 令 $a = e'\Sigma^{-1}\mu$, $b = \mu'\Sigma^{-1}\mu$, $c = e'\Sigma^{-1}e$, $d = bc - a^2$. 利用拉格朗日方法, 容易得到上述问题的最优解为

$$w^* = d^{-1} [(cu - a)\Sigma^{-1}\mu + (b - au)\Sigma^{-1}e]$$

把 w^* 代回目标函数, 可得 n 种风险资产投资组合的组合边界为

$$S_w^N = \frac{c}{2d}u + \frac{b}{2d}\frac{1}{u} - \frac{a}{d}, u \neq 0 \quad (3)$$

与均值-方差模型不同. 容易证明当 $u > 0$ 时, $S_w^N > 0$; 当 $u < 0$ 时, $S_w^N < 0$. 在均值-AS 平面, 这是两条分别落在第一象限和第三象限的光滑曲线^⑥. 考虑到经济意义和定理 1 中期望收益率大于零的条件, 本文只研究 $u > 0$ 的情况(见图 1 曲线 I). 此时的曲线就是投资组合的组合边界, 在组合边界的所有组合中, 存在一个使 S_w^N 达到最小的组合, 称为最小风险组合(即图 1 点 N). 易算得该点纵坐标 $u_{\min S} = \sqrt{b/c}$, 横坐标 $S_{\min} = \frac{b\sqrt{c} - a\sqrt{b}}{d\sqrt{b}} > 0$. 在相同的风险下, 投资者一定会选择收益率最高的组合, 所以在组合边界上 N 点以上的部分为有效边界.

若市场引入一无风险资产, 其收益率为 r_f , 其它条件不变, 则组合的收益率为 $w'r + (1 - w'e)r_f$, 服从正态分布 $N(w'\mu + (1 - w'e)r_f, w'\Sigma w)$, 相应的均值-AS 模型为

$$(P_2) \begin{cases} \min_w S_w^{Nf} = \frac{w'\Sigma w}{2(w'\mu + (1 - w'e)r_f)} \\ \text{s. t. } w'\mu + (1 - w'e)r_f \geq u \end{cases}$$

类似分析, 可得问题的解析解为

$$S_w^{Nf} = \frac{(u - r_f)^2}{2uh} = \frac{1}{2h}u + \frac{r_f^2}{2h}\frac{1}{u} - \frac{r_f}{h}, \quad (4)$$

$$u \neq 0$$

其中 $h = cr_f^2 - 2ar_f + b$.

易证当 $u > 0$ 时, $S_w^{Nf} > 0$; 当 $u < 0$ 时, $S_w^{Nf} < 0$. 在均值-AS 平面, 这也是两条分别落在第一象限和第三象限的光滑曲线. 本文把 $u > 0$ 时的曲线定义为存在无风险资产时的组合边界(见图 1 曲线 II), 与均值-方差模型不同, 引入无风险资产的组合边界是一条曲线, 而非直线. 在该曲线上, 使 S_w^{Nf} 达到最小的点为 $(0, r_f)$, 曲线上 $u \geq r_f$ 的部分是有效边界.

⑤ 因为当 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, 可以证明 $E[xe^{-x/S_x}] = -\mu$. 同时若收益率向量 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ 服从联合正态分布, 则其组合收益率 $w'r$ 服从正态分布. 所以可得正态分布下 $C(w) = -\mu_p < 0$.

⑥ 由定理 1 条件可知, 期望收益率大于零时定理 1 才成立, AS 才有正数解; 即全文在风险规避者假设下进行讨论. $u = 0$ 时, 风险规避者不会参与该投资, 此时风险值为无穷大, 这种特殊情况不在本文考虑之内.

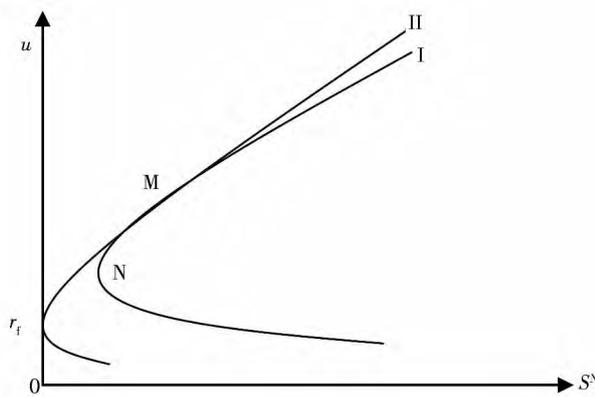


图 1 均值-AS 模型下的组合边界

Fig. 1 Portfolio frontier of mean-AS models

命题 1 在正态分布假设和均值-AS 模型框架下, 模型(P_1) 和(P_2) 所得的曲线只有 1 个交点, 该点的坐标记为(S^*, μ^*), 则(i) 当 $a < 0$ 或 $a > 0$ 且 $r_f \in (a/c, b/a)$ 时 $\mu^* < 0$; (ii) 当 $a > 0$ 且 $r_f \in (0, a/c) \cup (b/a, \infty)$ 时 $\mu^* > 0$.

证明 令 $S_w^N = S_w^{Nf}$, 即

$$\frac{c}{2d}u + \frac{b}{2d} \frac{1}{u} - \frac{a}{d} = \frac{(u - r_f)^2}{2uh}$$

此式可化简为

$$(d - ch)u^2 + 2(ah - dr_f)u + dr_f^2 - bh = 0$$

显然, 方程的判别式为

$$\Delta = 4 [(ah - dr_f)^2 - (d - ch)(dr_f^2 - bh)] = 0$$

所以, 可得 $u^* = \frac{dr_f - ah}{d - ch}$ 此时

$$S^* = \frac{(u^* - r_f)^2}{2u^*h}$$

故两曲线只有 1 个交点. 又因为

$$d - ch = bc - a^2 - c(cr_f^2 - 2ar_f + b) = -(cr_f - a)^2 < 0$$

而

$$dr_f - ah = (bc - a^2)r_f - a(cr_f^2 - 2ar_f + b) = -(ar_f - b)(cr_f - a)$$

当 $a < 0$ 时 $ar_f - b < 0$ 且 $cr_f - a > 0$ 所以 $dr_f - ah > 0$, 从而得 $u^* < 0$; 当 $a > 0$ 时, 由 $bc - a^2 > 0$, 可得 $a/c < b/a$.

如果 $0 < r_f < a/c$, 则 $cr_f < a$ 且 $ar_f < b$, 此时 $dr_f - ah < 0$, 进而 $u^* > 0$; 如果 $a/c < r_f < b/a$, 则 $cr_f > a$ 且 $ar_f < b$, 此时 $dr_f - ah > 0$, 进而 $u^* < 0$; 如

果 $r_f > b/a$ 则 $cr_f > a$ 且 $ar_f > b$, 此时 $dr_f - ah < 0$, 进而 $u^* > 0$.

命题 2 在正态分布假设和均值-AS 模型框架下, 当 $a > 0$ 且 $r_f \in (0, a/c)$ 时, 含无风险资产的有效边界与不含无风险资产的有效边界相切. 当 $a > 0$ 且 $r_f \in (b/a, \infty)$ 时, 含无风险资产的组合边界与不含无风险资产的组合边界相切, 但有效边界相离. 当 $a < 0$ 或 $a > 0$ 且 $r_f \in (a/c, b/a)$ 时, 含无风险资产的组合边界与不含无风险资产的组合边界相离.

证明 由命题 1 知 模型(P_1) 和(P_2) 所得曲线存在唯一交点(S^*, μ^*). 又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_w^N}{\partial u} - \frac{\partial S_w^{Nf}}{\partial u} &= \frac{cu^2 - b}{2du^2} - \frac{u^2 - r_f^2}{2hu^2} \\ &= \frac{(ch - d)u^2 - bh + dr_f^2}{2dhu^2} \end{aligned}$$

把 $u^* = \frac{dr_f - ah}{d - ch}$ 代入上式分子可得

$$(ch - d)(u^*)^2 - bh + dr_f^2 = 0$$

在交点(S^*, μ^*) 处曲线斜率相同, 所以模型(P_1) 和(P_2) 所得曲线在交点处相切.

由命题 1 可知, 当 $a > 0$ 且 $r_f \in (0, a/c)$ 时, $u^* > 0$. 又因为

$$\begin{aligned} u^* - u_{\min S} &= \frac{ar_f - b}{cr_f - a} - \sqrt{\frac{b}{c}} \\ &= \frac{(a\sqrt{c} - c\sqrt{b})r_f - (b\sqrt{c} - a\sqrt{b})}{(cr_f - a)\sqrt{c}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

所以此时 $u^* > u_{\min S}$, 即切点在有效边界上.

可见此时含无风险资产的有效边界与不含无风险资产的有效边界相切(即图 1 曲线 I 与曲线 II 相切).

同理可证, 当 $a > 0$ 且 $r_f \in (b/a, \infty)$ 时 $\mu^* > 0$, 且 $u^* < u_{\min S}$, 此时含无风险资产的组合边界与不含无风险资产的组合边界在下方相切, 二者的有效边界相离. 当 $a < 0$ 或 $a > 0$ 且 $r_f \in (a/c, b/a)$ 时, 根据命题 1 $\mu^* < 0$, 所以由模型(P_1) 和(P_2) 所得曲线的唯一交点(S^*, μ^*) 位于第三象限, 第一象限内的组合边界没有交点, 所以, 含无风险资产的组合边界与不含无风险资产的组合边界

相离。

命题3 在正态分布假设下,均值-AS模型的有效边界是均值-方差模型有效边界的子集。

由模型(P1)和(P2)可知,在正态分布假设下,均值-AS模型与均值-方差模型的最优组合相同,它们得到的组合边界也相同。只是在不同坐标系(即不同的风险度量)下,曲线形状不同而已。如何在均值-方差坐标系下找到最小AS的组合呢?众所周知,经典的均值-方差模型下的曲线表达式为^[17]

$$\frac{\sigma_p^2}{1/c} - \frac{(\mu_p - a/c)^2}{d/c^2} = 1 \tag{5}$$

简单变形可得 $\sigma_p^2 = \frac{1}{c} + \frac{c}{d}(\mu_p - \frac{a}{c})^2$,即在均值-方差平面,方程(5)的图像是条抛物线(即图2中的曲线Γ),抛物线的顶点A(1/c, a/c)就是最小方差组合(MVP)的方差和均值。

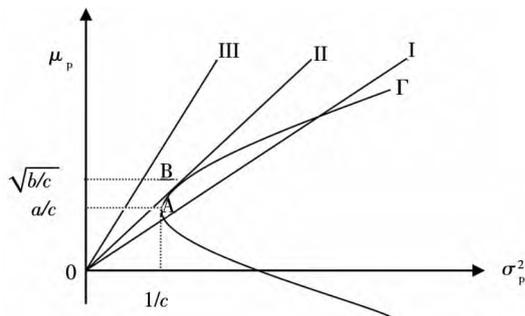


图2 均值方差平面下的组合边界与等AS线

Fig. 2 Portfolio frontier and isoAS curve under mean-variance plane

为了与均值-方差模型作比较,定义如下等AS线:给定S^N为某特定正常数t,根据正态分布下关系式S^N = $\frac{\sigma_p^2}{2\mu_p}$,定义 $\sigma_p^2 = 2t\mu_p$,满足此式的所有点(σ_p², μ_p)就确定了一条无差异曲线,在这条线上所有点的AS值都相等,本文称之为等AS线。在均值-方差平面上,等AS线是从原点出发的一条射线,它的斜率 $\frac{d\mu_p}{d\sigma_p^2} = \frac{1}{2t}$ 。随着t从大到小变化,等AS线绕原点逆时针旋转。图2中展示了3条等AS线,直线I与曲线Γ相交,此时t没有达到最小,直线III与曲线Γ分离,虽然此时的t值小,但是已经超出了可行集,只有当等AS

线与均值-方差模型下的抛物线相切时,才得到最小的AS值。此时直线II与曲线Γ相切,既可行又是所有可行的组合里面t最小,可验证此点的纵坐标就是前文的u_{min S} = $\sqrt{b/c}$ 。简单推导可得 $\sqrt{b/c} - a/c > 0$,最小AS的组合在均值方差的有效组合上,最小方差组合在最小AS组合的下方。因此最小方差组合并不是AS条件下的有效组合,均值-方差的有效边界是μ_p > a/c的部分,而均值-AS的有效边界是μ_p > $\sqrt{b/c}$ 的部分,所以均值-AS有效边界是均值-方差有效边界的子集。

4 一般分布下的 Mean-AS 模型

在正态分布下,AS指标可表示成均值与方差的函数,只要知道n种资产收益率的均值向量和协方差阵,就可以得到组合边界的解析表达式。但在一般分布下,由于事先并不知道分布特征,无法得到AS指标的解析式^⑦。此外,即使在正态分布下,往往并不知道n种资产收益率真实的均值向量和协方差阵,实践中,通常需要利用样本数据对其进行参数估计。本节中,考虑在一般分布下,没有AS指标的解析式时如何利用样本数据得到均值-AS模型的组合边界估计。为此,下文探讨在不做任何分布假设前提下利用样本数据对AS指标进行估计,得到AS指标的矩估计式,然后将AS指标的矩估计式嵌入均值-AS模型,实现风险估计与风险优化同步进行。

记n种资产在T期内的收益率为{r_i}^T_{t=1},其中r_i = (r_{1t}, r_{2t}, ..., r_{nt})',则样本均值向量 $\hat{\mu} = T^{-1} \sum_{t=1}^T r_t$,样本协方差阵 $\hat{\Sigma} = (T-1)^{-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu})(r_t - \hat{\mu})'$ 。那么{w'r_i}^T_{t=1}就构成了投资组合w的收益率样本,投资组合收益率样本均值为w'μ̂,样本方差为w'Σ̂w。在正态分布假设下,利用μ̂和Σ̂替换真实的μ和Σ就得到正态分布假设下均值-AS模型组合曲线的估计。但许多研究指出,金融市场的数据常常表现出尖峰厚尾、非对称等非}}}

⑦ Schulze^[11]给出了指数分布、泊松分布、Gamma分布、方差-Gamma分布等情形下AS指标的解析表达式。

正态分布特征, 正态分布假设通常是不合适的, 当不做任何分布假设时, 根据 AS 指标的定义式, 可以通过如下矩估计方程得到 AS 指标的估计量, 记为 \hat{S}_w , 有

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp\left(-\frac{\mathbf{w}' \mathbf{r}_t}{\hat{S}_w}\right) = 1 \quad (6)$$

令 $z_t = \frac{\mathbf{w}' \mathbf{r}_t}{\hat{S}_w}$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{w}) = \sum_{t=1}^T \exp(-z_t) \mathbf{r}_t$, $\hat{C}(\mathbf{w}) = \sum_{t=1}^T \exp(-z_t) \mathbf{w}' \mathbf{r}_t$, 容易看出 $\hat{\mathbf{B}}$ 为 n 维列向量, \hat{C} 为一个标量. 对式 (6) 两边关于 \mathbf{w} 求导可得

$$\frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{w})}{\hat{C}(\mathbf{w})} \hat{S}_w \quad (7)$$

对式 (7) 两边关于 \mathbf{w} 求导, 可得

$$\frac{\partial^2 \hat{S}_w}{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}'} = \frac{-1}{\hat{C}^3(\mathbf{w})} \left(\sum_{t=1}^T \exp(-z_t) (\hat{C}(\mathbf{w}) \mathbf{r}_t - (\mathbf{w}' \mathbf{r}_t) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{w})) (\hat{C}(\mathbf{w}) \mathbf{r}_t - (\mathbf{w}' \mathbf{r}_t) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{w}))' \right) \quad (8)$$

不难发现, 当 $\hat{C}(\mathbf{w}) < 0$ 时, $\partial^2 \hat{S}_w / \partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}'$ 是一个半正定矩阵, 所以 \hat{S}_w 是 \mathbf{w} 的凸函数.

将 \hat{S}_w 嵌入到均值-AS 模型中, 在保证收益率的前提下最小化风险, 可建立如下模型

$$(P_3) \quad \begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \hat{S}_w \\ \text{s. t. } \mathbf{w}' \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq u, \mathbf{w}' \mathbf{e} = 1 \end{cases}$$

此模型的目标函数 \hat{S}_w 隐含在式 (6) 中. 在没有更多条件的情况下, 无法得到 \hat{S}_w 的解析式. 模型 (P₃) 也无法得到解析解, 只能采用数值算法得到数值解. 求解算法及过程如下:

建立拉格朗日函数

$$L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \hat{S}_w + \lambda_1(\mathbf{w}' \hat{\boldsymbol{\mu}} - u) + \lambda_2(\mathbf{w}' \mathbf{e} - 1)$$

可得到相应的一阶条件为

$$\mathbf{f} = (L_w, L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2}) = \vec{0}$$

其中 $L_w = \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \mathbf{w}} + \lambda_1 \hat{\boldsymbol{\mu}} + \lambda_2 \mathbf{e}$, $\frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \mathbf{w}}$ 的表达式为式 (7), $L_{\lambda_1} = \mathbf{w}' \hat{\boldsymbol{\mu}} - u$, $L_{\lambda_2} = \mathbf{w}' \mathbf{e} - 1$.

相应的 Hessian 矩阵为

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} L_{ww'} & L_{w\lambda_1} & L_{w\lambda_2} \\ L_{\lambda_1 w'} & L_{\lambda_1 \lambda_1} & L_{\lambda_1 \lambda_2} \\ L_{\lambda_2 w'} & L_{\lambda_2 \lambda_1} & L_{\lambda_2 \lambda_2} \end{pmatrix}$$

其中 $L_{ww'} = \frac{\partial^2 \hat{S}_w}{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}'}$, $\frac{\partial^2 \hat{S}_w}{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}'}$ 的表达式为式 (8); $L_{w\lambda_1} = \hat{\boldsymbol{\mu}}$; $L_{w\lambda_2} = \mathbf{e}$; $L_{\lambda_1 w'} = \hat{\boldsymbol{\mu}}'$; $L_{\lambda_1 \lambda_1} = L_{\lambda_1 \lambda_2} = 0$; $L_{\lambda_2 w'} = \mathbf{e}'$; $L_{\lambda_2 \lambda_1} = L_{\lambda_2 \lambda_2} = 0$.

定理 3 在 $\hat{C}(\mathbf{w}) < 0$ 且可行集 $\Omega = \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w}' \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq u, \mathbf{w}' \mathbf{e} = 1\}$ 非空的情形下, 模型 (P₃) 是个凸优化问题.

前文已讨论 $\hat{C}(\mathbf{w}) < 0$ 较容易满足, 所以一般情况下模型 (P₃) 是个凸优化问题, 可利用现有的凸优化算法进行求解, 本文在 Gauss 环境下基于牛顿迭代算法求解该问题.

现引入无风险资产, 其收益率记为 r_f . 记 \mathbf{w} 为投资者投资在风险资产上的头寸, $1 - \mathbf{w}' \mathbf{e}$ 为其投资在无风险资产上的头寸. 其它条件不变, $\{\mathbf{w}' \mathbf{r}_t + (1 - \mathbf{w}' \mathbf{e}) r_f\}_{t=1}^T$ 为含无风险资产时投资组合收益率的样本. 基于此样本及 AS 指标的计算公式 (1), 可用以下矩估计式得到含无风险资产时的 AS 指标的估计 (记为 \hat{S}_w^f)

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp\left(-\frac{\mathbf{w}' (\mathbf{r}_t - \mathbf{e} r_f) + r_f}{\hat{S}_w^f}\right) = 1 \quad (9)$$

将式 (9) 两边对 \mathbf{w} 求导, 并令

$$y_t = \frac{\mathbf{w}' (\mathbf{r}_t - \mathbf{e} r_f) + r_f}{\hat{S}_w^f},$$

$$\hat{\mathbf{B}}_1(\mathbf{w}) = \sum_{t=1}^T \exp(-y_t) (\mathbf{r}_t - \mathbf{e} r_f),$$

$$\hat{C}_1(\mathbf{w}) = \sum_{t=1}^T \exp(-y_t) (\mathbf{w}' (\mathbf{r}_t - \mathbf{e} r_f) + r_f)$$

可得

$$\frac{\partial \hat{S}_w^f}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\hat{\mathbf{B}}_1(\mathbf{w})}{\hat{C}_1(\mathbf{w})} \hat{S}_w^f \quad (10)$$

将式 (10) 两边关于 \mathbf{w} 求导, 并令

$$\mathbf{D}_t = \hat{C}_1(\mathbf{w}) (\mathbf{r}_t - \mathbf{e} r_f) -$$

$$\hat{\mathbf{B}}_1(\mathbf{w}) (\mathbf{w}' (\mathbf{r}_t - \mathbf{e} r_f) + r_f)$$

可得

$$\frac{\partial^2 \hat{S}_w^f}{\partial w \partial w'} = \frac{-1}{\hat{C}_1^3(w)} \left(\sum_{i=1}^T \exp(-y_i) D_i D_i' \right) \quad (11)$$

同样,在 $\hat{C}_1(w) < 0$ 的条件下, \hat{S}_w^f 是 w 的凸函数.

在存在无风险资产的情况下,将 \hat{S}_w^f 嵌入到均值-AS的优化模型,可构建如下优化模型

$$(P_4) \begin{cases} \min_w \hat{S}_w^f \\ \text{s. t. } w \hat{\mu} + (1-w)e r_f \geq u \end{cases}$$

该模型的求解方法和步骤与模型 (P_3) 相同.

5 蒙特卡洛模拟

前两节在理论上讨论了正态分布和一般分布下均值-AS模型组合边界的估计方法.为验证前两节估计方法的准确性,本节基于蒙特卡洛模拟方法给出一些数值算例.蒙特卡洛模拟的思想是:事先设定一个真实的分布,基于该分布生成随机变量的样本,然后假设不知道真实分布的情况下,利用前文提出的估计方法和生成的样本数据来估计均值-AS模型的组合边界,并与真实的组合边界进行比较,来验证前文所提估计方法的准确性.到目前为止,只能得到资产收益率向量服从多维正态分布时的真实组合边界,所以为了比较的方便,以下模拟假设真实分布为多维正态分布.样本生成过程采取 Cholesky 分解法. Cholesky 分解法的思路是:假设 $n(n \geq 2)$ 种资产收益率向量 r 服从 n 维正态分布 $N(\mu, \Sigma)$, 协方差阵 Σ 正定,则由 Cholesky 分解得 $\Sigma = Q \cdot Q$, Q 为上三角矩阵.令 $r = \mu + Q \cdot \varepsilon$, ε 为 n 维标准正态分布,通过简单推导可知 $r \sim N(\mu, \Sigma)$,这样通过 ε 就可以生成多维正态分布 $N(\mu, \Sigma)$ 的随机数.假设市场上存在 4 种风险资产^⑧,它们真实的均值向量和协方差阵为^⑨ $\mu = (0.5 \ 0.8 \ 1.0$

1.2) 和

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

将真实的均值向量 μ 和方差阵 Σ 代入式(3)就可得到真实的均值-AS曲线.以下将假设真实分布未知,利用本文的估计方法对均值-AS曲线进行估计.

模拟 1 不含无风险资产时,均值-AS模型下的组合边界估计.

第 1 步 采用 Cholesky 分解生成多元分布的随机样本,取样本容量 $T = 500$,计算出样本均值向量 $\hat{\mu}$ 和样本方差阵 $\hat{\Sigma}$

第 2 步 取 30 个不同的组合收益率 $u_i, i = 1, 2, \dots, 30$,用以下 3 种方法计算每个收益率对应的最小 AS,这样就得到均值-AS 曲线上 30 个点.

(i) 把 u_i, μ, Σ 代入式(3),得到真实的最小 AS,记为 $S_{\min,i}$; (ii) 把 $u_i, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}$ 代入式(3),得到正态分布假设下最小 AS 的估计值(记为 Nom 方法),记为 $\hat{S}_{n,i}$; (iii) 基于矩估计框架下的模型 (P_3) 和优化算法(记为 Est 方法)估计出最小 AS,记为 $\hat{S}_{e,i}$.为比较后两种估计方法的精度,以 Est 方法为例,定义如下误差指标:绝对误差(absolute error,记为 Ae)和相对误差(relative error,记为 Re)

$$Ae_e = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} |(\hat{S}_{e,i} - S_{\text{true},i})|, \quad Re_e = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} \frac{|(\hat{S}_{e,i} - S_{\text{true},i})|}{S_{\text{true},i}} \quad (12)$$

第 3 步 重复前两步 3 000 次,即进行 3 000 次蒙特卡洛模拟.然后将 3 000 次得到的误差指标 Ae 和 Re 进行平均,得到平均绝对误差和平均相对误差.为了比较,定义了如下占比指标:在 3 000 次的重复模拟中,Est 方法误差大于 Nom

⑧ 4 种以上资产情况类似讨论,后文的实例分析将资产数量拓展至更多维.

⑨ 需要说明的是,这里的数据是虚拟数据,数据的量纲(或单位)可以是任意的,如果是金融资产的收益率数据,量纲可以取%(月收益率)或者‰(日收益率).

方法误差的次数除以 3 000.

4 000 6 000 8 000 10 000 重复前 3 个步骤. 最后

第 4 步 分别取样本容量 $T = 1\ 000\ 2\ 000$,

得到两种估计方法的误差表(见表 1)

表 1 Est 方法和 Nom 方法的估计误差

Table 1 Estimation error of Est method and Nom method

误差指标	平均绝对误差			平均相对误差		
	Est 方法	Nom 方法	占比	Est 方法	Nom 方法	占比
样本量 T						
500	1.203 5	1.198 8	0.529 5	0.261 5	0.259 5	0.548 0
1 000	0.796 5	0.793 2	0.527 0	0.172 8	0.171 1	0.556 5
2 000	0.591 8	0.589 1	0.522 0	0.127 8	0.126 7	0.547 5
4 000	0.407 8	0.406 1	0.525 5	0.088 4	0.087 7	0.544 0
6 000	0.334 3	0.333 5	0.509 5	0.072 5	0.071 9	0.536 5
8 000	0.288 4	0.286 8	0.523 0	0.062 5	0.061 8	0.550 0
10 000	0.259 5	0.259 2	0.500 0	0.056 2	0.055 9	0.522 5

从表 1 可以看出: 1) 随着样本量的增加, 矩估计方法得到的组合边界, 其平均相对误差和平均绝对误差都在下降, 这是矩估计的大样本性质. 2) 随着样本容量的增加, 正态分布假设下得到的组合边界的平均相对误差和平均绝对误差也在下降, 这是因为生成数据的原始分布就是正态分布, 本文这里做了正确的分布假设, 在正态分布假设下, AS 指标由均值和协方差阵唯一决定. 随着样本量增加, 样本均值和样本协方差收敛于真实的均值和方差阵, 从而优化模型的组合边界收敛于真实边界. 3) 虽然矩估计方法和正态分布假设下得到的组合边界都趋向于真实组合边界, 但是矩估计方法不做任何的分布假设, 而后一种方法做了正态分布假设, 而这个假设在本例中正好是对的. 如果这个假设是错误的(实际上金融市场上的数据通常都呈非正态特征), 将会产生模型设定风险, 这时不做任何分布假设的矩估计方法更加有效. 4) 占比一栏的数据说明, 在 3 000 次的重复模拟中, 矩估计方法的误差大于正态假设下误差的占比在 50% 左右(略高于 50%), 这说明两种方法误差大小不分伯仲. 从平均绝对误差值和平均相对误差值来看, 两种估计方法的误差值大多数都在小数点后的第 3 位才开始有所差异. 所以虽然矩估计方法不做任何分布假设, 却能够得到如同做了正确分布假设几乎一样的效果.

图 3 直观地显示, 随着样本容量的增加, 两种

方法得到的组合边界都趋向于真实的组合边界. 另外颇为意外的特征是: 无论样本容量为多少, 两种估计方法得到的组合边界几乎重叠, 出现这种现象的原因是两种估计方法都是利用同样的样本数据进行估计, 两种估计方法共同受到样本质量好坏的直接影响. 另外, 这也进一步说明了不做分布假设的矩估计方法能够得到如同做了正确分布假设几乎一样的效果.

模拟 2 含无风险资产时, 均值-AS 模型下的组合边界估计.

假设市场上不仅有上面 4 种风险资产, 还有 1 种无风险资产, 它的收益率为 $r_f = 0.05$, 其它条件同上. 模拟过程与模拟 1 完全相同. 加入无风险资产之后, 真实的均值-AS 曲线是把均值向量 μ 、方差阵 Σ 和无风险利率 r_f 代入式(4), 而不是式(3). 在正态分布假设(即 Nom 方法)下, 把 $u_i, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}, r_f$ 代入式(4)得到 AS 的估计值. 矩估计方法(即 Est 方法)下, 把样本数据代入模型 (P_4) (而非 (P_3)), 估计出最小 AS, 得到的模拟结果如表 2.

从表 2, 可得到所有表 1 上得到的结论, 说明引入无风险资产之后, 基于矩估计方法的模型和算法同样适用. 图 4 显示了随样本容量增加时, 矩估计方法和正态分布假设方法得到的组合边界都趋于真实的组合边界. 虽然图 4 显示含无风险资产的组合边界接近于直线, 但从正态分布假设下真实均值-AS 曲线的表达式(4)来看, 这的确不是一条直线, 而是曲线.

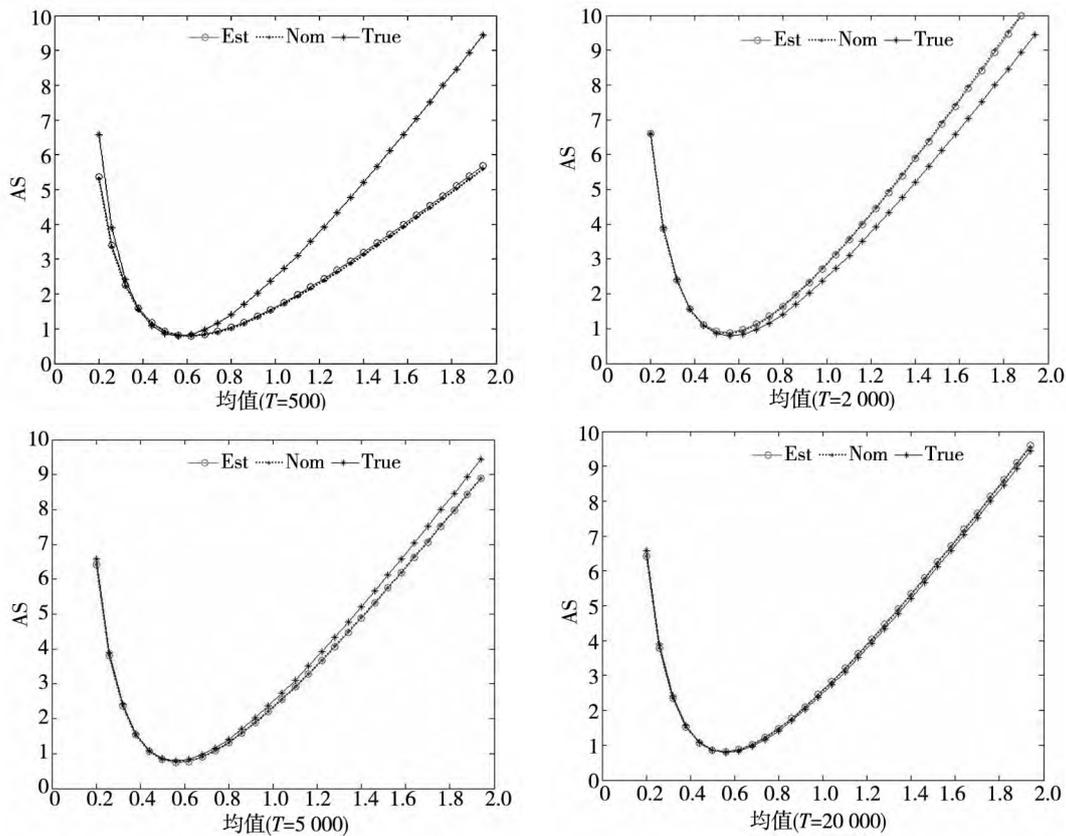


图3 不含无风险资产时的均值-AS 曲线

Fig. 3 Mean-AS portfolio frontier curve without risk-free asset

表2 Est 方法和 Nom 方法的估计误差(存在无风险资产)

Table 2 Estimation error of Est method and Nom method (with risk-free asset)

误差指标	平均绝对误差			平均相对误差		
	Est 方法	Nom 方法	占比	Est 方法	Nom 方法	占比
样本量 T						
500	0.227 7	0.216 0	0.573 5	0.145 6	0.137 5	0.576 5
1 000	0.157 6	0.150 5	0.554 0	0.101 1	0.096 2	0.555 5
3 000	0.090 0	0.086 2	0.554 5	0.058 0	0.055 3	0.555 0
5 000	0.069 3	0.066 6	0.559 0	0.044 7	0.042 8	0.564 5
8 000	0.054 6	0.052 4	0.544 5	0.035 3	0.033 7	0.545 5
10 000	0.050 4	0.047 6	0.565 5	0.032 5	0.030 6	0.568 0

6 实例分析

本节选取我国 A 股市场股票的日对数收益率数据进行实例分析,在理论分析中,假设风险资产收益率的均值为正,这样才能保证它们各自的 AS 指标有解.为保证优化过程能够顺利进行,选取了日收益率的样本均值大于零的股票来进行实证分析.本文选择的股票是:深物业 A、深深宝 A、云南白药、铜陵有色、中金岭南、合肥百货、

格力电器、罗牛山、承德露露、新希望和青岛啤酒共 11 只股票,数据期间为 2007-01-01~2012-12-31.由于在某些交易日,有些股票因各种原因会停牌,所以必须选出那些每只股票都有交易的交易日收盘价数据,经过删减和匹配处理后,每只股票的可用日对数收益率数据为 1 278 个.由于日对数收益率数据都很小,为了方便,把所有的日对数收益率数据都乘以 100,容易算得 11 只股票日对数收益率数据的样本均值和样本协方差阵分别为

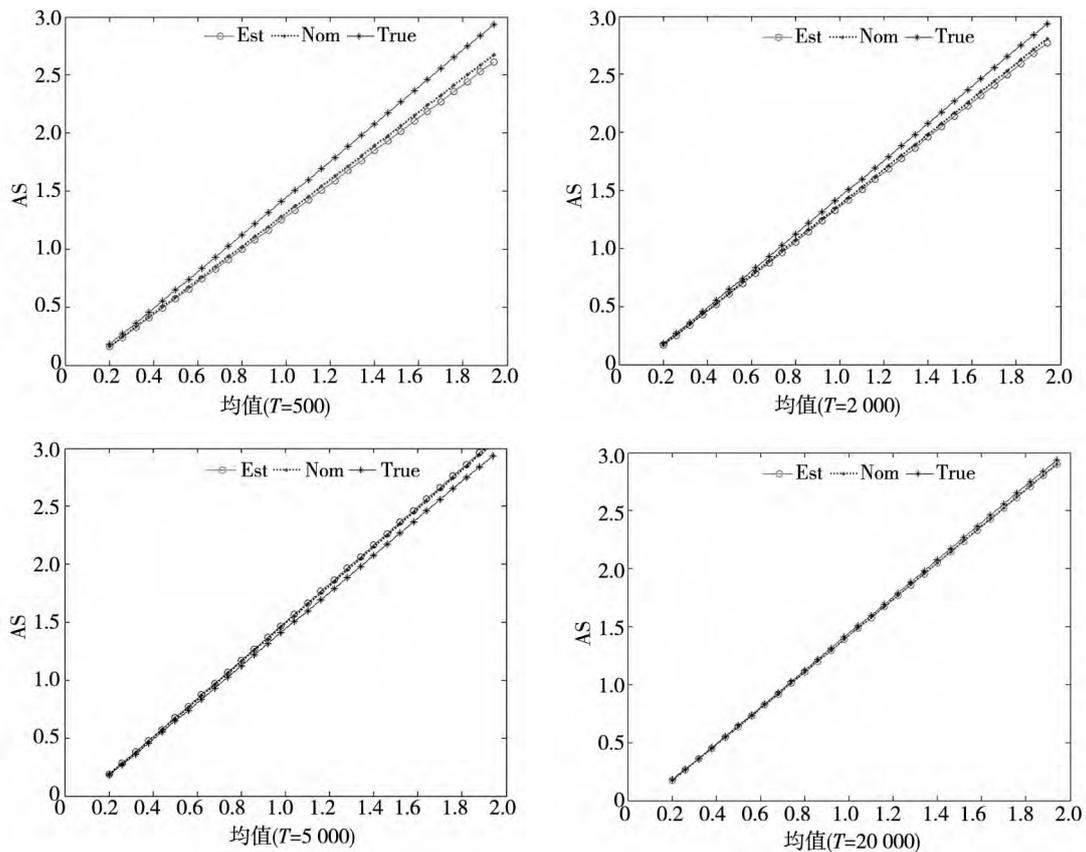


图 4 存在无风险资产时的均值-AS 曲线

Fig. 4 Mean-AS portfolio frontier curve with risk-free asset

$$\hat{\mu} = (0.058\ 1 \quad 0.103\ 9 \quad 0.090\ 9 \quad 0.038\ 1 \quad 0.011\ 1 \quad 0.047\ 7 \quad 0.091\ 3 \quad 0.043\ 6 \quad 0.027\ 9 \quad 0.062\ 3 \quad 0.030\ 6)'$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 11.684\ 8 & -0.071\ 8 & 0.190\ 9 & 0.870\ 7 & 0.221\ 5 & 0.130\ 8 & 0.515\ 8 & -0.048\ 2 & 0.885\ 5 & -0.185\ 0 & -0.016\ 2 \\ -0.071\ 8 & 14.046\ 0 & 0.118\ 9 & -0.169\ 3 & 0.315\ 6 & -0.129\ 9 & 0.562\ 9 & 0.480\ 7 & 0.265\ 7 & -0.033\ 3 & -0.268\ 8 \\ 0.190\ 9 & 0.118\ 9 & 4.901\ 1 & -0.099\ 2 & 0.246\ 2 & 0.201\ 8 & 0.145\ 1 & 0.381\ 6 & 0.682\ 0 & 0.057\ 8 & -0.055\ 6 \\ 0.870\ 7 & -0.169\ 3 & -0.099\ 2 & 12.612\ 0 & 1.788\ 6 & 0.712\ 2 & 0.139\ 0 & 0.615\ 9 & 0.608\ 0 & 0.431\ 1 & 0.266\ 8 \\ 0.221\ 5 & 0.315\ 6 & 0.246\ 2 & 1.788\ 6 & 12.393\ 1 & 2.732\ 4 & 2.405\ 2 & 0.103\ 5 & 0.612\ 0 & 0.600\ 1 & 0.283\ 9 \\ 0.130\ 8 & -0.129\ 9 & 0.201\ 8 & 0.712\ 2 & 2.732\ 4 & 7.470\ 1 & 1.225\ 3 & 0.556\ 6 & 0.688\ 6 & 0.339\ 7 & 0.058\ 4 \\ 0.515\ 8 & 0.562\ 9 & 0.145\ 1 & 0.139\ 0 & 2.405\ 2 & 1.225\ 3 & 6.994\ 0 & 0.383\ 6 & 0.554\ 0 & -0.112\ 1 & 0.381\ 5 \\ -0.048\ 2 & 0.480\ 7 & 0.381\ 6 & 0.615\ 9 & 0.103\ 5 & 0.556\ 6 & 0.383\ 6 & 10.264\ 6 & 0.316\ 2 & 0.296\ 8 & 0.648\ 9 \\ 0.885\ 5 & 0.265\ 7 & 0.682\ 0 & 0.608\ 0 & 0.612\ 0 & 0.688\ 6 & 0.554\ 0 & 0.316\ 2 & 6.986\ 6 & -0.083\ 0 & 0.178\ 1 \\ -0.185\ 0 & -0.033\ 3 & 0.057\ 8 & 0.431\ 1 & 0.600\ 1 & 0.339\ 7 & -0.112\ 1 & 0.296\ 8 & -0.083\ 0 & 10.911\ 3 & -0.022\ 0 \\ -0.016\ 2 & -0.268\ 8 & -0.055\ 6 & 0.266\ 8 & 0.283\ 9 & 0.058\ 4 & 0.381\ 5 & 0.648\ 9 & 0.178\ 1 & -0.022\ 0 & 5.282\ 0 \end{pmatrix}$$

理论上无风险资产的收益率应该小于风险资产收益率的均值,所以假设无风险资产的收益率为 0.01. 利用矩估计方法和正态假设方法,分别估计了只存在前 6 只股票时的组合边界和存在 11 只股票时的组合边界. 图 5 的左侧图为矩估计方法的结果,从图中可看出,含无风险资产的组合边界与不含无风险资产的组合边界在有效边界部

分相切,只存在 6 只股票时的可行集是存在 11 只股票时的可行集的子集,即增加资产的数量可以扩大投资者的选择范围,这与实际相符. 另外,在理论上,存在无风险资产时的组合边界与纵轴相交于点 $(0, r_f)$,但是在基于矩估计的均值-AS 模型 (P_4) 中,由于 \hat{S}_w^f 隐含在表达式 (9) 的分母中,本文的算法无法得到 $\hat{S}_w^f = 0$ 这一点,但这可以通

过直接设定 $u = r_t$ 时, $\hat{S}_w^f = 0$ 来弥补. 图 5 的右侧图为正态分布假设下得到的估计结果, 对比左右两侧图形可以发现, 两个图形几乎相同, 这是因为当收益率的均值很小时(趋近于零), 一般分布下的 AS 值与正态分布假设下的 AS 值非常接近, AS

的这个特征是 Chen 等^[16]的重大发现. 另外, 他们还发现, 对 AS 进行矩估计和计算时, 均值和方差是两个比较重要的矩, 高阶矩对 AS 计算的影响并不大, 而正态分布正好就只考虑均值和方差. 图 5 的结果印证了 Chen 等^[16]的结论.

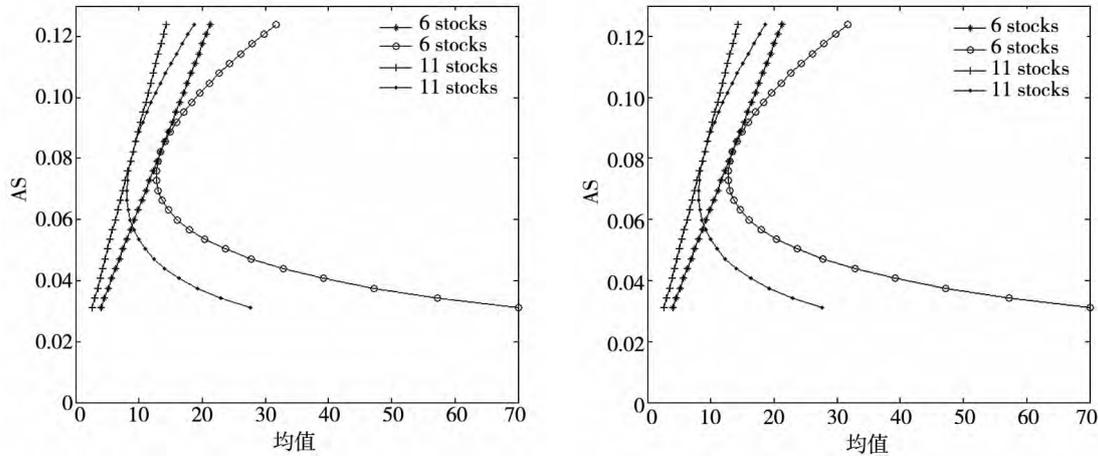


图 5 我国均值-AS 曲线估计(左图: Est 方法, 右图: Nom 方法)

Fig. 5 Mean-AS curve estimation of Chinese share market (left: Est method, right: Nom method)

7 结束语

本文基于诺贝尔经济学奖得主 Aumann 与其合作者 Serrano 提出的新风险度量指标 AS, 构建了均值-AS 模型. 本文得到了正态分布假设下均值-AS 模型组合边界的解析式, 并深入探讨了正态分布下该模型组合边界和有效边界特征. 在不做任何分布假设下, 利用矩估计方法对 AS 指标进行估计, 得到 AS 指标的矩估计式, 然后将矩估计式

嵌入均值-AS 模型, 并基于迭代算法对该模型进行求解, 得到一般分布下均值-AS 曲线的估计. 模拟结果表明, 本文的矩估计算法虽不做任何的分布假设, 但能得到与做了正确分布假设一样的精度.

AS 是最近提出来具有众多优点的新风险度量指标, 对它的研究和认识还有待进一步深入, 下一步的研究可考虑, 在正态分布假设下基于均值-AS 模型的资产定价问题, 以及一般分布下基于 AS 的风险对冲和风险管理问题以及动态投资组合优化问题等.

参考文献:

[1]Diamond P A, Stiglitz J E. Increases in risk and in risk aversion[J]. Journal of Economic Theory, 1974, 8(3): 337-360.
 [2]Arrow K J. Aspects of the Theory of Risk-Bearing[M]. Helsinki: Yrjö Jahnssonin Säätiö, 1965.
 [3]Arrow K J. Essays in the Theory of Risk-Bearing[M]. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1971.
 [4]Pratt J W. Risk aversion in the small and in the large [J]. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1964, 32(1/2): 122-136.
 [5]Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
 [6]Aumann R J, Serrano R. An economic index of riskiness[J]. Journal of Political Economy, 2008, 116(5): 810-836.
 [7]Hadar J, Russell W R. Rules for ordering uncertain prospects[J]. American Economic Review, 1969, 59(1): 25-34.
 [8]Hanoch G, Levy H. The efficiency analysis of choices involving risk[J]. The Review of Economic Studies, 1969, 36(3): 335-346.
 [9]Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing risk: I. A definition[J]. Journal of Economic Theory, 1970, 2(3): 225-243.
 [10]Homm U, Pigorsch C. An operational interpretation and existence of the Aumann-Serrano index of riskiness[J]. Economics

Letters, 2012a, 114(3): 265–267.

- [11] Schulze K. Existence and computation of the Aumann-Serrano index of riskiness and its extension [J]. *Journal of Mathematical Economics*, 2014, 50(1): 219–224.
- [12] Schreiber A. An Economic Index of Relative Riskiness [R]. Jerusalem: Hebrew University, 2012.
- [13] Foster D P, Hart S. An operational measure of riskiness [J]. *Journal of Political Economy*, 2009, 117(5): 785–814.
- [14] Bali T G, Cakici N, Chabi-Yo F. A generalized measure of riskiness [J]. *Management Science*, 2011, 57(8): 1406–1423.
- [15] Homm U, Pigorsch C. Beyond the sharpe ratio: An application of the Aumann-Serrano index to performance measurement [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2012b, 36(8): 2274–2284.
- [16] Chen Y T, Ho K Y, Tzeng L Y. Riskiness-minimizing spot-futures hedge ratio [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2014, 40(3): 154–164.
- [17] Levy H. Stochastic dominance and expected utility: Survey and analysis [J]. *Management Science*, 1992, 38(4): 555–593.
- [18] 姚 京, 李仲飞. 基于 VaR 的金融资产配置模型 [J]. *中国管理科学*, 2004, 12(1): 8–14.
Yao Jing, Li Zhongfei. The asset allocation model based on VaR [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2004, 12(1): 8–14. (in Chinese)

Asset allocation based on mean-AS model

ZENG Yan¹, HUANG Jin-bo²

1. Lingnan (University) College, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China;
2. School of Finance, Guangdong University of Finance & Economics, Guangzhou 510320, China

Abstract: The AS index is a new risk measure put forward recently by Aumann and Serrano who are inspired by the theory of choice under uncertainty. It has many advantages over other risk measures and attracts many scholars. In this paper, we consider an asset allocation problem with the Mean-AS model under normal distribution and general distribution assumption, respectively. In the former case, we obtain an analytical expression of portfolio frontier and thoroughly discuss the characteristics of portfolio frontier. In the latter case, we embody the AS moment estimator into the Mean-AS portfolio optimization model and implement risk estimation and portfolio optimization simultaneously. Under very mild conditions, we prove that the Mean-AS model is a convex optimization problem and an iterative algorithm can be designed to obtain its numerical solution. Monte Carlo simulation results show that the Mean-AS model and our algorithm are accurate and effective. Finally, an empirical case of stock portfolio in Chinese A-stock market is illustrated.

Key words: mean-AS model; AS index; portfolio frontier; moment estimator

附录:

定理 1 的证明

存在性 令 $f(\alpha) := E[e^{-\alpha x}] - 1$, 有 $f'(\alpha) = -E[xe^{-\alpha x}]$, $f''(\alpha) = E[x^2 e^{-\alpha x}] > 0$, 因此 $f(\cdot)$ 是严格凸函数. 又由于 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x} dF_X(x) = \infty$, $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dF_X(x) > 0$ 及 $E[e^{-\alpha x}] = \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x} dF_X(x) + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dF_X(x)$, 其中 $F_X(x)$ 为 x 的分布函数, 所以 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} E[e^{-\alpha x}] - 1 >$

0. 又因为 $f(0) = 0$, $f'(0) = -E[x] < 0$, 所以存在 $\alpha^* \in (0, \infty)$ 使得 $f(\alpha^*) = 0$.

唯一性 假设存在两个正数 α_1, α_2 满足 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, 使得 $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$, 又因 $f(0) = 0$, 所以由罗尔定理知, 存在 $\alpha'_1 \in (0, \alpha_1)$, $\alpha'_2 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ 使得 $f'(\alpha'_1) = f'(\alpha'_2) = 0$. 再次利用罗尔定理可得, 存在 $\alpha_{12} \in (\alpha'_1, \alpha'_2)$ 使得 $f''(\alpha_{12}) = 0$, 这与 $f''(\alpha) > 0$ 矛盾, 所以假设不成立, 故方程 (1) 不存在两个正数解. 同样方程 (1) 也不存在两个以上正数解. 综上所述, 存在唯一 $\alpha^* \in (0, \infty)$ 使得

$f(\alpha^*) = 0$. 令 $S_x^* = 1/\alpha^*$ 即为方程 (1) 的唯一正数解.

根据以上的推导知函数 $f(\alpha)$ 大致图像(见图 A-1), 从图中不难发现: $f(0) = f(1/S_x^*) = 0$. 当 $0 < \alpha < 1/S_x^*$ 时 $f(\alpha) < 0$; $\alpha > 1/S_x^*$ 时 $f(\alpha) > 0$.

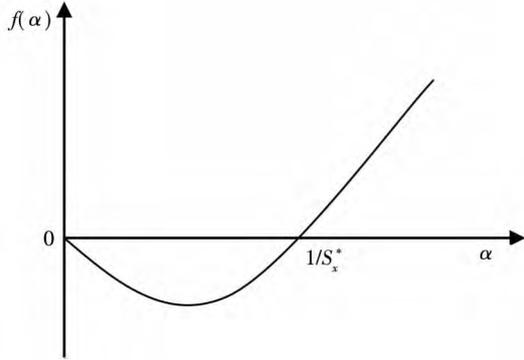


图 A-1 $f(\alpha)$ 的函数图像

Fig. A-1 Function image of $f(\alpha)$

定理 2 的证明

式 (2) 两边分别对 w 求导可得

$$\frac{\partial S_w}{\partial w} = \frac{B(w)}{C(w)} S_w$$

再对上式关于 w 求导有

$$\frac{\partial^2 S_w}{\partial w \partial w} = \frac{B(w)}{C(w)} \left(\frac{\partial S_w}{\partial w} \right) + \frac{S_w}{C^2(w)} \times \left(C(w) \frac{\partial B(w)}{\partial w} - B(w) \frac{\partial C(w)}{\partial w} \right)$$

又因为

$$\frac{\partial B(w)}{\partial w} = \frac{-1}{S_w} E[\exp(-z) r r'] +$$

$$\frac{1}{S_w C(w)} E[\exp(-z) (w' r) r (B(w))'],$$

$$\frac{\partial C(w)}{\partial w} = (B(w))' - \frac{1}{S_w} E[\exp(-z) (w' r) r'] +$$

$$\frac{(B(w))'}{S_w C(w)} E[\exp(-z) (w' r)^2]$$

令 $D(w) = C(w) r - B(w) (w' r)$ 经化简可得

$$C(w) \frac{\partial B(w)}{\partial w} - B(w) \frac{\partial C(w)}{\partial w} =$$

$$\frac{-1}{S_w C(w)} E[\exp(-z) D(w) (D(w))'] -$$

$$B(w) (B(w))'$$

进而可得

$$\frac{\partial^2 S_w}{\partial w \partial w} = \frac{S_w}{C^2(w)} [B(w) (B(w))' +$$

$$C(w) \frac{\partial B(w)}{\partial w} - B(w) \frac{\partial C(w)}{\partial w}]$$

$$= \frac{-1}{C^3(w)} E[\exp(-z) (D(w)) (D(w))']$$

容易看出当 $C(w) < 0$ 时, $\frac{\partial^2 S_w}{\partial w \partial w}$ 为半正定矩阵, 所以 S_w

为 w 的凸函数.

定理 3 的证明

易看出可行集 Ω 里的条件都是线性的, 所以 Ω 是个凸集, 而在 $\hat{C}(w) < 0$ 的条件下, 由式 (8), 不难发现模型 (P_3) 的目标函数 \hat{S}_w 是 w 的凸函数. 所以 (P_3) 是一个凸优化问题.