

基于非参数回归的遗漏变量检验^①

王霞¹, 洪永森^{2,3}

(1. 中国科学院大学经济与管理学院, 北京 100190; 2. 康奈尔大学经济学系与统计学系, 纽约 14850;
3. 厦门大学王亚南经济研究院, 厦门 361005)

摘要: 基于非参数回归提出了同时适用于横截面和时间序列数据的遗漏变量检验统计量. 与现有文献相比, 该统计量不仅避免了模型设定偏误问题, 而且具有更高的局部检验功效, 能够识别出速度更快的收敛到原假设的局部备择假设. 该文选择单一带宽估计条件联合期望和条件边际期望, 允许二者的非参数估计误差共同决定统计量的渐近分布, 不仅改善了统计量的有限样本性质, 而且避免了选择多个带宽和计算多个偏差项产生的繁杂工作. 蒙特卡洛模拟结果表明该统计量具有良好的有限样本性质以及比 Ait-Sahalia 等更高的检验功效. 实证分析采用该统计量捕获了 F 统计量无法识别的产出缺口与通胀之间关系, 验证了非线性“产出一通胀”型菲利普斯曲线在中国的适用性.

关键词: 遗漏变量; 非参数回归; 非线性; 检验功效; 均值格兰杰因果关系

中图分类号: F224.0 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2016)03-0077-15

0 引言

计量经济学者一般假设经济系统是个随机过程, 该过程由某个未知的计量经济模型支配. 由于研究人员无法知晓真实模型形式, 只能选择一系列模型近似经济系统的动态特征, 这使得模型选择成为计量经济学中的基本问题. 尽管在通常情况下引入更多解释变量能够优化模型近似效果, 但是, 由于简单模型相对于复杂模型, 具有更加明晰的经济含义, 分析人员倾向于选择简单模型, 即计量经济学中的“KISS” (keep it sophisticatedly simple) 原则.

简化模型的重要方式便是通过严格检验剔除回归模型中的冗余解释变量. 当样本容量有限时, 在回归模型中引入过多解释变量, 不仅会降低模型参数估计和假设检验效率, 而且会导致过度拟合问题, 使得具有良好样本内拟合效果的模型无

法应用于经济预测中. 特别是由于非参数模型存在“维数灾” (curse of dimensionality) 问题, 解释变量个数的增加会对模型估计收敛速度产生严重影响, 因此, 在非参数模型中减少解释变量个数显得尤为重要. 然而, 盲目删减解释变量, 不仅会忽略某些重要解释变量对被解释变量的影响效果, 还有可能导致遗漏变量偏差问题, 错误估计被解释变量对其它解释变量的反应程度. 因此, 在建模过程中合理判断是否应当删除某些解释变量, 即检验遗漏变量问题, 具有重要的理论意义和应用价值.

在线性高斯模型中, 研究人员可以借助检验参数显著性的 t 统计量或者 F 统计量考察遗漏变量问题. 然而, t 和 F 统计量仅能识别线性影响关系, 无法捕获经济系统中普遍存在的非线性特征. 随着非线性建模技术在经济金融分析中的广泛应用, 越来越多的计量分析人员注意到 t 和 F 统计

① 收稿日期: 2013-05-21; 修订日期: 2013-12-25.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目 (71401160); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目 (14YJC790120); 中国科学院大学校部教师与研究所科研合作专项基金资助项目.

作者简介: 王霞 (1985—), 女, 山东济宁人, 博士, 讲师. Email: wangxia@ucas.ac.cn

量在遗漏变量检验中的局限性,并尝试构建适用于非线性分析框架的检验统计量.与线性模型形式单一不同的是,现有文献表明经济金融变量之间的非线性关系具有多种表现形式,这使得针对某一特定非线性模型的检验统计量极易受到模型设定偏误而得出错误的检验结论.为了避免这一问题,现有文献一般借助非参数方法研究非线性框架下的遗漏变量检验问题.在独立同分布数据生成过程的假定下,Fan和Li^[1]以及Lavergne和Vuong^[2]基于非参数估计残差,构造了遗漏变量检验统计量.为了探讨时间序列分析中的遗漏变量问题,Ait-Sahalia等^[3]在 β -混合条件下,采用非参数核方法估计原假设和备择假设下的条件期望,并基于二者之差构造了遗漏变量检验统计量.这些研究在很大程度上丰富和完善了相关领域的理论研究成果,为研究人员探讨实际经济金融问题提供了重要的理论工具和建模依据.

本文基于非参数回归构造了遗漏变量的检验统计量,探讨了该统计量的渐近分布和局部检验功效,并采用蒙特卡洛模拟考察了统计量的有限样本性质.该统计量不仅避免了模型设定偏误问题,而且同时适用于横截面数据和时间序列数据,并且在原假设成立时渐近服从于标准正态分布,能够十分便利地应用到实证分析中.特别地,本文统计量相对于文献[1-3]中的统计量,具有如下重要优势:第1,该统计量具有更高的局部检验功效,能够识别出速度更快的收敛到原假设的局部备择假设.文献[1-3]中检验统计量的收敛速度依赖于备择假设下解释变量的个数,而本文统计量的收敛速度仅依赖于原假设中解释变量的维度,这使得本文统计量缓解了非参数检验中普遍存在的“维数灾”问题,具有更高的检验功效;第2,与现有文献不同的是,本文采用单一带宽估计条件联合期望和条件边际期望,允许二者的非参数估计误差共同决定统计量的渐近分布,这不仅改善了有限样本情况下检验统计量的水平性质,而且还避免了选择多个带宽以及考虑多个偏差项产生的繁杂工作.本文统计量的应用领域与 t 统计量或者 F 统计量在线性回归模型中的应用领域类似,如判断是否应当剔除某个解释变量等等.只是,与 t 和 F 统计量仅能捕获变量的线性影响关系不同的是,本文统计量避免了模型设定偏误

对检验结果的影响,特别适用于考察变量之间的非线性影响关系.例如,作为遗漏变量的特殊应用,本文统计量还可以用于检验均值格兰杰因果关系.相对于Granger^[4]构造的 F 统计量,它能够捕获线性以及多种形式的非线性格兰杰因果关系,可以用于探讨货币与产出的非线性格兰杰因果关系、金融市场的非线性溢出效应等经济与金融问题.

1 遗漏变量的原假设与备择假设

记 X 和 Z 分别表示维度为 d_x 和 d_z 的随机向量, Y 表示一维随机变量.对于每个随机向量,均有 n 个同分布的弱相依观测值 (X_t, Y_t, Z_t) , $t=1, 2, \dots, n$.此处下标 t 在时间序列范畴下表示时间指标,在横截面范畴下,代表着横截面单元,如家庭、厂商等等.为了避免模型设定偏误对检验结果产生影响,本文在非参数框架下探讨遗漏变量检验问题.在 Y_t 关于 X_t 的非参数回归模型中,随机向量 Z_t 不是遗漏变量的原假设和备择假设分别为

$$H_0: \Pr[E(y|X, Z) = E(y|X)] = 1, \quad (1)$$

对任意 $y \in \mathbf{R}$

$$H_A: \Pr[E(y|X, Z) \neq E(y|X)] > 0, \quad (2)$$

对某些具有正概率测度的 $y \in \mathbf{R}$

其中 $E(A|B)$ 表示随机向量 A 基于 B 的条件期望.式(1)所示的原假设等价于在如下非参数回归模型中,检验引入 Z_t 能否提高模型的拟合程度

$$Y_t = f(X_t, Z_t) + \varepsilon_t \quad (3)$$

其中 $f(\cdot)$ 是个未知函数, ε_t 是不可观测的随机误差项,满足 $E(\varepsilon_t|X_t, Z_t) = 0$.根据式(1),Ait-Sahalia等采用非参数核方法估计 $E(Y_t|X_t, Z_t)$ 以及 $E(Y_t|X_t)$,并基于二者估计值之差构造了遗漏变量的检验统计量.然而,由于 $E(Y_t|X_t, Z_t)$ 的非参数估计涉及 $d_x + d_z$ 维平滑,该统计量存在严重的“维数灾”问题.为了缓解“维数灾”问题,提高统计量的检验功效,给出如下引理.

引理1 假设 Y 是实数空间上满足 $E|Y| < \infty$ 的严平稳随机变量, X 和 Z 分别为实数空间

\mathbf{R}^{d_x} 和 \mathbf{R}^{d_z} 上的严平稳随机向量, 则

$$\text{cov}(Y_t, e^{ivZ_t} | X_t) = 0, \forall v \in \mathbf{R}^{d_z} \quad (4)$$

等价于

$$E(Y_t | X_t, Z_t) = E(Y_t | X_t) \quad (5)$$

引理 1 可视为 Bierens^[5] 的结论由无条件期望向条件期望的扩展, 其具体证明过程在附录部分给出.

根据引理 1, 可以将式 (1) 和式 (2) 所示的原假设和备择假设等价地表示为

$$H_0: \Pr[\text{cov}(Y_t, e^{ivZ_t} | X_t) = 0] = 1,$$

$$\text{对任意 } v \in \mathbf{R}^{d_z} \quad (6)$$

$$H_A: \Pr[\text{cov}(Y_t, e^{ivZ_t} | X_t) \neq 0] > 0,$$

$$\text{对某些具有正概率测度的 } v \in \mathbf{R}^{d_z} \quad (7)$$

与原假设 (1) 相比, 式 (6) 所示的原假设仅涉及 d_x 维平滑, 这使得基于式 (6) 构造的遗漏变量检验统计量能够缓解“维数灾”问题, 具有更高的检验功效. 关于本文统计量与 Ait-Sahalia 等统计量检验功效的详细探讨, 参见本文 3.2 节.

2 基于非参数回归的检验统计量

2.1 非参数回归估计量

根据式 (6), 当原假设 H_0 成立时, 有

$$\begin{aligned} \sigma(v, x) &= \text{cov}(Y_t, e^{ivZ_t} | X_t = x) \\ &= E(e^{ivZ_t} Y_t | X_t = x) - \\ &\quad E(e^{ivZ_t} | X_t = x) E(Y_t | X_t = x) \\ &\triangleq \phi_{yz}(v, x) - \phi_z(v, x) \phi_y(x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

因此, 给定观测样本 $\{X_t, Y_t, Z_t\}_{t=1}^n$, 可以得到 $\sigma(v, x)$ 的估计值 $\hat{\sigma}(v, x)$, 并通过度量 $\hat{\sigma}(v, x)$ 与 0 之间的差异考察原假设是否成立. 根据式 (8), 需要分别估计 $\phi_{yz}(v, x)$, $\phi_z(v, x)$, $\phi_y(x)$. 考虑到上述 3 个条件期望在备择假设下可能是高度非线性的, 本文采用非参数方法得到其估计量. 这不仅避免了模型设定偏误问题, 还使得本文统计量能够同时适用于考察线性以及多种非线性回归模型中的遗漏变量问题. 具体地, 本文将采用局部线性回归方法得到上述 3 个条件期望的估计值. 与 Nadaraya-Watson 核估计相比, 局部线性估计不仅

可以降低内部区域的估计偏差, 而且还可以自动修正边界问题^[6-7].

由于 3 个条件期望的估计类似, 本文以 $\phi_{yz}(v, x)$ 为例予以说明. 为了估计 $\phi_{yz}(v, x)$, 考虑如下局部加权最小二乘问题

$$\min_{\beta \in \mathbf{C}^{d_x+1}} \sum_{i=1}^n [| e^{ivZ_t} Y_t - \beta_0 - \beta_1'(X_t - x) |^2 \times K_h(x - X_t)] \quad (9)$$

其中 $\beta = (\beta_0, \beta_1)'$ 为 $(d_x + 1) \times 1$ 维参数向量;

$K_h(x) = h^{-d_x} K(\frac{x}{h})$, $K: \mathbf{R}^{d_x} \rightarrow \mathbf{R}$ 为核函数; $h =$

$h(n)$ 为带宽. 求解式 (9) 可得

$$\hat{\beta} \equiv \hat{\beta}(v, x) = (X'WX)^{-1} X'WV, x \in \mathbf{R}^{d_x} \quad (10)$$

其中 X 表示第 i 行元素为 $[1, (X_i - x)']$ 的 $n \times (d_x + 1)$ 维矩阵; $W = \text{diag}[K_h(X_1 - x), \dots, K_h(X_n - x)]$. $\phi_{yz}(v, x)$ 的估计值由局部截距项估计值给出

$$\hat{\phi}_{yz}(v, x) = \hat{\beta}_0 = \sum_{i=1}^n \hat{W}\left(\frac{X_i - x}{h}\right) e^{ivZ_t} Y_t \quad (11)$$

其中 $\hat{W}(t) = \frac{e_1 S_n^{-1} [1 \text{ th}]' K(t)}{h^{d_x}}$ 为有效核函数,

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)'$, $S_n = X'WX$. 类似可得 $\phi_z(v, x)$

和 $\phi_y(x)$ 的局部线性估计为

$$\hat{\phi}_z(v, x) = \sum_{i=1}^n \hat{W}\left(\frac{X_i - x}{h}\right) e^{ivZ_t},$$

$$\hat{\phi}_y(x) = \sum_{i=1}^n \hat{W}\left(\frac{X_i - x}{h}\right) Y_t$$

2.2 基于非参数回归的检验统计量

根据式 (6), 在 Z_t 不是遗漏变量的原假设下 $\sigma(v, x) = 0$. 因此, 可以通过度量

$$\hat{\sigma}(v, x) = \hat{\phi}_{yz}(v, x) - \hat{\phi}_z(v, x) \hat{\phi}_y(x)$$

与零之间的差异考察原假设是否成立. 本文考虑构造如下二次方形式的检验统计量

$$\hat{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int | \hat{\sigma}(v, X_t) |^2 a(X_t) dW(v) \quad (12)$$

其中 $a: \mathbf{R}^{d_x} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是关于条件变量 X_t 的加权函数;

$W: \mathbf{R}^{d_x} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 为辅助参数 v 关于原点对称的非递减加权函数.

在有限样本情况下, 极端值附近的观测样本比较稀疏, 这使得条件期望在该取值附近的非参数估计结果并不准确. 为了避免或者降低不可信

估计量对检验结果的影响,本文在式(12)所示的检验统计量中引入加权函数 $a(\cdot)$ 截断积分. 这一处理方式已经在现有文献中得到了广泛应用^[3,7-8]. 另外,由于原假设要求对任意 $v \in \mathbf{R}^{d_z}$, $\sigma(v, x) = 0$ 均成立,所以式(12)中进一步引入加权函数 $W(\cdot)$. 综合考虑在 v 的所有或者多个取值点处 $\sigma(v, x)$ 与零之间的差异. 相关文献一般采用标准正态累积分布作为加权函数 $W(\cdot)$. 事实上, $W(\cdot)$ 未必是连续函数,任意可数个不连续点构成的非递减函数均符合本文对 $W(\cdot)$ 的基

$$\hat{C} = h^{-d_x/2} \iint a(x) [\hat{\phi}_{y_2}(x) - |\hat{\phi}_y(x)|^2] [1 - |\hat{\phi}_z(v, x)|^2] d\mathbf{W}(v) dx \int K^2(\tau) d\tau \quad (14)$$

$$\hat{D} = 2 \iint a^2(x) [\hat{\phi}_{y_2}(x) - |\hat{\phi}_y(x)|^2]^2 |\hat{\phi}_z(v_1 + v_2, x)|^2 d\mathbf{W}(v_1) d\mathbf{W}(v_2) dx \int \left[\int K(\tau) K(\tau + \eta) d\tau \right]^2 d\eta \quad (15)$$

并且

$$\hat{\phi}_{y_2}(x) = \sum_{i=1}^n \hat{W} \left[\frac{X_i - x}{h} \right] Y_i^2,$$

$$\hat{\phi}_z(v_1 + v_2, x) = \hat{\phi}_z(v_1 + v_2, x) - \hat{\phi}_z(v_1, x) \hat{\phi}_z(v_2, x)$$

为了改善统计量在有限样本情况下的检验水平,本文进一步构造了如下有限样本形式的检验统计量

$$\widehat{SM}_F = \frac{nh^{d_x/2} \hat{M} - \hat{C}_F}{\sqrt{\hat{D}}} \quad (16)$$

其中有限样本形式的均值表达式

$$\hat{C}_F = h^{d_x/2} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a(X_i) \hat{W} \left(\frac{X_s - X_i}{h} \right)^2 \times [Y_s - \hat{\phi}_y(X_s)]^2 \int |\hat{\phi}_z(v, X_s)|^2 d\mathbf{W}(v) \quad (17)$$

式中复数随机变量 $\hat{\phi}_z(v, X_s) = e^{ivZ_s} - \hat{\phi}_z(v, X_s)$ 可视为广义回归残差. 类似地,可采用有限样本方差替代渐近方差. 然而,随着样本容量的增加,有限样本方差的计算量较大,严重影响统计量的运算速度,因此,本文并未如此替代. 后文第4节的蒙特卡洛模拟结果表明,式(16)所示的检验统计量已经具有良好的有限样本性质.

需要指出的是,在时间序列框架下,本文统计量还可以用于检验均值格兰杰因果关系. 均值格兰杰因果关系刻画了一个变量的滞后项能否在另

本假定. 例如,采用离散多元累积分布作为离散型加权函数,允许研究者仅考虑 v 的有限取值点,从而可以避免计算检验统计量时面临的高维积分问题.

式(12)所示的检验统计量具有如下标准化形式

$$\widehat{SM} = \frac{nh^{d_x/2} \hat{M} - \hat{C}}{\sqrt{\hat{D}}} \quad (13)$$

其中 \hat{C} 和 \hat{D} 分别为渐近均值和渐近方差的估计量,其表达式为

一个变量均值预测中提供有价值信息. 给定两个平稳、遍历的时间序列 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{Y_i\}_{i=1}^n$ 以及滞后阶数 p 和 q , 则变量 X_i 在均值上非格兰杰影响 Y_i 的原假设为

$$E(Y_i | Y_{i-p}^{t-1}, X_{i-q}^{t-1}) = E(Y_i | Y_{i-p}^{t-1}) \Leftrightarrow \text{cov}(Y_i e^{ivX_{i-q}^{t-1}} | Y_{i-p}^{t-1}) = 0$$

这与式(6)所示的原假设相同,因此,可以直接采用式(12)所示的统计量检验均值格兰杰因果关系. 与 Granger^[4] 基于 F 统计量的格兰杰因果检验不同的是,本文统计量不仅能够捕获线性格兰杰因果关系,而且能够识别多种形式的非线性均值格兰杰因果关系.

3 检验统计量的渐近性质

3.1 渐近分布理论

本节将考察原假设成立时,统计量 \widehat{SM} 的渐近分布理论. 在此之前,首先陈述推导渐近分布所需施加的基本假设.

假设 1 [数据生成过程] (a) 随机过程 $W_t \equiv (X_t, Y_t, Z_t)'$, $t = 1, 2, \dots, n$ 是实数空间 $\mathbf{R}^{d_x+d_y+d_z+1}$ 上满足 β -混合条件的严平稳数据生成过程,其中混合系数 β 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} \beta(j)^{\delta/(1+\delta)} < C < \infty$, $\delta < 1/3$; (b) 对于所有 $x \in G$, X_t 的边际密度函数 $g(x)$ 是有界连续,并且二阶可导的正则函数,

其中 G 作为 X_t 的定义域, 是实数空间 \mathbf{R}^{d_x} 上的紧集.

假设 2 [条件期望] 对任意 $v \in \mathbf{R}^{d_z}$, 函数 $\phi_{yz}(v, X_t), \phi_y(X_t), \phi_z(v, X_t)$ 依概率 1 是关于 X_t 的二阶连续可导的可测函数.

假设 3 [核函数] 多元核函数 $K: \mathbf{R}^{d_x} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是某些单变量核函数 $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 的乘积, 即 $K(u) = \prod_{j=1}^{d_x} k(u_j)$, 其中单变量核函数 $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是满足李普希兹条件 (Lipschitz condition) 的对称、有界、二阶连续可导函数, 并且进一步满足 $\int_{-\infty}^{\infty} k(u) du = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} uk(u) du = 0$ 以及 $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 k(u) du = C_k > 0$.

假设 4 [权重函数] (a) $W: \mathbf{R}^{d_x} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是在定义域上关于原点对称的非递减右连续权重函数, 并且满足 $\int_{\mathbf{R}^{d_x}} \|v\|^4 dW(v) < \infty$; (b) $a: G \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是在 X_t 的定义域 G 上连续有界的权重函数.

假设 1 陈述了在推导统计量渐近分布时, 对数据生成过程施加的一系列基本假定. 假设 1(a) 所述 β -混合条件约束了 $\{W_t\}$ 的序列相关程度, 是运用中心极限定理考察 U 统计量渐近性质时所需的基本假设^②. 非参数领域的相关文献在研究时间序列数据时, 广泛采纳了 β -混合的假定条件^[8-11]. Fan 和 Li^[12] 指出, 包括自回归移动平均 (ARMA)、双线性、ARCH/GARCH 过程等在内的多种数据生成过程均满足 β -混合条件. 假设 1(b) 是平滑条件, 要求条件变量 X_t 是连续型变量, 但是并未对随机变量 Y_t 和 Z_t 的形式施加任何约束, 其既可以是连续型变量, 又可以是离散型变量或者为两者的综合形式. 假设 2 要求条件期望是关于 X_t 的二阶连续可导的可测函数. 假设 3 意味着文献中常用的二阶核函数, 如高斯核函数以及 Epanechnikov 核函数等, 适用于本章检验统计量. 假设 4 对加权函数 $W(v)$ 以及 $a(x)$ 施加了一些宽松的约束条件以保证式 (13) 中积分的存在性. 需要指出的是, 假设 4 并未要求 $W(v)$ 是连续函数. 当 Z 的维度较高时, 可以采用离散的加权函数, 在 v 的有限网格点计算检验统计量, 从而避免

高维积分的运算. 为了简化渐近关于原点对称的加权函数, 简便起见, 研究人员在实际应用中一般采用如下形式的加权函数

$$W(v) = \prod_{i=1}^{d_z} w(v_i) \tag{18}$$

其中 $w: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是单变量累积分布函数, 如标准正态累积分布函数.

给定假设 1 至 4, 可以推导出当原假设 H_0 成立时, 检验统计量 \widehat{SM} 的渐近分布, 如定理 1 所示.

定理 1 若假设 1 至假设 4 成立, 并且对于 $1 \leq d_x \leq 8$ 以及带宽 $h = O(n^{-\lambda})$, $\frac{1}{d_x + 4} < \lambda < \frac{2}{3d_x}$, 则当原假设成立时, $\widehat{SM} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

该定理的证明主要运用了 Tenreiro^[13] 关于弱相依数据生成过程退化 U 统计量的中心极限定理. 为了推导检验统计量 \widehat{M} 的渐近分布, 本章需要将其分解为 10 个子项, 从这 10 个子项中可以推导出检验统计量的渐近均值以及 6 个同阶的 U 统计量. 这 6 个 U 统计量联合决定了本章检验统计量 \widehat{M} 的渐近正态特征以及渐近方差. 证明见附录.

定理 1 将带宽的阶数约束为 $h = O(n^{-\lambda})$, $\frac{1}{d_x + 4} < \lambda < \frac{2}{3d_x}$. 许多阶数的带宽均满足这一约束条件. 为了避免估计条件期望的拉普拉斯 (Laplacian), 并且减少渐近均值和方差中同阶项的个数, 本章排除了最小化均方预测误差的最优带宽. 定理 1 中关于带宽的约束意味着 $nh^{d_x+4} = o_p(1)$, 故仅抽样误差的平方项, 例如 $|\hat{\phi}_{yz}(v, x) - E\hat{\phi}_{yz}(v, x)|^2, \text{Re} [(\hat{\phi}_{yz}(v, x) - E\hat{\phi}_{yz}(v, x))(\hat{\phi}_y(x) - E\hat{\phi}_y(x))]$, 影响统计量的渐近均值和方差. 由于定理 1 是在 β -混合条件的假定下推导的, 检验统计量 \widehat{SM} 同时适用于横截面和时间序列数据, 并且在原假设成立时渐近服从于标准正态分布.

给定观测数据可以算出 $\frac{nh^{d_x/2}\widehat{M} - \widehat{C}}{\sqrt{\widehat{D}}}$, 并将其与标准

② 若随机变量或向量 $\{W_t\}$ 满足当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\beta(j) = \sup_{s \geq 1} E[\sup_{A \in \mathcal{F}_{x+j}^{\infty}} |P(A|F_1^s) - P(A)|] \rightarrow 0$, 其中 F_j^s 是由 $\{X_t, \sigma = j, \dots, s\}, j \leq s$ 生成的 σ 域, 则称 $\{W_t\}$ 是满足 β -混合条件的随机序列.

正态分布在显著性水平为 α 时的单边临界值 z_α 做比较. 若 $\widehat{SM} > z_\alpha$ 则拒绝条件独立的原假设. 例如, 在 5% 的显著性水平下, 标准正态分布的单边临界值为 1.645.

需要特别强调的是, 本文采用相同带宽估计条件联合期望 $\phi_{y_2}(v, x)$ 和条件边际期望 $\phi_z(v, x)$ 、 $\phi_y(x)$, 允许二者的非参数估计误差是同阶项, 进而共同决定了统计量的渐近分布. 这一处理方式与文献 [1-3] 存在一定差异. 上述文献选择了两个不同的带宽估计条件联合期望和条件边际期望, 并且对两个带宽的相对阶数施加一定约束, 使得条件边际密度函数的非参数估计误差收敛速度更快, 从而不会影响统计量的渐近分布. 然而, 尽管在渐近理论上边际期望的估计误差是联合期望估计误差的高阶项, 二者在有限样本情况下可能十分接近. 此时, 忽略边际期望估计误差可能会影响统计量的有限样本性质, 产生严重的水平扭曲问题. Ait-Sahalia 等^[3] 为了改善统计量的有限样本性质, 在构造统计量时引入了 3 个估计偏差项. 尽管其中两项是另一项的高阶项, 但是在有限样本情况下, 三者十分接近, 若仅保留首项, 则会严重影响统计量的检验水平性质.

3.2 局部检验功效

由于本文统计量和 Ait-Sahalia 等统计量均是在 β -混合条件下构造的, 因此, 有必要详细比较二者的局部检验功效.

Ait-Sahalia 等采用如下局部平滑备择假设考察了统计量的检验功效性质

$$E(Y_i | X_i = x, Z_i = z) = E(Y_i | X_i = x) + a_n \Delta(x, z) \quad (19)$$

其中 $\Delta(x, z)$ 满足 $\iint \Delta^2(x, z) f(x, z) a(x, z) dx dz < \infty$, 并且 $\int \Delta(x, z) f(x, z) dz = 0$. Ait-Sahalia 等证明了在局部备择假设式 (19) 中, 其构造统计量的检验功效为 $a_n = n^{-1/2} h^{-(d_x+d_z)/4}$.

类似地, 对于本节检验统计量 \widehat{M} , 考虑如下局部平滑备择假设

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\Lambda(a_n) : E(e^{ivZ_i} Y_i | X_i = x) = \\ E(e^{ivZ_i} | X_i = x) E(Y_i | X_i = x) + a_n \Delta(x, v) \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\Delta(x, v)$ 满足

$$\gamma = \iint |\Delta(x, v)|^2 a(x) g(x) dW(v) dx < \infty$$

根据引理 1, $\sigma(v | X_i) = \text{cov}(e^{ivZ_i}, Y_i | X_i) = 0$ 等价于 $E(Y_i | X_i, Z_i) = E(Y_i | X_i)$. 因此, 备择假设式 (19) 与式 (20) 是等价的. 如下定理陈述了对于局部平滑备择假设式 (20) 的统计量 \widehat{M} 的检验功效性质.

定理 2 若假设 1 至假设 4 成立, 在局部备择假设 $\mathbf{H}_\Lambda(a_n)$ 中, $a_n = n^{-1/2} h^{-d_x/4}$ 并且对于 $1 \leq d_x \leq 8$ 以及带宽 $h = cn^{-\lambda}$, $0 < c < \infty$, $\frac{1}{d_x+4} < \lambda < \frac{2}{3d_x}$, 统计量 \widehat{SM} 的检验功效为

$$\Pr(\widehat{SM} \geq z_\alpha | \mathbf{H}_\Lambda(a_n)) \rightarrow \Phi(z_\alpha - \gamma/D) \quad (21)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态累积分布函数; z_α 是显著性水平为 α 时标准正态分布的单边临界值; D 为统计量 $nh^{d_x/2} \widehat{M}$ 的渐近方差

$$\begin{aligned} D = 2 \iiint a^2(x) [\phi_{y_2}(x) - |\phi_y(x)|^2]^2 \times \\ |\Phi_z(v_1 + v_2, x)|^2 dW(v_1) dW(v_2) dx \times \\ \int \left[\int K(\tau) K(\tau + \eta) d\tau \right]^2 d\eta \quad (22) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_z(a_1 + a_2, x) = \phi_z(a_1 + a_2, x) - \\ \phi_z(a_1, x) \phi_z(a_2, x) \end{aligned}$$

定理 2 的证明见附录. 根据定理 2 可知, 本文统计量 \widehat{M} 能够识别出以速度 $a_n = n^{-1/2} h^{-d_x/4}$ 收敛到原假设的局部平滑备择假设 $\mathbf{H}_\Lambda(a_n)$. 该收敛速度仅依赖于条件变量 X_i 的维度, 快于 Ait-Sahalia 等检验统计量的收敛速度 $n^{-1/2} h^{-(d_x+d_z)/4}$, 从而具有更高的检验功效. 类似可以证明, 本文统计量涉及的平滑维度低于 Fan 和 Li^[1] 以及 Lavergne 和 Vuong^[2], 进而具有更快的收敛速度和更高的检验功效.

4 蒙特卡洛模拟

本节将采用蒙特卡洛模拟考察统计量 \widehat{M} 的

有限样本性质,并比较该统计量与 Ait-Sahalia 等统计量的优劣.考虑如下 6 个数据生成过程:

DGP. S1: $Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$

DGP. S2: $Y_t = \sqrt{h_{1t}}\varepsilon_{1t}, h_{1t} = 0.01 + 0.5Y_{t-1}^2$

DGP. S3: $Y_t = \sqrt{h_{1t}}\varepsilon_{1t}, h_{1t} = 0.01 + 0.9h_{1,t-1} + 0.05Y_{t-1}^2$
 $Z_t = \sqrt{h_{2t}}\varepsilon_{2t}, h_{2t} = 0.01 + 0.9h_{2,t-1} + 0.05Z_{t-1}^2$

DGP. P1: $Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.5Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}$

DGP. P2: $Y_t = 0.5Y_{t-1}Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}$

DGP. P3: $Y_t = 0.4Y_{t-1} + 0.2Z_{t-1}^2 + \varepsilon_{1t}$

其中 $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ 是两个相互独立的 $N(0, 1)$ 序列,在 DGP. S1 - S2, DGP. P1 - P3 中, Z_t 由如下 AR(1) 模型生成

$Z_t = 0.5Z_{t-1} + \varepsilon_{2t}$

以上数据生成过程涵盖了文献中应用较为广泛的线性和非线性模型. Su 和 White^[11] 曾采用上述数据生成过程探讨条件独立性检验问题. 本节需要检验的原假设是,在 Y_t 关于 Y_{t-1} 的回归方程中, Z_{t-1} 不是遗漏变量

$H_0: E(Y_t | Y_{t-1}, Z_{t-1}) = E(Y_t | Y_{t-1})$ (23)

即 检验在一阶滞后情形下 Z_{t-1} 是否为 Y_t 的均值格兰杰原因. 在上述 6 个数据生成过程中, DGP. S1 - S3 满足式 (23) 所示的原假设, 从而可以考察统计量的检验水平性质, DGP. P1 - P3 则用于探讨统计量的检验功效性质. 特别地, 在 DGP. P1 - P3 中, 除 DGP. P1 之外的其它所有数据生成过程都是非线性的.

对于每个数据生成过程, 本文采用样本容量 $n = 100, 200, 500, 1000$ 随机模拟生成 1000 组数据序列. 在计算统计量之前, 每组数据均已采用各自的样本均值和样本方差进行标准化处理. 在计算统计量 \hat{M} 时, 选择二阶高斯核函数、截断加权函数 $a(x) = \mathbf{1}(|x| \leq 1.5)$ 以及标准正态累积分布加权函数 $W(\cdot)$. 简便起见, 此处采用固定带宽 $h = n^{-2/9}$ ③. 对于 Ait-Sahalia 等的检验统计量, 参照原文, 同样选择了二阶高斯核函数、截断加权

函数 $a(x) = \mathbf{1}(|x| \leq 1.5)$. 由于 Ait-Sahalia 等涉及两个不同阶的带宽, 为了使其与本文统计量具有可比性, 选择 $h_1 = h = n^{-2/9}, h_2 = n^{-1/3}$, 这两个带宽满足 Ait-Sahalia 等假设 3 对带宽的基本约束. 对于上述 6 个数据生成过程, 本文还探讨了 Granger 的 F 统计量的检验水平和检验功效性质. 如前所述, F 统计量仅能捕获变量之间的线性格兰杰因果关系, 无法识别非线性影响关系.

表 1 报告了在 10% 和 5% 的显著性水平, 检验统计量 \hat{M} 基于标准正态分布单边临界值得到的 DGP. S1 - S3 的经验水平. 此外, 当样本容量为 $n = 100, 200$ 时, 表 1 还报告了基于文献 [10] 的非参数自举方法计算的 DGP. S1 - S3 的经验水平. 自举方法计算结果根据 500 次蒙特卡洛模拟得到. 对于每次蒙特卡洛模拟, 自举的重复次数为 $B = 100$. 笔者选择高斯核作为非参数自举的核函数, 选择 $h = n^{-2/9}$ 作为重抽样带宽. 从表中结果可以看出, 无论是基于渐近分布还是自举方法, 统计量 \hat{M} 的经验水平都与名义显著性水平相差不大, 表明本文统计量具有良好的水平性质. 对于渐近分布的计算结果, 本文统计量存在轻微的过度拒绝现象, 并且这一现象随着样本容量 n 的增加有所改善. 尽管自举方法可以略微缓解过度拒绝现象, 但是, 其改善作用并不显著. 由于本文统计量基于渐近分布已经得到了较为合理的检验水平, 因此, 自举方法仅能起到微乎其微的作用也是可以理解的. 由此看来, 在采用本文统计量检验遗漏变量时, 没有必要采用自举方法近似统计量服从的分布. 由于非参数自举方法往往涉及较大计算量, 需要较长运行时间, 无需采用自举方法这一性质使得本文统计量能够更为便利地应用到实证研究中. 需要指出的是, 此处计算 Ait-Sahalia 等检验统计量时, 参照其做法, 保留了 3 个估计偏差项, 其中后两项为首项的高阶项. 若仅保留首项, 则检验统计量存在严重的

③ 设定 $h = cn^{-2/9}, c = 0.5, 1.5, 2$ 计算了统计量的经验水平和经验功效, 计算结果与表 1 和表 2 类似. 篇幅所限, 本文不再报告该结果, 感兴趣者可以通过邮件向作者索取.

水平扭曲现象. 尽管保留 3 个偏差项显著改善了 Ait-Sahalia 等统计量的水平性质, 但是与本文统计量相比, 它依然存在更为明显的过度拒绝现象, 这凸显了本文采用单一带宽估计条件联合矩和条件边际矩的处理方式在改善统计量水平性质方面具有的优势.

对于 DGP. P1 - P3 表 2 报告了在 10% 和 5% 的显著性水平, 本文统计量 \hat{M} 、Ait-Sahalia 等统计量以及 F 统计量基于标准正态分布单边临界值的经验拒绝概率. 从表中结果可以得到如下结论: 首先在 DGP. P1 - P3 中, DGP. P1 是唯一存在线性格兰杰因果关系的数据生成过程. 对于该过程, F 统计量是最有效的, 但是对于其它过程, F 统计量的检验功效明显逊于本文统计量 \hat{M} 以及 Ait-Sahalia 等统计量; 其次, \hat{M} 能捕获 DGP. P1 - P3 给出的任意形式均值格兰杰因果关系, 并且检验功效随着样本容量 n 的增加迅速趋于 1, 这表明本文统计量具有优秀的检验功效性质; 最后, 将 \hat{M} 与 Ait-Sahalia 等统计量的检验功效对比可知, \hat{M} 的检验功效在大多数情况下明显高于 Ait-Sahalia 等统计量, 这与第 3.2 节关于本

文统计量相对于 Ait-Sahalia 等统计量具有更高检验功效的理论结论相一致.

5 实证应用

如前所述, 均值格兰杰因果检验可视为遗漏变量检验的特殊应用, 因此, 本节将采用前文构造的统计量考察产出缺口在均值上是否为通货膨胀率的格兰杰原因, 即考察文献中得到广泛探讨的“产出一通胀”型菲利普斯曲线能否用于预测我国通胀率^④. Phillips^[14]指出, 失业与通货膨胀之间存在着反向变动关系; 奥肯(Okun^[15])定律则说明产出缺口与失业率之间也存在着反向变动关系. 二者结合起来, 便形成了“产出一通胀”型菲利普斯曲线, 表明通胀率与产出缺口呈正向关系, 即当产出缺口为正时, 整个经济体面临通胀压力; 反之, 存在通缩压力. 根据宏观经济学理论, 若出现正的产出缺口, 意味着总需求大于总供给, 则通胀压力将会增大; 反之, 若出现负的缺口, 即总供给大于总需求, 则通缩压力增加. 这为“产出一通胀”型菲利普斯曲线的存在提供了一定的经济理论依据.

表 1 DGP. S1 - S3 的检验水平性质

Table 1 Size of tests under DGP. S1 - S3

统计量		\hat{M}, AS		\hat{M}, FS		ABS		F	
		5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%
DGP. S1	$n = 100$	0.097	0.155	0.044	0.092	0.092	0.155	0.050	0.106
	$n = 200$	0.070	0.121	0.032	0.090	0.079	0.143	0.052	0.102
	$n = 500$	0.074	0.122	-	-	0.068	0.127	0.045	0.092
	$n = 1\ 000$	0.069	0.108	-	-	0.069	0.119	0.046	0.093
DGP. S2	$n = 100$	0.084	0.140	0.060	0.106	0.064	0.127	0.047	0.103
	$n = 200$	0.066	0.107	0.056	0.116	0.064	0.116	0.057	0.108
	$n = 500$	0.057	0.087	-	-	0.061	0.116	0.037	0.100
	$n = 1\ 000$	0.063	0.103	-	-	0.070	0.129	0.050	0.086
DGP. S3	$n = 100$	0.076	0.121	0.050	0.092	0.079	0.129	0.042	0.094
	$n = 200$	0.061	0.108	0.078	0.130	0.068	0.121	0.046	0.102
	$n = 500$	0.071	0.107	-	-	0.089	0.136	0.053	0.097
	$n = 1\ 000$	0.063	0.101	-	-	0.066	0.117	0.051	0.101

注: 1. F 表示 Granger^[4] 线性格兰杰因果关系检验的 F 统计量计算结果, ABS 表示 Ait-Sahalia 等^[3] 遗漏变量检验统计量的计算结果;

\hat{M}, AS 表示本文统计量基于渐近分布的计算结果, \hat{M}, FS 表示本文统计量基于 Su 和 White^[10] 非参数自举方法的计算结果;

2. 表中渐近分布的计算结果均是基于标准正态分布单边临界值得到的 1 000 次蒙特卡洛模拟的拒绝概率.

④ 预测分为样本内预测和样本外预测两类, 此处探讨的是样本内预测. 由于本文的研究目的不是构造样本外预测的检验统计量, 故不再对样本外预测效果的评价展开讨论.

表 2 DGP. P1 - P3 的检验功效
Table 2 Power of tests under DGP. P1 - P3

统计量		\hat{M}		ABS		F	
		5%	10%	5%	10%	5%	10%
DGP. P1	$n = 100$	0.990	0.991	0.928	0.956	1.000	1.000
	$n = 200$	1.000	1.000	0.995	0.998	1.000	1.000
	$n = 500$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$n = 1\ 000$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
DGP. P2	$n = 100$	0.952	0.965	0.748	0.821	0.206	0.290
	$n = 200$	0.998	0.999	0.957	0.981	0.215	0.286
	$n = 500$	1.000	1.000	1.000	1.000	0.249	0.323
	$n = 1\ 000$	1.000	1.000	1.000	1.000	0.265	0.338
DGP. P3	$n = 100$	0.607	0.677	0.345	0.464	0.175	0.267
	$n = 200$	0.850	0.903	0.586	0.720	0.149	0.219
	$n = 500$	0.998	1.000	0.942	0.967	0.165	0.253
	$n = 1\ 000$	1.000	1.000	0.998	0.999	0.181	0.252

注: 1. F 表示 Granger^[4] 线性格兰杰因果关系的 F 统计量计算结果, ABS 表示 Ait-Sahalia 等^[3] 遗漏变量检验统计量的计算结果;

2. 表中报告了基于标准正态分布单边临界值得到的 1 000 次蒙特卡洛模拟的拒绝概率.

5.1 指标选取与数据处理

由于我国官方统计资料仅对季度 GDP 予以核算,没有直接可获得的月度 GDP 统计资料,本文采用季度频率予以建模,选取的样本区间为 1983 年 1 季度至 2012 年 4 季度,共 120 个样本点,所有数据均来源于中经网统计数据库和国家统计局网站.数据选取与处理简要描述如下:

1) 通货膨胀率的选取 本文通过消费者价格指数的月度同比数据计算年化的季度通胀率,其中 1983 年至 1989 年的消费者价格指数采用商品零售价格指数替代.由于官方 CPI 数据为月度同比数据,本文通过 3 项移动平均计算出季度同比 CPI 数据,并根据 $(\text{季度 CPI} - 1) \times 100\%$ 获得季度通货膨胀率 π_t , 季度通货膨胀率时间序列图如图 1(a) 所示;

2) 产出缺口的测算 首先根据官方统计资料公布的同比累计 GDP 增长率和名义 GDP 水平值推算出 1992 年—2012 年以 1992 年为不变价的季度实际 GDP;其次,为扩充数据样本,使得检验结果更加可靠,按照刘金全等^[16]、陈浪南和刘宏伟^[17]等采用的方法对我国 1978 年—1991 年度实际 GDP 进行季度分解(具体分解方法可参考 Abeyasinghe 和 Gulasekaran^[18]),将实际 GDP 数据样本扩展到 1978 年 1 季度;再次,采用 Tramo-Seats 方法对实际 GDP 数据进行季度调整,并计

算对数百分化数据 $y = 100 \times \ln GDP_t$;最后,参考郑挺国和王霞^[19],采用 HP (hodrick-prescott) 滤波、QT (quadratic trend) 滤波、BK (baxter-king) 滤波、CF (christiano-fitzgerald) 滤波,以及基于不可观测成分 (UC) 模型的 CL (Harvey^[20]; Clark^[21]) 模型和 HJ (Harvey 和 Jäger^[22]) 模型 6 种退势方法估算出我国 1978 年—2012 年的产出缺口.图 1(b) - (d) 给出了 6 种不同退势方法得出的产出缺口时间序列图.

5.2 实证检验结果

本文采用 Dickey 和 Fuller^[23] 的 ADF 统计量检验图 1 所示 7 个序列的平稳性.检验结果在 5% 的显著性水平下均拒绝了序列为单位根的原假设,意味着这 7 个序列为平稳序列.为此,可以应用文献中广泛采用的 F 统计量以及前文所述的 \hat{M} 统计量考察产出缺口和通胀率之间的线性和非线性均值格兰杰因果关系. \hat{M} 统计量加权函数的设定与蒙特卡洛模拟部分相同,带宽设为 $h = c^* n^{-2/9}$,其中 c^* 是在估计 π_t 基于 π_{t-1} 的条件期望时,采用最小二乘变分法选择的最优带宽.在计算统计量之前,采用各数据序列的样本均值和样本方差对其做标准化处理.尽管本文统计量 \hat{M} 能够在一定程度上缓解“维数灾”问题,但是,由于我国数据样本太少,当平滑变量维度较高时,

检验结果并不可靠. 因此, 本文仅考虑平滑变量为一维, 即一阶滞后情形下, 产出缺口是否为通胀的

格兰杰因果关系^⑤. F 统计量和 \hat{M} 统计量的检验结果如表 3 所示.

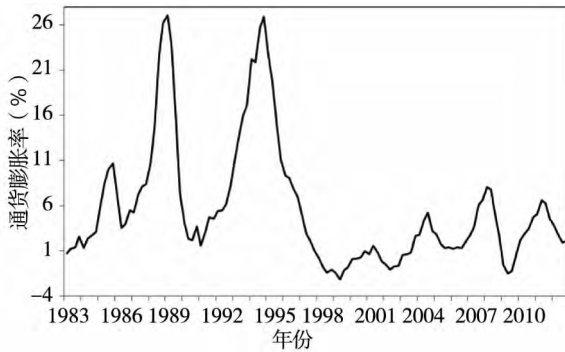


图 1(a) 通货膨胀率
Fig. 1(a) Inflation rate

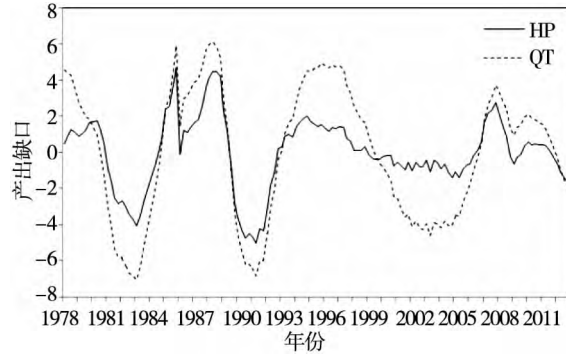


图 1(b) 基于 HP 滤波和 QT 滤波的产出缺口
Fig. 1(b) Output gaps based on HP and QT filters

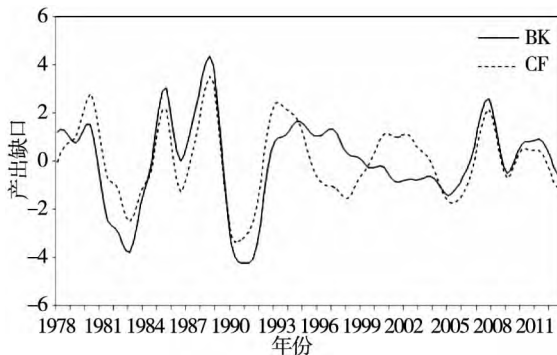


图 1(c) 基于 BK 滤波和 CF 滤波的产出缺口
Fig. 1(c) Output gaps based on BK and CF filters

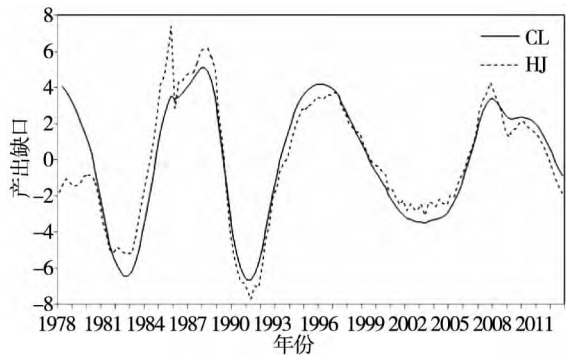


图 1(d) 基于 CL 滤波和 HJ 滤波的产出缺口
Fig. 1(d) Output gaps based on CL and HJ filters

表 3 均值格兰杰因果关系检验结果

Table 3 Results of Granger causality tests in mean

	HP	QT	BK	CF	CL	HJ	GR
F	0.015 6	0.341 5	0.009 5	0.000 0	0.622 6	0.337 0	0.202 7
\hat{M}	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

注: 1. 表中报告的数值为 p -值, 其中 F 统计量的检验结果基于自由度为 $(1, T-2)$ 的 F 分布临界值得到; \hat{M} 统计量的检验结果基于标准正态分布单边临界值得到;

2. 表中前 6 列分别为采用 6 种滤波的产出缺口估计值的检验结果, 最后一列为 GDP 同比增速的检验结果.

从表 3 中基于 F 统计量的检验结果可知, 产出缺口估算方法的选取严重影响 F 统计量的检验结果. 对于 HP、BK 和 CF 3 种退势方法推算出的产出缺口, F 统计量的检验结果在 5% 的显著性水平, 拒绝了产出缺口在均值上非格兰杰影响通胀的原假设, 而对于另外 3 种方法得出的产出缺口以及 GDP 同比增速, 则无法拒绝原假设; 然而, 对于 6 种退势方法得出的产出缺口以及 GDP

同比增速, 本文统计量 \hat{M} 的检验结果均拒绝了原假设, 意味着“产出一通胀”型菲利普斯曲线在我国是成立的. 对比 F 统计量和 \hat{M} 统计量的检验结果可知, “产出一通胀”型菲利普斯曲线能够用于预测我国通胀率, 只是, 这种预测关系主要呈现为非线性形式. 菲利普斯曲线的非线性特征意味着对于不同的经济景气形势, 决策部门抑制通胀的

⑤ 当然, 此处将滞后阶数设定为 1 阶存在一定的局限性, 可以采用工业增加值增速度量产出, 基于工业增加值增速数据提取产出缺口, 将数据频率由季度扩展为月度来扩充样本, 从而在检验产出缺口是否为通胀的均值格兰杰因果关系时可以设定更高滞后阶数. 篇幅所限, 此处不再展开讨论.

成本有所差异. 这一结论一方面与 Turner^[24]、De-belle 和 Laxton^[25]、Stiglitz^[26] 等文献认为菲利普斯曲线表现为非线性形式的观点一致, 另一方面也为国内学者, 如刘金全等^[27] 采用非线性模型考察我国经济增长与通货膨胀之间关系提供了一定的经验证据.

6 结束语

考虑到遗漏变量问题在模型选择和估计中发挥的重要作用, 本文借助非参数回归方法, 构造了同时适用于线性以及非线性回归模型的遗漏变量检验统计量. 该统计量既适用于横截面数据又适用于时间序列数据, 并且在原假设成立时渐近服从于标准正态分布, 能够十分便利地应用到实证研究中. 特别地, 与文献 [1-3] 基于非参数方法构造的检验统计量相比, 本文统计量至少具有如下两点优势:

第1, 本文统计量的收敛速度仅依赖于原假设成立时解释变量的维度, 能够识别出收敛到原假设速度更快的局部备择假设. 文献 [1-3] 检验统计量的收敛速度依赖于备择假设下解释变量的维度, 涉及更高维度的平滑. 因此, 与之相比, 本文统计量不仅在一定程度上缓解了“维数灾”问题, 而且还因收敛速度更快而具有更高的局部检验功效;

第2, 与现有文献不同的是, 本文采用单一带宽估计条件联合期望和条件边际期望, 允许二者的非参数估计误差共同决定统计量的渐近分布, 使得推导渐近分布时忽略的高阶项更少. 这不仅改善了统计量的有限样本性质, 而且还避免了在实

际应用中选择多个带宽以及计算多个偏差项带来的繁杂工作.

此外, 本文采用蒙特卡洛模拟考察了统计量的有限样本性质. 数值模拟结果表明本文统计量具有合理的检验水平以及良好的检验功效. 特别地, 与 Ait-Sahalia 等以及 F 统计量相比, 本文统计量不仅能够同时捕获线性以及多种非线性回归模型中的遗漏变量问题, 而且具有比它更高的检验功效. 这与本文理论部分的分析结论相一致. 最后, 本文还应用该统计量考察了我国产出缺口在通胀预测中的作用, 验证了非线性“产出一通胀”型菲利普斯曲线在我国通胀预测中的适用性.

本文未来的研究方向包括但不仅限于如下几点: 第1, 最优带宽的选取. 本文定理 1 给出了带宽的许可阶数, 但是在实际操作中如何选择带宽, 并没有给出进一步的建议. Gao 和 Gijbels^[29] 基于给定显著性水平最大化检验功效的原则探讨了其检验统计量带宽的选择问题, 但是, Gao 和 Gijbels 的结果依赖于统计量的形式、数据生成过程、核函数等多种因素, 无法直接应用到本文检验中, 因此, 本文将最优带宽的选取作为下一步的研究方向; 第2, 长记忆过程的条件独立性检验. 本文假设 1 的 β -混合条件约束了时间序列的相关程度. 对于不满足该条件的长记忆过程, 检验统计量的均值和方差表达式都会发生改变. 构造适用于长记忆过程的条件独立性检验统计量, 将是笔者的第2个研究方向; 第3, 样本外预测的非参数检验. 本文检验统计量可用于考察均值格兰杰因果关系, 即样本内预测, 但是并不适用于样本外预测. 如何构建样本外预测的非参数检验统计量, 将是笔者的第3个研究方向.

参考文献:

- [1] Fan Y, Li Q. Consistent model specification tests: Omitted variables and semiparametric function forms [J]. *Econometrica*, 1996, 64(4): 865-890.
- [2] Lavergne P, Vuong Q. Nonparametric significance testing [J]. *Econometric Theory*, 2000, 16(4): 576-601.
- [3] Ait-Sahalia Y, Bickel P J, Stocker T M. Goodness-of-fit tests for kernel regression with an application to option implied volatilities [J]. *Journal of Econometrics*, 2001, 105(2): 363-412.
- [4] Granger C W J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods [J]. *Econometrica*, 1969, 37(3): 424-438.
- [5] Bierens H J. Consistent model specification tests [J]. *Journal of Econometrics*, 1982, 20(1): 105-134.
- [6] Fan J, Gijbels I. Variable bandwidth and local linear regression smoothers [J]. *Annals of Statistics*, 1992, 20(4): 2008-2036.
- [7] Hastie T J, Loader C. Local regression: Automatic kernel carpentry (with discussion) [J]. *Statistical Science*, 1993, 8(2): 120-143.

- [8] Hjellvik V, Yao Q, Tjøstheim D. Linearity testing using local polynomial approximation [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 1998, 68(2): 295–321.
- [9] Chen B, Hong Y. Characteristic function-based testing for multifactor continuous-time Markov models via nonparametric regression [J]. *Econometric Theory*, 2010, 26(4): 1115–1179.
- [10] Su L, White H. A consistent characteristic function-based test for conditional independence [J]. *Journal of Econometrics*, 2007, 141(2): 807–834.
- [11] Su L, White H. A nonparametric hellinger metric test for conditional independence [J]. *Econometric Theory*, 2008, 24(4): 829–864.
- [12] Fan Y, Li Q. Root- n -consistent estimation of partially linear time series models [J]. *Journal of Nonparametric Statistics*, 1999, 20(1): 245–271.
- [13] Tenreiro C. Loi asymptotique des erreurs quadratiques integrees des estimateurs a noyau de la densite et de la regression sous des conditions de dependance [J]. *Portugaliae Mathematica*, 1997, 54(2): 187–213.
- [14] Phillips A W. The relationship between unemployment and the rate of change of monetary wages in the United Kingdom: 1861–1957 [J]. *Economica*, 1958, 25(100): 283–299.
- [15] Okun A M. Potential GNP: Its measurement and significance [C]// *Proceedings of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association (Washington D. C.: American Statistical Association)*, 1962, 7: 98–103.
- [16] 刘金全, 刘志刚, 于冬. 我国经济周期波动性与阶段性之间关联的非对称性检验—Plucking 模型对中国经济的实证研究 [J]. *统计研究*, 2005, 22(8): 38–43.
Liu Jinquan, Liu Zhigang, Yu Dong. The non-symmetric test of linking between volatility and phase of economic cycle of China: The experimental analysis of application of plucking model to China economic analysis [J]. *Statistical Research*, 2005, 22(8): 38–43. (in Chinese)
- [17] 陈浪南, 刘宏伟. 我国经济周期波动的非对称性和持续性研究 [J]. *经济研究*, 2007, 42(4): 43–52.
Chen Langnan, Liu Hongwei. Empirical investigation on the asymmetry and persistence of Chinese business cycle [J]. *Economic Research Journal*, 2007, 42(4): 43–52. (in Chinese)
- [18] Abeyasinghe T, Gulasekaran R. Quarterly real GDP estimates for China and ASEAN4 with a forecast evaluation [J]. *Journal of Forecasting*, 2004, 23(6): 431–447.
- [19] 郑挺国, 王霞. 中国产出缺口的实时估计及其可靠性研究 [J]. *经济研究*, 2010, 45(10): 129–142.
Zheng Tingguo, Wang Xia. Real time estimates of the Chinese output gap and the reliability analysis [J]. *Economic Research Journal*, 2010, 45(10): 129–142. (in Chinese)
- [20] Harvey A C. Trends and cycles in macroeconomic time series [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1985, 3(3): 216–227.
- [21] Clark P. The cyclical component of U. S. economic activity [J]. *Quarterly Journal of Economics*, 1987, 102(4): 797–814.
- [22] Harvey A, Jäger A. Detrending, stylized facts and the business cycle [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 1993, 8(3): 231–247.
- [23] Dickey D A, Fuller W A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1979, 74(366a): 427–431.
- [24] Turner D. Speed limit and asymmetric inflation effects from the output gap in the major economies [J]. *OECD Economic Studies*, 1995, 24: 58–87.
- [25] Debelle G, Laxton D. Is the Phillips Curve Really a Curve: Some Evidence for Canada, the United Kingdom, and the United States [R]. *IMF*, 1997, 44: 249–282.
- [26] Stiglitz J. Reflections on the natural rate hypothesis [J]. *Journal of Economic Perspectives*, 1997, 11(1): 3–10.
- [27] 刘金全, 金春雨, 郑挺国. 中国菲利普斯曲线的动态性与通货膨胀率预期的轨迹: 基于状态空间区制转移模型的研究 [J]. *世界经济*, 2006, (6): 16–28.
Liu Jinquan, Jin Chunyu, Zheng Tingguo. The dynamic of China's Phillips curve and the track of expected inflation rate: A study based on state space regime switching model [J]. *The Journal of World Economy*, 2006, (6): 16–28. (in Chinese)
- [28] Chung K L. *A Course in Probability Theory (Third edition)* [M]. New York: Academic Press, 2001.
- [29] Gao J, Gijbels I. Bandwidth selection in nonparametric kernel testing [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2008, 103(484): 1584–1594.

Nonparametric-regression-based testing for omitted variables

WANG Xia¹, HONG Yong-miao^{2,3}

1. School of Economics and Management, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
2. Department of Economics and Department of Statistical Sciences, Cornell University, NY 14850, USA;
3. The Wang Yanan Institute for Studies in Economics (WISE), Xiamen University, Xiamen 361005, China

Abstract: This paper proposes a nonparametric-regression-based test for omitted variables, which is applicable in both cross-sectional and time series contexts. Our test not only avoids the model misspecification problem, but also are locally more powerful than the existing tests. Moreover, unlike many other nonparametric-based tests, we use a single bandwidth rather than two different bandwidths in estimating both the conditional joint and marginal expectations, which significantly improves the size performance of our test in finite samples. Monte Carlo studies demonstrate the well behavior of our test in finite samples, which could not only capture the omitted variables feature in linear and nonlinear regressions, but also is more powerful than Ait-Sahalia et al.'s (2001) test. In an application to testing the nonlinear Granger causality in mean, we document the existence of nonlinear relationships between the output gap and inflation, that is, the nonlinear "output-inflation" type of Phillips curve maybe is more suitable for China's inflation forecast.

Key words: omitted variable; nonlinear; nonparametric regression; power; Granger causality in mean

附录:

1. 引理 1 的证明

首先证明若 $E(Y_t | X_t, Z_t) = E(Y_t | X_t)$, 则 $\text{cov}(Y_t e^{ivZ_t} | X_t) = 0$.

对 e^{ivZ_t} 关于 Z_t 在原点附件做泰勒展开可得

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t e^{ivZ_t} | X_t) &= \text{cov}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iv)^m}{m!} Z_t^m, Y_t | X_t\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iv)^m}{m!} \text{cov}(Z_t^m, Y_t | X_t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iv)^m}{m!} [E(Y_t | X_t, Z_t) - \\ &\quad E(Y_t | X_t)] E(Z_t^m | X_t) \end{aligned}$$

因此, 若 $E(Y_t | X_t, Z_t) = E(Y_t | X_t)$ 成立, 则 $\text{cov}(Y_t e^{ivZ_t} | X_t) = 0$ 成立.

然后证明由 $\text{cov}(Y_t e^{ivZ_t} | X_t) = 0$ 可以推出 $E(Y_t | X_t, Z_t) = E(Y_t | X_t)$. 与 Bierens 类似. 简便起见, 假设 Y_t 是连续型随机变量. Y_t 是离散型随机变量的证明过程与之类似, 此处不再重复.

根据 Chung^[28] 中的定理 9.1.2 可知, 在实数空间 \mathbf{R} 上存在一个布莱尔可测的实函数, 不妨设为 q , 满足

$$E(Y_t | X_t) = q(X_t) \quad (\text{A.1})$$

类似地, 在实数空间 \mathbf{R} 上存在一个布莱尔可测的实函数 r , 满足

$$E(Y_t | X_t, Z_t) - q(X_t) = r(X_t, Z_t) \quad (\text{A.2})$$

令 $r_1(\cdot) = \max\{r(\cdot), 0\}$, $r_2(\cdot) = \max\{-r(\cdot), 0\}$, 则 r_1 和 r_2 均为实数空间 \mathbf{R} 上的非负布莱尔可测实函数, 并且满足

$$r = r_1 - r_2$$

令 $c_1(X) = E_z[r_1(X, Z)] > 0$, $c_2(X) = E_z[r_2(X, Z)] > 0$, 其中 $E_z(\cdot)$ 表示关于 Z 求条件期望. 显然, $r_1(X, Z_t)$ 和 $r_2(X, Z_t)$ 关于 Z 的条件期望为 X_t 的函数. 由于

$$\begin{aligned} E(Y_t e^{ivZ_t} | X_t) &= E[E(Y_t | Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] \\ &= E[(q(X_t) + r(X_t, Z_t)) e^{ivZ_t} | X_t] \\ &= q(X_t) E(e^{ivZ_t} | X_t) + \\ &\quad E[r(X_t, Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] \\ &= E(Y_t | X_t) E(e^{ivZ_t} | X_t) + \\ &\quad E[r(X_t, Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] \end{aligned}$$

由上式以及 $\text{cov}(Y_t e^{ivZ_t} | X_t) = 0$ 可得

$$E[r(X_t, Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] = 0 \quad \forall v \in \mathbf{R}^{d_z}.$$

另外, 在欧几里得空间上的布莱尔域 B 定义两个概率测度 F_1 以及 F_2 满足

$$F_j(B | X) = \int_B r_j(X, \mu) dF(\mu | X) / c_j(X), \quad j = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

其中 $F(\mu | X)$ 是由随机向量 Z_t 生成的条件概率测度, B 是 B 上的任意布莱尔集. 据此可得

$$\begin{aligned}
E[r(X_t, Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] &= E[r_1(X_t, Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] - \\
&E[r_2(X_t, Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] \\
&= \int r_1(u, X_t) e^{ivZ_t} dF(u | X_t) - \\
&\int r_2(u, X_t) e^{ivZ_t} dF(u | X_t) \\
&= c_1(X_t) \int e^{ivZ_t} dF_1(u | X_t) - \\
&c_2(X_t) \int e^{ivZ_t} dF_2(u | X_t)
\end{aligned}$$

由于 $E[r(X_t, Z_t) e^{ivZ_t} | X_t] = 0$ 故有

$$\begin{aligned}
c_1(X_t) \int e^{ivZ_t} dF_1(u | X_t) &= c_2(X_t) \int e^{ivZ_t} dF_2(u | X_t) \\
\text{进一步令 } u = 0 \text{ 可得} \\
c_1(x) = c_2(x) \quad c_1(X_t) = c_2(X_t), \forall X_t \in G \quad (A.4)
\end{aligned}$$

由以上两式可知

$$\int e^{ivZ_t} dF_1(u | X_t) = \int e^{ivZ_t} dF_2(u | X_t), \forall v \in \mathbf{R}^{d_z}$$

上式意味着概率测度 F_1 和 F_2 是等价的, 即对任意布莱尔集 $B, F_1(B | X) = F_2(B | X)$ 均成立. 根据式 (A.3) 和式 (A.4) 可得

$$\int_B r_1(u, X) dF(u | X) = \int_B r_2(u, X) dF(u | X)$$

对任意 $X \in G$ 定义布莱尔集

$$B_1(X) = \{Z \in \mathbf{R}^{d_z} : r(X, Z) > 0\}$$

并且

$$\begin{aligned}
\hat{M}_h &= h^{d_x/2} \sum_{i=1}^n \int \left\{ |\hat{\phi}_{y_z} - \phi_{y_z}|^2 + |\phi_y|^2 |\hat{\phi}_z - \phi_z|^2 + |\phi_z|^2 |\hat{\phi}_y - \phi_y|^2 + |(\hat{\phi}_y - \phi_y)(\hat{\phi}_z - \phi_z)|^2 + \right. \\
&2\text{Re}[\phi_{y_z} \hat{\phi}_z^* (\hat{\phi}_z - \phi_z)(\hat{\phi}_y - \phi_y)] - 2\text{Re}[(\hat{\phi}_{y_z} - \phi_{y_z}) \hat{\phi}_y (\hat{\phi}_z - \phi_z)^*] - 2\text{Re}[(\hat{\phi}_{y_z} - \phi_{y_z}) \hat{\phi}_z^* (\hat{\phi}_y - \phi_y)] - \\
&2\text{Re}[(\hat{\phi}_{y_z} - \phi_{y_z})(\hat{\phi}_y - \phi_y)(\hat{\phi}_z - \phi_z)^*] + 2\text{Re}[(\hat{\phi}_y - \phi_y) \phi_y] |\hat{\phi}_z - \phi_z|^2 + 2\text{Re}[(\hat{\phi}_z - \phi_z) \phi_z^*] |\hat{\phi}_y - \phi_y|^2 \Big\} a(X_t) dW(v) \\
&= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 + T_{10}
\end{aligned} \quad (A.6)$$

其中 $\hat{\phi}_{y_z} \equiv \hat{\phi}_{y_z}(v, X)$, $\hat{\phi}_y \equiv \hat{\phi}_y(x)$, $\hat{\phi}_z \equiv \hat{\phi}_z(v, X)$, $\phi_{y_z} \equiv \phi_{y_z}(v, X)$, $\phi_y \equiv \phi_y(x)$, $\phi_z \equiv \phi_z(v, X)$. 需要对式 (A.6) 所示的 T_1 至 T_{10} 逐项分析, 分别提取出决定本文统计量渐近分布的首项. 具体地 T_1 至 T_{10} 的首项由引理 A.1 至 A.7 给出.

引理 A.1 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下

$$T_1 = C_1 + \tilde{U}_1 + o_p(1) \quad (A.7)$$

其中

$$\begin{aligned}
C_1 &= h^{-d_x/2} \iint a(x) [1 - |\phi_{y_z}(v, X)|^2] dW(v) dx \int K(\tau)^2 d\tau, \\
\tilde{U}_1 &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} U_1(\xi_s, \xi_r) \\
&= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} \int \frac{a(x)}{g(x)} K\left(\frac{X_s - x}{h}\right) K\left(\frac{X_r - x}{h}\right) dx \times \\
&\int \text{Re}[\varepsilon_{y_z}(v, X_s) \varepsilon_{y_z}(v, X_r)^*] dW(v)
\end{aligned}$$

式中 $\xi_s = (X_s, Y_s, Z_s)$.

引理 A.2 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下

$$B_2(X) = \{Z \in \mathbf{R}^{d_z} : r(X, Z) < 0\}$$

则有

$$\int_{B_1(X)} r(u, X) dF(u | X) = 0$$

并且

$$\int_{B_2(X)} r(u, X) dF(u | X) = 0$$

即

$$\int_{B_1(X) \cup B_2(X)} r(u, X) dF(u | X) = 0$$

这表明对任意 $X \in G, B_1(X) \cup B_2(X) = \{Z \in \mathbf{R}^{d_z} : r(X, Z) \neq 0\}$ 在概率测度 F 上为空集, 即 $r(X, Z) = 0$ a. s.

根据式 (A.2) 和式 (A.3) 可得 $E(Y_t | X_t, Z_t) = E(Y_t | X_t)$ a. s. 证毕.

2. 定理 1 的证明

首先将 $\hat{\sigma}(v, X)$ 分解为 4 项:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}(v, X) &= \hat{\phi}_{y_z}(v, X) - \hat{\phi}_z(v, X) \hat{\phi}_y(x) \\
&= [\hat{\phi}_{y_z}(v, X) - \phi_{y_z}(v, X)] - \phi_z(v, X) [\hat{\phi}_y(x) - \phi_y(x)] - \\
&\phi_y(x) [\hat{\phi}_z(v, X) - \phi_z(v, X)] - \\
&[\hat{\phi}_y(x) - \phi_y(x)] [\hat{\phi}_z(v, X) - \phi_z(v, X)]
\end{aligned} \quad (A.5)$$

根据式 (A.5) 统计量 $\hat{M}_h \triangleq nh^{d_x/2} \hat{M}$ 可以分解为如下 10 项

$$T_2 = C_2 + \tilde{U}_2 + o_p(1) \quad (A.8)$$

其中

$$\begin{aligned}
C_2 &= h^{-d_x/2} \iint (x) |\phi_y(u, X)|^2 [1 - |\phi_z(v, X)|^2] \times \\
&dW(v) dx \int K(\tau)^2 d\tau, \\
\tilde{U}_2 &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} U_2(\xi_s, \xi_r) \\
&= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} \iint \frac{a(x)}{g(x)} K\left(\frac{X_s - x}{h}\right) K\left(\frac{X_r - x}{h}\right) \phi_y^2(x) \times \\
&\text{Re}[\varepsilon_z(v, X_s) \varepsilon_z(v, X_r)^*] dW(v) dx
\end{aligned}$$

引理 A.3 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下

$$T_3 = C_3 + \tilde{U}_3 + o_p(1) \quad (A.9)$$

其中

$$\begin{aligned}
C_3 &= h^{-d_x/2} \iint a(x) |\phi_z(v, X)|^2 [1 - \phi_y^2(x)] dW(v) dx \times \\
&\int K(\tau)^2 d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_3 &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} U_3(\xi_s, \xi_r) \\ &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} \iint \frac{a(x)}{g(x)} K\left(\frac{X_s - x}{h}\right) K\left(\frac{X_r - x}{h}\right) \times \\ &\quad |\phi_z(v, x)|^2 \varepsilon_y(X_s) \varepsilon_y(X_r) d\mathbf{W}(v) dx \end{aligned}$$

引理 A.4 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下

$$T_4 = \tilde{U}_4 + o_p(1) \tag{A.9}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{U}_4 &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{s \neq r} U_4(\xi_s, \xi_r) \\ &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{s \neq r} \iint \frac{a(x)}{g(x)} K\left(\frac{X_s - x}{h}\right) K\left(\frac{X_r - x}{h}\right) \times \\ &\quad \text{Re}[\phi_y(x) \phi_z(v, x)^* \varepsilon_z(v, X_s) \varepsilon_y(X_r)^*] d\mathbf{W}(v) dx \end{aligned}$$

引理 A.5 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下

$$T_5 = C_5 + \tilde{U}_5 + o_p(1)$$

其中

$$C_5 = -2h^{-d_x/2} \iint a(x) \phi_y^2(x) [1 - |\phi_z(v, x)|^2] d\mathbf{W}(v) dx \times \int K(\tau)^2 d\tau,$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_5 &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{s \neq r} U_5(\xi_s, \xi_r) \\ &= -\frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{s \neq r} \iint \frac{a(x)}{g(x)} K\left(\frac{X_s - x}{h}\right) K\left(\frac{X_r - x}{h}\right) \times \\ &\quad \text{Re}[\phi_y(x) \varepsilon_{y_2}(v, X_s) \varepsilon_z(v, X_r)^*] d\mathbf{W}(v) dx \end{aligned}$$

引理 A.6 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下

$$T_6 = C_6 + \tilde{U}_6 + o_p(1)$$

其中

$$C_6 = -2h^{-d_x/2} \iint a(x) |\phi_z(v, x)|^2 [\phi_{y_2}(x) - \phi_y^2(x)] \times d\mathbf{W}(v) dx \int K(\tau)^2 d\tau,$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_6 &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{s \neq r} U_6(\xi_s, \xi_r) \\ &= -\frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{s \neq r} \iint \frac{a(x)}{g(x)} K\left(\frac{X_s - x}{h}\right) K\left(\frac{X_r - x}{h}\right) \times \\ &\quad \text{Re}[\phi_z(v, x)^* \varepsilon_{y_2}(v, X_s) \varepsilon_y(v, X_r)] d\mathbf{W}(v) dx \end{aligned}$$

引理 A.7 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下

$$T_7 + T_8 + T_9 + T_{10} = o_p(1)$$

根据引理 A.1 至 A.7 并且经过简单计算, 可以得到检验

统计量 \hat{M} 渐近均值 C 以及决定统计量渐近分布的首项 U 为

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 + C_3 + C_5 + C_6 \\ &= h^{-d_x/2} \iint a(x) (\phi_{y_2}(x) - \phi_y^2(x)) (1 - |\phi_z(v, x)|^2) \times \\ &\quad d\mathbf{W}(v) dx \times \int K^2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3 + \tilde{U}_4 + \tilde{U}_5 + \tilde{U}_6 \\ &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} U(\xi_s, \xi_r) \\ &= \frac{2}{nh^{3d_x/2}} \sum_{1 \leq s < r \leq n} [U_1(\xi_s, \xi_r) + U_2(\xi_s, \xi_r) + U_3(\xi_s, \xi_r) + \\ &\quad U_4(\xi_s, \xi_r) + U_5(\xi_s, \xi_r) + U_6(\xi_s, \xi_r)] \end{aligned}$$

引理 A.8 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下, $U/\sqrt{D} \xrightarrow{d} N(0, 1)$, 其中渐近方差为

$$\begin{aligned} D &= 2 \iint a^2(x) [\phi_{y_2}(x) - \phi_y^2(x)]^2 \times \\ &\quad |\Phi_z(v_1 + v_2, x)|^2 d\mathbf{W}(v_1) d\mathbf{W}(v_2) dx \times \\ &\quad \int \int [K(\tau) K(\tau + \eta)]^2 d\tau d\eta \end{aligned}$$

并且

$$\Phi_z(v_1 + v_2, x) = \phi_z(v_1 + v_2, x) - \phi_z(v_1, x) \phi_z(v_2, x)$$

引理 A.9 在定理 1 的条件以及原假设成立的情况下, \hat{C} 和 \hat{D} 是渐近均值 C 和渐近方差 D 的一致估计量.

根据引理 A.1 至引理 A.9 可知, 定理 1 得证. 篇幅所限, 此处不再给出引理 A.1 至 A.9 的证明过程, 感兴趣者可向作者索取.

3. 定理 2 的证明

在局部备择假设式 (20) 成立的条件下

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a(v, x) &= \hat{\phi}_{y_2}(v, x) - \hat{\phi}_y(x) \hat{\phi}_z(v, x) \\ &= [\hat{\phi}_{y_2}(v, x) - \phi_{y_2}(v, x)] - \\ &\quad \phi_z(v, x) [\hat{\phi}_y(x) - \phi_y(x)] - \\ &\quad \phi_y(x) [\hat{\phi}_z(v, x) - \phi_z(v, x)] - \\ &\quad [\hat{\phi}_y(x) - \phi_y(x)] [\hat{\phi}_z(v, x) - \phi_z(v, x)] + \\ &\quad a_n \Delta(x, v) \\ &= \hat{\sigma}(v, x) + a_n \Delta(x, v), \end{aligned}$$

因此, 检验统计量 \hat{M} 可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{M}_a &= h^{d_x/2} \sum_{i=1}^n \iint |\hat{\sigma}_a(v, X_i)|^2 a(X_i) d\mathbf{W}(v) \\ &= \hat{M}_h + 2h^{d_x/2} \times \\ &\quad \sum_{i=1}^n \int \text{Re}[a_n \sigma(v, X_i) \Delta(v, X_i)^*] a(X_i) d\mathbf{W}(v) + \\ &\quad h^{d_x/2} \sum_{i=1}^n \int |a_n|^2 |\Delta(v, X_i)|^2 a(X_i) d\mathbf{W}(v) \\ &= \hat{M}_h + 2M_1 + M_2 \end{aligned}$$

易证

$$E(M_1) = O_p(n^{1/2} h^{(d_x+4)/2}) \hat{C}^{1/2}$$

以及

$$\text{var}(M_1) = O_p(h^{d_x/2} (n^{-1} h^{-d_x} + h^4)) = o_p(1)$$

根据契比雪夫不等式, 即可得到 $M_1 = o_p(1)$. 根据大数定律, 有

$$M_2 \xrightarrow{p} \iint |\Delta(v, x)|^2 a(x) g(x) d\mathbf{W}(v) dx$$

另外, 在备择假设 $H_A(a_n)$ 下, 由于 $M_1 = o_p(1)$, $M_2 - \gamma = o_p(1)$, 统计量的渐近方差并未发生改变, 即 $D_a =$

$$\text{var}(\hat{M}_a) \xrightarrow{p} D. \tag{证毕.}$$