

带有能力约束的多元马氏需求报童模型^①

陈 杰^{1,2}, 陈志祥¹, 邢灵博², 陈崇萍¹

(1. 中山大学管理学院, 广州 510275; 2. 海南热带海洋学院数学系, 三亚 572022)

摘要: 在随机需求环境下考虑带有能力约束的多产品报童问题. 为了对多产品的需求进行预测, 并度量其需求间的关系, 本文首先建立了多元马氏需求模型. 其次, 在该模型的理论基础上, 提出了带有能力约束的多元马氏需求报童模型, 进而给出多产品的最优订购策略解. 最后, 利用期望需求状态的概率值及其截尾概率分析了模型最优解的性质. 模型的结论表明, 在能力约束的条件下, 最优订购量关于左截尾概率单调递减, 关于右截尾概率单调递增, 而期望需求状态的概率值对最优订购量具有双重的特殊影响.

关键词: 多元马氏链; 多产品报童模型; 能力约束; 截尾概率; 最优订购策略

中图分类号: O211.62; F253.4 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2016)07-0037-13

0 引 言

Whitin^[1]是较早研究报童模型的学者之一, 他提出的模型在库存优化管理领域里得到了空前的应用和拓展, 但随着现代供应链管理所提倡的具有革命性的 QRD (quickly respond to demand) 理念的提出^[2], 经典报童模型的整个理论体系受到了极大的冲击和挑战. QRD 供应理念要求供应商对市场的需求做出迅速的响应, 这种响应方式建立在正确的订购策略基础之上, 并以需求预测为前提条件, 这对需求的预测提出了更高的要求. 然而, 在能力约束的条件下, 以需求预测为基础的经典报童模型^[3], 得出来的最优订购策略存在不足之处, 即在给定需求的分布函数的条件下, 最优订购策略只跟能力、单位缺货成本和过剩费用等非随机因素有关, 该模型忽略了需求状态的概率值及其左、右截尾概率对模型最优解的影响. 同样, 在处理多产品的最优化问题时, 传统的多产品报童模型也忽略了各产品需求间的关联性. 因此, 在随机需求环境下, 其模型的理论设计有待于进一

步完善.

近年来, 报童模型作为优化库存订购决策的重要理论工具, 仍是理论研究的热点之一. 姚忠^[4]在风险约束下运用报童库存模型建立了供应链决策模型, 分析了退货策略对单周期供应链的协调性. 黄松等^[5,6]则考虑了战略顾客行为因素并引入了理性预期均衡分析, 建立了相应的模型并得到战略顾客双方静态博弈时的理性预计均衡解. 李毅学等^[7]考虑了统一授信模式的特征及成本收益结构, 借鉴贸易融资中“主体+债项”的风险评估思路, 构建融资约束下的报童模型, 分析风险中性的借款企业的再订购决策, 并通过借款企业和物流企业的 Stackelberg 动态博弈, 分析下侧风险规避的物流企业的质押率决策. 谷水亮和鞠彦兵^[8]结合资金因素建立了多产品的报童模型, 并通过费用函数最小化的实现来寻求满足约束条件的最优订购量. 朱赛花等^[9]研究了在资源和预算约束条件下允许外购的多产品报童问题, 在非零延迟时间外购情况下建立了以求总体花费

① 收稿日期: 2014-01-08; 修订日期: 2015-02-19.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71372154); 海南省自然科学基金资助项目(20151008); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目(15YJC630013).

作者简介: 陈 杰(1979—), 男, 海南临高人, 博士, 副教授. Email: sysuchenjie@126.com

最小值为目标函数的优化模型.周艳菊等^[10]考虑了需求不确定条件下的两产品订货问题,在前景理论的框架下分析、推导了随机市场需求下零售商对两产品订货的价值函数、主观概率与决策权重函数,并建立了两产品报童的订货模型.Chen^[11]在资源约束的条件下,研究了报童问题的Stackelberg-Nash均衡策略,并从理论上证明了其存在性和唯一性.在风险约束条件下,Choi和Ruszczyński^[12]利用指数效用函数对多产品报童模型的风险规避性进行了系统的分析.基于预算约束的条件,Shi和Zhang^[13]联合定价和折扣因子提出了多产品报童模型.Zhang和Du^[14]在能力的约束条件和假设不同产品的需求相互独立的情况下,引入产品外包的思想考虑了报童问题,并给出模型的最优解及其性质.在服务和损失约束条件下,Jammernegg和Kischka^[15,16]研究了风险偏好及价格敏感下的报童模型.Murray等^[17]在资源能力约束的条件下,建立了基于价格敏感的多产品报童模型,并利用整数规划方法给出模型的最优解.由于带约束条件的多产品报童模型求解过程比较复杂,从而引起一些学者致力于对其求解方法的研究.Zhang和Hua^[18]通过组合方法对带有预算约束条件的多产品模型进行求解,而Abdel和Otegbeye^[19]则利用可分离规划和对偶方法对相应模型的求解方法进行研究.虽然以上对多产品报童模型的研究成果进一步完善了报童模型的理论,但是这些理论成果有个共同点就是基于各产品需求间的独立性.然而,在随机需求的环境下,由于顾客的需求具有多样性、偏好性和转移性等显著特点,导致多产品的需求之间发生相互转移,从而产生需求间的关联性.显然,在这种情形下各产品的需求间不具有独立性.因此,需进一步发展新的理论工具来解决此类库存优化问题.

Ching等^[20]在传统马氏理论的基础上提出了更一般化的马氏链,即多元马尔可夫模型,并建立了多产品的需求状态预测模型.虽然利用多元马尔可夫模型可以解决多产品需求状态间的关系和需求状态预测问题,但需求状态毕竟不是需求量,两者是不同的概念.现代库存优化控制理论基本上都是以需求量的预测为基础,而不是需求状态,因此该模型的理论成果与经典报童模型不具有兼

容性.事实上,所谓需求状态就是决策者根据产品需求量的大小对其进行等级划分,如实践过程中常将其划分为淡季、一般、中等、较好和旺季等五个需求状态(具体的定义详见文献[21]的第6.3.2节).可见,需求状态和需求量具有属性之别,即前者为产品需求的定性描述,而后者则为定量描述.Ching等提出的预测模型只给出产品的需求在未来的某个周期所处的状态,如处于淡季或旺季状态,即只给出模糊的需求程度,却未指出产品未来的具体需求量.经典报童模型则建立在随机需求变量 x 的密度函数 $f(x)$ 的基础之上,其中变量 x 表示产品的需求量,而非需求状态.因此,两者不具有兼容性.为了克服这个技术难点,本文首先将需求量进行状态划分作为理论的切入点,再利用需求量的密度函数作为状态依赖的假设条件,转化期望需求状态为期望需求量,进而在建立多元马氏需求模型的理论基础上,提出带有能力约束的多元马氏需求报童模型,并基于该模型研究多产品的最优订购策略问题.同时,利用期望需求状态的概率值及其截尾概率分析该模型最优解的性质.

1 模型构建

1.1 模型描述、符号说明和假设

需求的多样性、转移性是现代消费最显著的特性之一,消费者在产品的品牌、质量、价格和实用性等诸多方面具有不同的需求偏好性.供应商为了顺应这种趋势以保持其在市场竞争中的优势,往往致力于沿着商品的多元化方向进行研发和拓展.在这样的市场环境下,当消费者面临多种选择时,在一定的时间段有可能因为选择了A系列产品,而不会再选择其它系列的产品,或者在某个时期内选择A产品,而在下个阶段选择消费B产品,从而导致顾客需求在不同产品间发生转移.可见,需求转移是消费市场客观存在的一种普遍的经济现象.在能力约束条件下,当多种产品的顾客需求在不同产品之间产生相互转移时,如何科学地度量它们之间的关系并预测其需求,直接影响到库存系统决策者所制定的库存订购策略的科学性和合理性.因此,库存决策者为了达到优化库

存的目的,不但要考虑各产品的需求,在宏观上还要确定各产品需求间的关系.为了方便问题的阐述,首先作出以下符号的说明

$k = 1, 2, \dots, K$ 表示库存系统的周期,而 $n = 1, \dots, N$ 表示第 n 种产品;

$I = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ 表示各产品的需求状态集;

$d_{nk} \in I$ 为第 n 种产品在第 k 周期的需求状态, $k = 1, 2, \dots, K$;

$\{d_{nk}\} =$ 带有 $l \times l$ - 转移概率矩阵 $P^{(nm)} = (p_{ji})_{l \times l}$ 的第 n 条马氏链;

$D_{nk} =$ 第 n 种产品在第 k 周期的需求量,其中 $D_{nk} \geq 0$;

$P^{(ji)} =$ 第 i 种产品的需求状态到第 j 种产品的需求状态的转移概率矩阵;

$C_{nk}^{(s)} =$ 第 n 种产品在第 k 周期的单位缺货成本 (shortage/underage cost);

$C_{nk}^{(o)} =$ 第 n 种产品在第 k 周期的单位过剩成本 (overage cost);

$w_{nk} =$ 第 k 周期内生产第 n 种产品的单位资源消耗量;

$Q_{nk} =$ 第 n 种产品在第 k 周期的订购批量;

$SL_{nk} =$ 第 n 种产品在第 k 周期的最优服务水平;

$\phi_{i_k}(D_{nk}) =$ 当第 n 种产品在第 k 周期处于需求状态 i_t 时的密度函数 ($t = 1, 2, \dots, l$); $\Phi_{i_k}(D_{nk})$ 为其相应的分布函数.

接下来对本文的模型做出一些基本假设: 1) 各种产品的需求量 D_{nk} ($n = 1, \dots, N$) 满足马尔可夫性,且为需求状态依赖的,即 D_{nk} 的具体密度函数 $\phi_{i_k}(D_{nk})$ 与需求状态 i 的取值有关; 2) 瞬时供货; 3) 在每周开始时做一次订货决策; 4) 单位缺货成本 $C_{nk}^{(s)}$ 、单位过剩成本 $C_{nk}^{(o)}$ 和单位资源消耗量 w_{nk} 等参数为固定的常量; 5) 决策准则为期望成本最小.

1.2 多元马氏需求模型

需求预测是现代库存优化控制理论的基础,如何对产品的需求做出科学的预测关乎库存优化决策的科学性和合理性.本文主要以多元马尔可夫理论方法对多产品的需求进行统一预测,进而确定它们之间的关系.为了建立多元马氏需求模型,首先介绍以下引理.

引理 1 (i) 设 $P^{(ji)}$ 表示第 i 种产品的需求状态到第 j 种产品的需求状态的转移概率矩阵,且 $P^{(ji)}$ 为不可约的; (ii) $X_k = (X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \dots, X_k^{(N)})^T$ 为多元马氏链中各序列于第 k 周期的需求状态的概率分布,其中 $X_k^{(n)}$ ($n = 1, \dots, N$) 表示第 n 种产品于第 k 周期的需求状态的概率分布,则

$$\text{存在 } A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \sum_{i=1}^N \lambda_{ji} = 1, \lambda_{ji} \geq 0, \text{ 使得 } X_{k+1} = AX_k, \text{ 这里 } A = \begin{pmatrix} \lambda_{11}P^{(11)} & \lambda_{12}P^{(12)} & \dots & \lambda_{1N}P^{(1N)} \\ \lambda_{21}P^{(21)} & \lambda_{22}P^{(22)} & \dots & \lambda_{2N}P^{(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{N1}P^{(N1)} & \lambda_{N2}P^{(N2)} & \dots & \lambda_{NN}P^{(NN)} \end{pmatrix}, \lambda_{nm} \text{ 为概率}$$

分布 $X_{k+1}^{(n)}$ 与 $X_k^{(m)}$ 的关系权数, $n, m = 1, 2, \dots, N$. (引理 1 的证明过程和参数矩阵 A 的求解详见文献 [21]). 证毕.

在满足引理 1 的条件下,称 $X_{k+1} = AX_k$ 为多元马氏模型.该模型不但给出了各产品需求状态在下周期的概率分布,同时还进一步表明了其需求状态概率分布间的关系.事实上,由 $X_{k+1} = AX_k$,可得第 n 种产品于第 $k + 1$ 周期需求状态的概率分布为 $X_{k+1}^{(n)} = \sum_{m=1}^N \lambda_{nm} P^{(nm)} X_k^{(m)}$.由此可见,关系权数 λ_{nm} 度量了概率分布 $X_{k+1}^{(n)}$ 与 $X_k^{(m)}$ 之间的关系.

记向量 $\hat{I} = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T$, 其中 $i_t \in I$ 为需求状态 ($t = 1, \dots, l$).因为 $X_{k+1}^{(n)}$ 为第 n 种产品于第 $k + 1$ 周期的需求状态的概率分布,故 $E(d_{n(k+1)}) = X_{k+1}^{(n)} \hat{I}$ 为其于第 $k + 1$ 周期的期望需求状态.再由引理 1 的结论,易得出以下的命题.

命题 1 设 $X_k = (X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \dots, X_k^{(N)})^T$ 为多元马氏链中各序列于第 k 周期的需求状态的概率分布, $d_k = (d_{1k}, d_{2k}, \dots, d_{Nk})^T$ 表示各产品于第 k 周期的需求状态,其中 $d_{nk} \in I, n = 1, \dots, N$, 则各产品于第 $k + 1$ 周期的期望需求状态为

$$E(d_{k+1}) = X_{k+1} \hat{I} = AX_k \hat{I} \tag{1}$$

引理 1 的结论只表明了各序列间的概率分布

的内在关联性,而命题1的结论不但确定了它们需求状态间的关系,还进一步对库存系统中未来的需求状态做出了理论上的预测.事实上,根据式(1),易得第 n 种产品于第 $k+1$ 周期的期望需求状态为 $E(d_{n(k+1)}) = X_{k+1}^{(n)} \hat{I} = \sum_{m=1}^N \lambda_{nm} P^{(nm)} X_k^{(m)} \hat{I}$, 并且从本式子中易知该产品与其它产品的需求状态间的关系权数为 λ_{nm} (这里要求 $n \neq m$, 而当 $n = m$ 时是与它自身的关系).然而,需求状态并非需求量,两者为不同的概念,还不能直接利用式(1)对需求量进行预测.因此,需要一些理论工具将两者相互转化.

一般情况下,所谓需求状态就是决策者根据产品需求的大小对其进行等级划分,即将整个需求区间分割成若干小区间,把落在同一小区间内的需求统称为某一需求状态.从数学的角度,若取数值 a 作为每个需求小区间的长度,且满足对于 $\forall k$ 有 $D_{nk} \in \cup_{t=1}^l [(t-1)a, ta)$, 则利用映射方式就可以给出需求状态的定义

$$i_t \triangleq \begin{cases} f(D_{nk}), & D_{nk} \in [(t-1)a, ta), \\ & t = 1, 2, \dots, l; a > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2)$$

同时,称 a 为需求状态分类系数,而称 $[(t-1)a, ta)$ 为隶属于状态 i_t 的需求区间.

以上的式子通过映射 $f(\cdot)$ 给出了需求量转化为需求状态的一般方法,接下来主要研究如何将需求状态转化为需求量.由式(2)和模型的假设1可知 D_{nk} 为状态依赖的,故可设 $\phi_{i_t, k}(D_{nk})$ 为当 $d_{nk} = i_t$ 时的密度函数,即 $\phi_{i_t, k}(D_{nk})$ 为当 D_{nk} 属于区间 $[(t-1)a, ta)$ 时的概率密度.于是,可得出以下命题.

命题2 设 $\phi_{i_t, k}(D_{nk})$ 为当 $d_{nk} = i_t \in I$ 时的密度函数, $X_k^{(n)} = (x_{i_1k}^{(n)}, x_{i_2k}^{(n)}, \dots, x_{i_lk}^{(n)})$ 为第 n 种产品于第 k 周期需求状态的概率分布,则

$$E(D_{nk}) = \sum_{t=1}^l x_{i_tk}^{(n)} \int_{(t-1)a}^{ta} D_{nk} \phi_{i_t, k}(D_{nk}) dD_{nk} \quad (3)$$

证明 因为 $\phi_{i_t, k}(D_{nk})$ 为当 $d_{nk} = i_t$ 时的密度函数,所以 $\int_{(t-1)a}^{ta} D_{nk} \phi_{i_t, k}(D_{nk}) dD_{nk}$ 为库存系统处于需求状态 i_t 时的期望需求量.由 $X_k^{(n)} = (x_{i_1k}^{(n)}, \dots, x_{i_lk}^{(n)})$ 的定义,知系统处于需求状态 i_t 时所对应的概率取值等于 $x_{i_tk}^{(n)}$, $t = 1, 2, \dots, l$, 同时也是需求量的期望值等于 $\int_{(t-1)a}^{ta} D_{nk} \phi_{i_t, k}(D_{nk}) dD_{nk}$ 的概率,所以当 t 取遍所有相应的赋值时,有 $E(D_{nk}) = \sum_{t=1}^l x_{i_tk}^{(n)} \int_{(t-1)a}^{ta} D_{nk} \phi_{i_t, k}(D_{nk}) dD_{nk}$. 证毕.

命题2的结论不但确定了变量 d_{nk} 和 D_{nk} 之间的关系,还给出了将 d_{nk} 转化为 D_{nk} 的具体方法.该结论在研究马氏理论在库存问题的应用中是至关重要的.因为多元马氏链是根据需求状态的转移概率对系统未来所处的需求状态作出科学预测,所以得到的预测结果是需求状态而非需求量.有了命题2的理论基础,接下来即可建立多产品的多元马氏需求模型.

记 $\eta_k = (\eta_{1k}, \eta_{2k}, \dots, \eta_{lk})$, 其中 $\eta_{i_k} = (\eta_{i_1k}^{(n)}, \eta_{i_2k}^{(n)}, \dots, \eta_{i_lk}^{(n)})^T$, 而 $\eta_{i_k}^{(n)} = \int_{(t-1)a}^{ta} D_{nk} \phi_{i_t, k}(D_{nk}) dD_{nk}$, $t = 1, 2, \dots, l$ (也就是当 $d_{nk} = i_t$ 时的期望需求量).显然,由引理1和命题2的结论可知,各产品于第 $k+1$ 周期的期望需求量为

$$E(D_{k+1}) = X_{k+1} \eta_{k+1} = A X_k \eta_{k+1} \quad (4)$$

这里 A 和 X_k 如引理1所定义,而 $D_{k+1} = (D_{1(k+1)}, D_{2(k+1)}, \dots, D_{N(k+1)})^T$. 称式(4)为多元马氏需求模型.

由该模型,易知第 n 种产品于第 $k+1$ 周期的期望需求量为

$$E(D_{n(k+1)}) = X_{k+1}^{(n)} \eta_{n(k+1)} = \sum_{m=1}^N \lambda_{nm} P^{(nm)} X_k^{(m)} \eta_{n(k+1)} \quad (5)$$

$E(D_{n(k+1)})$ 的表达式,进一步表明了单个产品在下一个周期的需求量不但与现阶段相关,还与其它产品的需求量有着密切的关联,它们之间的关系权数同样为 λ_{nm} .

1.3 带有能力约束的多元马氏需求报童模型

在假设 $\phi(x)$ 为随机需求 x 的概率密度条件下,经典的报童模型为^[3]

$$E\Pi = C^{(o)} \int_0^Q (Q-x) \phi(x) dx + C^{(s)} \int_Q^{+\infty} (x-Q) \phi(x) dx \quad (6)$$

其中 $C^{(s)}$ 和 $C^{(o)}$ 分别为产品的单位缺货成本和单位过剩成本, Q 为产品的订购量.本小节主要在

经典的报童模型的理论基础上, 结合上文提出的多元马氏需求模型, 在能力约束条件下研究建立新的多产品报童模型.

由于本文只考虑库存系统在下个销售周期的优化控制问题, 所以若 $\{1, 2, \dots, k\}$ 为系统的历史周期, 则系统的下个周期为 $T = k + 1$. 记 $X_{k+1}^{(n)} = (x_{i_1(k+1)}^{(n)}, x_{i_2(k+1)}^{(n)}, \dots, x_{i_l(k+1)}^{(n)})$ 为第 n 种产品于第

$k + 1$ 周期的需求状态的分布概率. 由模型的假设知, 不同的需求状态 i 所对应的需求的概率密度不一定相等. 因此, 若订购量 $Q_{n(k+1)}$ 落在隶属于需求状态 i_{t_0} 的需求区间 $[(t_0 - 1)a, t_0 a)$, $t_0 = 1, 2, \dots, l$, 即 $Q_{n(k+1)} \in [(t_0 - 1)a, t_0 a)$, 则由式(5)和式(6)可得第 n 种产品于第 $k + 1$ 周期基于多元马氏需求模型的期望成本函数, 即

$$\begin{aligned}
 E\Pi_{n(k+1)} &= C_{n(k+1)}^{(o)} \left[\sum_{i=1}^{t_0} x_{i_1(k+1)}^{(n)} \int_{(i-1)a}^{ia} (Q_{n(k+1)} - D_{n(k+1)}) \phi_{i, k+1}(D_{n(k+1)}) dD_{n(k+1)} + x_{i_{t_0}(k+1)}^{(n)} \int_{(t_0-1)a}^{Q_{n(k+1)}} (Q_{n(k+1)} - D_{n(k+1)}) \phi_{i_{t_0}, k+1}(D_{n(k+1)}) dD_{n(k+1)} \right] + \\
 &C_{n(k+1)}^{(s)} \left[x_{i_{t_0}(k+1)}^{(n)} \int_{Q_{n(k+1)}}^{t_0 a} (D_{n(k+1)} - Q_{n(k+1)}) \phi_{i_{t_0}, k+1} dD_{n(k+1)} + \sum_{i=t_0+1}^l x_{i_1(k+1)}^{(n)} \int_{(i-1)a}^{ia} (D_{n(k+1)} - Q_{n(k+1)}) \phi_{i, k+1}(D_{n(k+1)}) dD_{n(k+1)} \right] \\
 &= C_{n(k+1)}^{(o)} [Q_{n(k+1)} - E(D_{n(k+1)})] + (C_{n(k+1)}^{(s)} + C_{n(k+1)}^{(o)}) \left[x_{i_{t_0}(k+1)}^{(n)} \int_{Q_{n(k+1)}}^{t_0 a} (D_{n(k+1)} - Q_{n(k+1)}) \phi_{i_{t_0}, k+1}(D_{n(k+1)}) dD_{n(k+1)} + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=t_0+1}^l x_{i_1(k+1)}^{(n)} \int_{(i-1)a}^{ia} (D_{n(k+1)} - Q_{n(k+1)}) \phi_{i, k+1}(D_{n(k+1)}) dD_{n(k+1)} \right] \\
 &= C_{n(k+1)}^{(o)} [Q_{n(k+1)} - E(D_{n(k+1)})] + (C_{n(k+1)}^{(s)} + C_{n(k+1)}^{(o)}) \left[x_{i_{t_0}(k+1)}^{(n)} \int_{Q_{n(k+1)}}^{t_0 a} (D_{n(k+1)} - Q_{n(k+1)}) \phi_{i_{t_0}, k+1}(D_{n(k+1)}) dD_{n(k+1)} + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=t_0+1}^l x_{i_1(k+1)}^{(n)} (\eta_{i_1(k+1)}^{(n)} - Q_{n(k+1)}) \right] \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中 $E(D_{n(k+1)}) = X_{k+1}^{(n)} \boldsymbol{\eta}_{n(k+1)} = \sum_{m=1}^N \lambda_{nm} \mathbf{P}^{(nm)} X_k^{(m)} \boldsymbol{\eta}_{n(k+1)}$; $1 \leq t_0 \leq l-1$; $\boldsymbol{\eta}_{n(k+1)} = (\eta_{i_1(k+1)}^{(n)}, \eta_{i_2(k+1)}^{(n)}, \dots, \eta_{i_l(k+1)}^{(n)})^T$ 而 $\eta_{i_t(k+1)}^{(n)} = \int_{(t-1)a}^{ia} D_{n(k+1)} \phi_{i, k+1}(D_{n(k+1)}) dD_{n(k+1)}$, $t = 1, 2, \dots, l$ 即当 $d_{n(k+1)} = i_t$ 时的期望需求量.

$E(D_{n(k+1)})$ 的值, 再确定 $Q_{n(k+1)}$ 的最优值, 即可达到优化订购策略的目的.

若记 $E\Pi = V(Q_{1(k+1)}, Q_{2(k+1)}, \dots, Q_{N(k+1)})$ 为销售商的总期望成本, 在模型的各个假设条件下结合式(7) 则有

2 模型的最优解及其性质

2.1 模型的最优订货策略

记 $\mathbf{Q}_{k+1} = (Q_{1(k+1)}, Q_{2(k+1)}, \dots, Q_{N(k+1)})^T$, 并称其为各产品于第 $k + 1$ 周期的订货策略. 若 \mathbf{Q}_{k+1}^* 为模型(9) 的最优解, 则称其为带有能力约束的多元马氏需求报童模型的最优订货策略. 决策者可以根据 \mathbf{Q}_{k+1}^* 中的信息, 制定优化库存系统的决策, 获取最大的利润. 接下来主要研究在模型(9) 的条件下, 给出其最优订货策略.

$$\begin{aligned}
 E\Pi &= V(Q_{1(k+1)}, Q_{2(k+1)}, \dots, Q_{N(k+1)}) \\
 &= \sum_{n=1}^N E\Pi_{n(k+1)} \tag{8}
 \end{aligned}$$

命题3 设第 n 种产品于第 $k + 1$ 周期的需求状态的分布概率为 $X_{k+1}^{(n)} = (x_{i_1(k+1)}^{(n)}, x_{i_2(k+1)}^{(n)}, \dots, x_{i_l(k+1)}^{(n)})$, 订购量 $Q_{n(k+1)}$ 落在隶属于状态 i_{t_0} 的需求区间 $[(t_0 - 1)a, t_0 a)$, $t_0 = 1, 2, \dots, l$, 即 $Q_{n(k+1)} \in [(t_0 - 1)a, t_0 a)$, 其中 a 为需求状态分类系数, 若 $\mathbf{Q}_{k+1}^* = (Q_{1(k+1)}^*, Q_{2(k+1)}^*, \dots, Q_{N(k+1)}^*)^T$ 为模型(9) 的 Kuhn-Tucker 条件下的极小值点, 则 $\mathbf{Q}_{k+1}^* = (Q_{1(k+1)}^*, Q_{2(k+1)}^*, \dots, Q_{N(k+1)}^*)^T$ 为该模型的最优解, 其中

记 w_{nk} 为在第 k 周期内生产第 n 种产品所消耗的单位资源量, C 为总产品在生产过程中能获得资源的能力上限. 于是, 在相应的能力约束的条件下, 结合式(8) 即可提出以下的(MP) 问题, 即带有能力约束的多元马氏需求报童模型

$$\begin{cases} \min E\Pi = \sum_{n=1}^N E\Pi_{n(k+1)} \\ \text{s. t. } \sum_{n=1}^N w_{n(k+1)} Q_{n(k+1)} \leq C \end{cases} \tag{9}$$

由式(9) 可知, 多产品报童模型 $E\Pi$ 是关于订购量 $Q_{1(k+1)}, Q_{2(k+1)}, \dots, Q_{N(k+1)}$ 的函数. 因此, 只需利用多元马氏理论求出各产品的期望需求

$$Q_{n(k+1)}^* = \Phi_{i_0, k+1}^{-1} \left[\frac{C_{n(k+1)}^{(s)} P_n(I \geq i_0) - C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_0) - \lambda^* w_{n(k+1)}}{P_n(I = i_0) (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})} \right] \quad (10)$$

这里 λ^* 为模型 (9) 的 Kuhn-Tucker 条件的拉格朗日乘子。

证明 由约束集 $X = \{Q_{k+1} \in R^N \mid \sum_{n=1}^N w_{n(k+1)} \times Q_{n(k+1)} - C \leq 0\}$ 易知 X 为凸集. 对于 $\forall Q_{k+1} \in X$, 记 $B = (b_{nm})_{N \times N}$, 其中 $b_{nm} = \frac{\partial^2 E\Pi}{\partial Q_{n(k+1)} \partial Q_{m(k+1)}}$, $n, m = 1, 2, \dots, N$. 由总期望成本 $E\Pi = V(Q_{1(k+1)}, Q_{2(k+1)}, \dots, Q_{N(k+1)}) = \sum_{n=1}^N E\Pi_{n(k+1)}$ 的表达式可知, 当 $n = m$ 时, $b_{nn} = x_{i_0(k+1)}^{(n)} (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)}) \phi_{i_0, k+1}(D_{n(k+1)})$; 当 $n \neq m$ 时 $b_{nm} = 0$. 记 B_n 为 B 的 n 阶主子式, 即 $B_n = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

$$Q_{n(k+1)}^* = \Phi_{i_0, k+1}^{-1} \left[\frac{C_{n(k+1)}^{(s)} P_n(I \geq i_0) - C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_0) - \lambda^* w_{n(k+1)}}{P_n(I = i_0) (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})} \right].$$

其中 $P_n(I \geq i_0) = \sum_{l=i_0}^l x_{i_l(k+1)}^{(n)}$, $P_n(I < i_0) = 1 - P_n(I \geq i_0)$, $P_n(I = i_0) = x_{i_0(k+1)}^{(n)}$. 证毕.

由命题 3 的结论, 可得第 n 种产品于第 $k + 1$ 周期的最优服务水平 (其具体的定义详见文献 [3] 中的式 (6))

$$SL_{n(k+1)}^* = \frac{C_{n(k+1)}^{(s)} P_n(I \geq i_0) - C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_0) - \lambda^* w_{n(k+1)}}{P_n(I = i_0) (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})} \quad (11)$$

2.2 最优解的性质

定义 1 设 $X_{k+1}^{(n)} = (x_{i_1(k+1)}^{(n)}, x_{i_2(k+1)}^{(n)}, \dots, x_{i_l(k+1)}^{(n)})$ 为第 n 种产品在第 $k + 1$ 周期的期望需求状态的概率分布, 即其处于期望需求状态 i_l 的概率为 $P_n(I = i_l) = x_{i_l(k+1)}^{(n)}$, $l = 1, 2, \dots, l$. 为了便于分析基于多元马氏需求的模型 (9) 最优解的性质, 定义 $P_n(I < i_0) = \sum_{l=1}^{l=i_0} x_{i_l(k+1)}^{(n)}$ 为第 n 种产品于第 $k + 1$ 周期以需求状态 i_0 为截点的左截尾概率, 而定义 $P_n(I \geq i_0) = \sum_{l=i_0}^l x_{i_l(k+1)}^{(n)}$ 为其相应的右截尾概率.

$n = 1, 2, \dots, N$. 显然, 对于任意 n , 有 $b_{nn} > 0$, 故 $B_n > 0$. 因此, 矩阵 B 为正定的, 故 $E\Pi$ 为凸函数. 由此可见, 由式 (9) 所确定的 (MP) 问题为凸规划. 因为在凸规划下, 满足 Kuhn-Tucker 条件的极小值点为 (MP) 问题最优解的充要条件, 所以 $Q_{k+1}^* = (Q_{1(k+1)}^*, Q_{2(k+1)}^*, \dots, Q_{N(k+1)}^*)^T$ 为模型 (9) 的最优解. 再由该模型的 Kuhn-Tucker 条件, 即

$$\begin{cases} \nabla E\Pi + \lambda^* \nabla (\sum_{n=1}^N w_{n(k+1)} Q_{n(k+1)}^* - C) = 0 \\ \lambda^* (\sum_{n=1}^N w_{n(k+1)} Q_{n(k+1)}^* - C) = 0, \lambda^* \geq 0 \end{cases}; \quad \text{解之得}$$

命题 4 最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 是关于右截尾概率 $P_n(I \geq i_0)$ 的单调递增函数, 关于左截尾概率 $P_n(I < i_0)$ 为单调递减函数.

证明 显然, 第 n 种产品于第 $k + 1$ 周期的最优服务水平 $SL_{n(k+1)}^*$ 为关于右截尾概率 $P_n(I \geq i_0)$ 的单调递增函数, 而关于单位消耗资源量 $w_{n(k+1)}$ 和左截尾概率 $P_n(I < i_0)$ 为单调递减函数. 由于分布函数 $\Phi_{i_0, k+1}(Q_{n(k+1)})$ 为单调递增函数, 且由命题 3 的结论可知最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^* = \Phi_{i_0, k+1}^{-1}(SL_{n(k+1)}^*)$, 故最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 是关于 $SL_{n(k+1)}^*$ 的单调递增函数. 因此, 左、右截尾概率和单位消耗资源量与最优订购策略之间的关系, 如同与最优服务水平的关系. 证毕.

从直观上来看, 很容易理解这种关系的内涵. 事实上, 因为右截尾概率 $P_n(I \geq i_0)$ 的取值越大时, 其所对应的期望需求状态 $\sum_{l=i_0}^l i_l x_{i_l(k+1)}^{(n)}$ 的值就越大, 而由需求状态 i_l 的定义可知, 当期望需求状态越大时所对应的期望需求量的取值就越大, 故库存系统在第 $k + 1$ 周期内订购量就越多. 同理可得, 当左截尾概率 $P_n(I < i_0)$ 的取值越大时, 库存系统在第 $k + 1$ 周期内订购量就越少. 因此, 最

优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 是关于 $P_n(I \geq i_{t_0})$ 的单调递增函数, 关于 $w_{n(k+1)}$ 和 $P_n(I < i_{t_0})$ 为单调递减函数. 命题 4 的结论给出了最优订购策略的基本性质, 决策者通过此性质不但可以获知最优订购策略与左右截尾概率之间的内在关联性, 还可以获取库存系统最优服务水平的相关信息. 事实上, 由式 (11) 可得最优服务水平 $SL_{n(k+1)}^* = \Phi_{i_{t_0, k+1}}(Q_{n(k+1)}^*)$, 故当右截尾概率 $P_n(I \geq i_{t_0})$ 的取值越大时, 系统的服务水平就越高; 当左截尾概率 $P_n(I < i_{t_0})$ 的取值越大时, 反而就越低.

因为最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 是关于右截尾概率的单调递增函数, 且由 $P_n(I \geq i_{t_0}) = P_n(I = i_{t_0}) + \sum_{I=i_{t_0}+1}^I P_n(I = i_t)$, 可知当第 n 种产品在下一个周期所处于期望需求状态 i_{t_0} 的概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 增大时, 右截尾概率的值也相应增大, 故订购量也相应

$$SL_{n(k+1)}^* = [C_{n(k+1)}^{(s)} P_n(I \geq i_{t_0}) - C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_{t_0}) - \lambda^* w_{n(k+1)}] / P_n(I = i_{t_0}) (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})$$

$$= [C_{n(k+1)}^{(s)} (P_n(I > i_{t_0}) + P_n(I = i_{t_0})) - C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_{t_0}) - \lambda^* w_{n(k+1)}] / P_n(I = i_{t_0}) (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})$$

记 $SL_{n(k+1)}^*(x) = [C_{n(k+1)}^{(s)} (P_n(I > i_{t_0}) + x) - C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_{t_0}) - \lambda^* w_{n(k+1)}] / x (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})$, $x \in (0, 1]$. 对

$$\frac{dSL_{n(k+1)}^*(x)}{dx} = \frac{[C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_{t_0}) - C_{n(k+1)}^{(s)} P_n(I > i_{t_0}) + \lambda^* w_{n(k+1)}]}{x^2 (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})}$$

$$= \frac{[C_{n(k+1)}^{(o)} P_n(I < i_{t_0}) - C_{n(k+1)}^{(s)} (1 - P_n(I < i_{t_0}) - P_n(I = i_{t_0})) + \lambda^* w_{n(k+1)}]}{x^2 (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})}$$

因为当 $\frac{dSL_{n(k+1)}^*(x)}{dx} > 0$ 时, $SL_{n(k+1)}^*(x)$ 为单调递增函数; 当 $\frac{dSL_{n(k+1)}^*(x)}{dx} < 0$ 时, $SL_{n(k+1)}^*(x)$ 为单调递减函数. 令 $\frac{dSL_{n(k+1)}^*(x)}{dx} = 0$, 该方程的解为 $P_n^*(I = i_{t_0}) = \frac{C_{n(k+1)}^{(s)} - \lambda^* w_{n(k+1)} - P_n(I < i_{t_0}) (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})}{C_{n(k+1)}^{(s)}}$.

显然, $P_n^*(I = i_{t_0})$ 为该函数单调属性的临界点. 因此, $P_n^*(I = i_{t_0})$ 为 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购策略施加正反影响的概率临界值. 证毕.

定义 2 若库存系统的 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 为 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购策略施加正反影响的临界点, 则称之为 $P_n(I = i_{t_0})$ 的概率临界值, 并称 $\{P_n(I = i_{t_0}) \mid P_n(I = i_{t_0}) \in [0, P_n^*(I = i_{t_0})]\}$ 为 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购

的增加. 因此, $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购量具有正面的影响, 其所产生的正面影响部分主要通过截尾概率的途径映到最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 的值. 同时, $P_n(I = i_{t_0})$ 又以 $1/x_{i_{t_0}(k+1)}^{(n)}$ 方式通过 i_{t_0} 所对应的分布函数的反函数 $\Phi_{i_{t_0, k+1}}^{-1}(\cdot)$ 对 $Q_{n(k+1)}^*$ 进行负干扰, 进而对最优订购量施加反面的影响. 可见, 库存系统在下一个周期所处于的需求状态 i_{t_0} 的概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购量具有双重性的特殊影响, 接下来给出其正反两方面影响的理论条件.

命题 5 设 $Q_{n(k+1)}^* (n = 1, 2, \dots, N)$ 为模型 (9) 的最优订购策略, $P_n(I = i_{t_0})$ 为第 n 种产品在下一个周期 (第 $k+1$ 周期) 处于期望需求状态 i_{t_0} 的概率值, 则 $P_n^*(I = i_{t_0}) = [C_{n(k+1)}^{(s)} - \lambda^* w_{n(k+1)} - P_n(I < i_{t_0}) (C_{n(k+1)}^{(o)} + C_{n(k+1)}^{(s)})] / C_{n(k+1)}^{(s)}$ 为 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购策略施加正反影响的临界点.

证明 由

其求关于 x 的导数, 得

策略施加影响的负面空间, $\{P_n(I = i_{t_0}) \mid P_n(I = i_{t_0}) \in (P_n^*(I = i_{t_0}), 1]\}$ 为 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购策略施加影响的正面空间.

科学地预测库存系统在下一个周期所处于某个需求状态的概率值是优化库存决策管理的重要前提条件之一. 由引理 1 的结论可知, 第 n 种产品在下一个周期 (第 $k+1$ 周期) 处于需求状态 i_{t_0} 的概率值为 $P_n(I = i_{t_0})$. 于是, 决策者可以根据 $P_n(I = i_{t_0})$ 的大小来制定库存系统的优化决策, 从而提高库存的服务水平. 然而, 在实践的过程中, 若按库存优化模型的最优决策进行订购时, 有时候也会出现供需不合理的现象, 如供不应求或供过于求. 从经验的视角易解释这种现象, 即由于市场随机因素的存在, 使得理论预测值与实际需求情况产生误差, 从而导致出现供与需不相合的现象. 命

题5的结论则从数学理论的角度进一步解释了这种现象.事实上,若将 $P_n(I = i_{t_0})$ 与 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 进行大小比较,由命题5的结论可知:1)当 $P_n(I = i_{t_0})$ 属于正面空间时,有 $P_n(I = i_{t_0}) > P_n^*(I = i_{t_0})$,其对最优订购策量 $Q_{n(k+1)}^*$ 具有正面影响.因此,当 $P_n(I = i_{t_0})$ 的取值变大时,决策者应适当增加订购量,以免出现供不应求的局面.2)当 $P_n(I = i_{t_0})$ 落在负面空间时,有 $P_n(I = i_{t_0}) < P_n^*(I = i_{t_0})$,其对最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 具有负面影响.此时,当 $P_n(I = i_{t_0})$ 的取值变大时,为避免供过于求造成的损失,库存系统的订购量应该相应的减少.可见,系统的临界点 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 对库存优化控制具有重要的管理意义,决策者可以据此对整个库存系统的可靠性进行深入分析,从而获取最优决策信息,达到优化管理的目的.

3 数值算例分析

限于篇幅,本算例只考虑3种产品的情形.设某零售商销售A、B、C三种产品,根据消费者对产品的需求程度将其划分为4个状态,依次用数值

1 2 3 4 表示,即状态集 $I = \{1 2 3 4\}$,其中各需求状态的定义如下

$$\begin{aligned}
 1 &\triangleq \begin{cases} f(D_{n(k+1)}) & D_{n(k+1)} \in [0, 150); \\ 0 & \text{其它} \end{cases}; \\
 2 &\triangleq \begin{cases} f(D_{n(k+1)}) & D_{n(k+1)} \in [150, 300); \\ 0 & \text{其它} \end{cases}; \\
 3 &\triangleq \begin{cases} f(D_{n(k+1)}) & D_{n(k+1)} \in [300, 450); \\ 0 & \text{其它} \end{cases}; \\
 4 &\triangleq \begin{cases} f(D_{n(k+1)}) & D_{n(k+1)} \in [450, 600); \\ 0 & \text{其它} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

假设 $D_{n(k+1)} \sim U(150(i-1), 150i) \quad i \in I$, 即当 $d_{n(k+1)} = i$ 时,其概率密度为

$$\phi_{i(k+1)}(D_{n(k+1)}) = \begin{cases} \frac{1}{150}, & D_{n(k+1)} \in [150(i-1), 150i); \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则由式(4)中对 η_{k+1} 的定义可得 $\eta_{n(k+1)} = (75, 225, 375, 525)^T \quad n = 1, 2, 3$.

3.1 期望需求量和左右截尾概率

若A、B、C三种产品在以往12个周期的需求状态历史数据分别为: $H_1 = \{4, 3, 1, 3, 4, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4\}$, $H_2 = \{1, 2, 3, 4, 1, 4, 4, 3, 3, 1, 3, 1\}$ 和 $H_3 = \{2, 1, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 4, 1, 4, 3\}$, 且其需求状态间相互转移的关系如图1所示

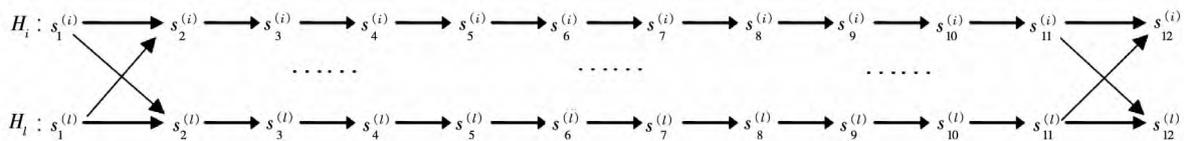


图1 不同产品间需求状态转移图示

Fig.1 The state transition diagram of demand between different products

其中 $s_k^{(i)}$ 和 $s_k^{(l)}$ 分别表示第 i, l 种产品于第 k 周期的需求状态 ($i, l = 1, 2, 3; i \neq l; 1 \leq k \leq 12$).

根据图1中不同产品间需求状态的转移规律,可得各产品需求状态的转移频数和概率矩阵

$$\begin{aligned}
 F^{(11)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & F^{(12)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & F^{(13)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & F^{(21)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & F^{(22)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & F^{(23)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 F^{(31)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & F^{(32)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & F^{(33)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & P^{(11)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/5 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/5 & 1/3 \end{pmatrix} & P^{(12)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/4 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix} & P^{(13)} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
 P^{(21)} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} & P^{(22)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix} & P^{(23)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} & P^{(31)} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/3 \end{pmatrix} & P^{(32)} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} & P^{(33)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

其中 $F^{(ji)}$ 表示从第 i 种产品的需求状态到第 j 种产品的需求状态的转移频数矩阵, $P^{(ji)}$ 表示从第 i 种产品的需求状态到第 j 种产品的需求状态的转移概率矩阵(其具体的定义和求解方法详见文献 [21] 的第 7 章).

基于 A、B、C 三种产品需求状态的历史周期数据, 易估计出它们的需求状态的平稳分布

$$\hat{X}^{(1)} = (0.1667 \ 0.0833 \ 0.4167 \ 0.3333)^T;$$

$$\hat{X}^{(2)} = (0.3333 \ 0.0833 \ 0.3333 \ 0.2500)^T;$$

$$\hat{X}^{(3)} = (0.1667 \ 0.2500 \ 0.3333 \ 0.2500)^T$$

于是, 由文献 [21] 的 (7.5) 式, 可得各种产品的关

系权数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.100 & 0.100 & 0.800 \\ 0.502 & 0.100 & 0.398 \end{pmatrix}$

由矩阵 A 可知各产品需求状态间的关系. 例如, A 产品于下个周期的需求状态与自身的需求

状态的关系权数为 0.800, 而 A 与 B、C 产品的关系权数都等于 0.100. 显然, A 产品在下一个周期的需求状态与自身的关系更为密切, 其需求状态受 B、C 两种产品的影响相对较小. 同理, 由矩阵 A 的第二、三行的数据, 可以得出 B、C 产品需求状态的关系权数.

若 $t_0 = k = 12$ 为由 A、B、C 三种产品构成的库存系统的初始时刻, 则 $t = k + 1$ 为下个周期的时刻点. 根据引理 1 的结论可知 $X_{k+1} = AX_k$. 再结合矩阵 A 的值, 可得多产品在下一个周期(即第 $k + 1$ 周期)的需求状态的概率分布, 即 $X_{k+1} =$

$$\begin{pmatrix} 0.800\hat{P}_{12}^{(11)} & 0.100\hat{P}_{12}^{(12)} & 0.100\hat{P}_{12}^{(13)} \\ 0.100\hat{P}_{12}^{(21)} & 0.100\hat{P}_{12}^{(22)} & 0.800\hat{P}_{12}^{(23)} \\ 0.502\hat{P}_{12}^{(31)} & 0.100\hat{P}_{12}^{(32)} & 0.398\hat{P}_{12}^{(33)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k^{(1)} \\ X_k^{(2)} \\ X_k^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.033 & 0 & 0.633 & 0.333 \\ 0.267 & 0.067 & 0.300 & 0.367 \\ 0.201 & 0.300 & 0.133 & 0.367 \end{pmatrix}. \text{ 于是, 可得以下需求状态和期望需求量的概率分布列, 即}$$

表 1 A、B、C 产品于第 $k + 1$ 周期需求状态 I 和期望需求量 $\eta_{n(k+1)}$ 的概率分布 $X_{k+1}^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3$)

Table 1 The probability distribution of state I and expected demand $\eta_{n(k+1)}$ ($n = 1, 2, 3$) for products A, B and C at time $k + 1$

I	1	2	3	4
$\eta_{n, 13}$	75	225	375	525
$X_{13}^{(1)}$	0.033	0	0.633	0.333
$X_{13}^{(2)}$	0.267	0.067	0.300	0.367
$X_{13}^{(3)}$	0.201	0.300	0.133	0.367

再由式 (4), 可得 A、B 和 C 产品于第 $k + 1$ 周期的期望需求量, 即

$$E(D_{k+1}) = \begin{pmatrix} E(D_{1(k+1)}) \\ E(D_{2(k+1)}) \\ E(D_{3(k+1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.033 & 0 & 0.633 & 0.333 \\ 0.267 & 0.067 & 0.300 & 0.367 \\ 0.201 & 0.300 & 0.133 & 0.367 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 225 \\ 375 \\ 525 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 415 \\ 340 \\ 325 \end{pmatrix}$$

因此, 根据本算例给出的需求状态的定义, 知 $E(D_{n(k+1)}) \in [300, 450]$ ($n = 1, 2, 3$), 故 A、B、C 三种产品在下一个周期所处的期望需求状态都为 $E(d_{n(k+1)}) = 3$, 进而可得各产品在下一个周期处于期望需求状态 3 的概率值分别为: $P_1(I = 3) = 0.633$, $P_2(I = 3) = 0.300$ 和 $P_3(I = 3) = 0.133$; 其左截尾概率分别为: $P_1(I < 3) = 0.033$, $P_2(I < 3) = 0.334$ 和 $P_3(I < 3) = 0.501$; 右截尾概率分别为: $P_1(I \geq 3) = 0.966$, $P_2(I \geq 3) =$

0.667 和 $P_3(I \geq 3) = 0.500$.

3.2 模型的最优数值解及其分析

由于本文是在假设单位缺货成本 $C_{nk}^{(s)}$ 、单位过剩成本 $C_{nk}^{(o)}$ 和单位资源消耗量 w_{nk} 等参数为常量的条件下, 基于多元马氏理论而提出的新的报童模型, 且由最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 的公式知其是关于右截尾概率 $P_n(I \geq i_0)$ 的单调递增函数, 左截尾概率 $P_n(I < i_0)$ 的单调递减函数. 因此, 接下来本算例主要考虑最优订购量

$Q_{n(k+1)}^*$ 与概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 的关系以及能力约束 C 对模型的最优解和概率临界值 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 的影响. 为了消除单位缺货成本、单位过剩成本和单位资源消耗量等因素的差异性对最优解的影响, 本算例模拟了一组特殊的数据, 即令各产

品的这三个取值分别相等(具体的取值详见表 2), 以便于确定最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 与概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 的关系并分析最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 、临界值 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 与能力约束 C 之间的关系.

表 2 能力(capacity)约束下 $P_n(I = 3)$ 的临界值及其相应的模型最优解($n = 1, 2, 3$)

Table 2 The threshold of $P_n(I = 3)$ and corresponding optimal solution to the model with capacity constraint ($n = 1, 2, 3$)

	A 产品		B 产品		C 产品		
	$C_{1(k+1)}^{(s)} = 4, C_{1(k+1)}^{(o)} = 1, w_{1(k+1)} = 1, E(d_{1(k+1)}) = 3, P_1(I = 3) = 0.633, P_1(I < 3) = 0.033, P_1(I \geq 3) = 0.966.$		$C_{2(k+1)}^{(s)} = 4, C_{2(k+1)}^{(o)} = 1, w_{2(k+1)} = 1, E(d_{2(k+1)}) = 3, P_2(I = 3) = 0.300, P_2(I < 3) = 0.334, P_2(I \geq 3) = 0.667.$		$C_{3(k+1)}^{(s)} = 4, C_{3(k+1)}^{(o)} = 1, w_{3(k+1)} = 1, E(d_{3(k+1)}) = 3, P_3(I = 3) = 0.133, P_3(I < 3) = 0.501, P_3(I \geq 3) = 0.500.$		
C: 能力	$P_1^*(I = 3)$	$Q_{1(k+1)}^*$	$P_2^*(I = 3)$	$Q_{2(k+1)}^*$	$P_3^*(I = 3)$	$Q_{3(k+1)}^*$	λ^*
1 555	0.591	561	0.215	536	0.006	457	1.470
1 575	0.605	564	0.228	542	0.020	469	1.417
1 595	0.618	567	0.242	547	0.033	481	1.363
1 795	0.752	592	0.376	601	0.167	602	0.827
1 825	0.772	596	0.396	609	0.187	620	0.746
1 855	0.792	600	0.416	617	0.207	638	0.666
2 100	0.957	631	0.580	683	0.371	786	0.009
2 200	0.959	632	0.583	684	0.374	788	0.000
2 300	0.959	632	0.583	684	0.374	788	0.000
2 400	0.959	632	0.583	684	0.374	788	0.000

由表 2 通过横向比较易知, 当能力 $C \leq 1 595$ 时, 系统相应的概率临界值和最优订购量满足 $P_n(I = 3) > P_n^*(I = 3)$ 及 $Q_{1(k+1)}^* > Q_{2(k+1)}^* > Q_{3(k+1)}^*$; 当能力 $C \geq 1 795$ 时, 有 $P_n(I = 3) < P_n^*(I = 3)$ 及 $Q_{1(k+1)}^* < Q_{2(k+1)}^* < Q_{3(k+1)}^*$, 其中 $n = 1, 2, 3$. 这些数据的实验结果验证了命题 5 的结论, 即当 $P_n(I = 3) > P_n^*(I = 3)$ 时, $P_n(I = 3)$ 的取值对模型的最优解 $Q_{n(k+1)}^*$ 有着正面的影响, 也就是 $Q_{n(k+1)}^*$ 是 $P_n(I = 3)$ 的单调递增函数; 否则反之. 由本数值算例的结果, 得知 A、B、C 三种产品处于期望需求状态 3 的概率分别为 $P_1(I = 3) = 0.663, P_2(I = 3) = 0.300$ 和 $P_3(I = 3) = 0.133$, 所以 $P_1(I = 3) > P_2(I = 3) > P_3(I = 3)$. 因此, 在能力 C 值的约束下, 如果 $P_n(I = 3) > P_n^*(I = 3)$ 则有 $Q_{1(k+1)}^* > Q_{2(k+1)}^* > Q_{3(k+1)}^*$; 若 $P_n(I = 3) < P_n^*(I = 3)$ 则有 $Q_{1(k+1)}^* <$

$Q_{2(k+1)}^* < Q_{3(k+1)}^*$. 随着 C 值的增大, $P_n^*(I = i_{t_0})$ 与 $P_n(I = i_{t_0})$ 的大小关系也跟着发生改变. 算例的结果进一步表明, 最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 关于概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 的单调性, 依赖于库存系统的概率临界值 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 的取值. 当 $P_n(I = i_{t_0})$ 属于负面空间时, 库存系统的最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 关于概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 具有稳健的单调递减性. 同理, 当 $P_n(I = i_{t_0})$ 落在正面空间时, 库存系统的最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 关于概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 则具有稳健的单调递增性. 因此, 概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 的双重影响, 在正、负面空间内都具有较强的鲁棒性.

为了更直观深入的分析最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 、临界值 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 与能力约束 C 之间的关系, 结合 A、B、C 三种产品在表 2 中的参数取值, 给出具体的图例如下:

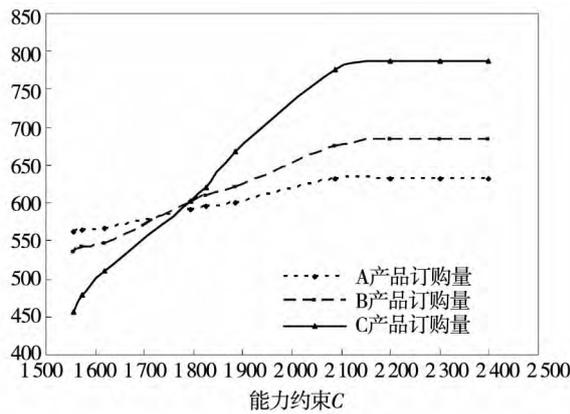


图 2 能力约束 C 对最优订购量的影响

Fig. 2 Capacity constraint C impacts on the optimal ordering quantity

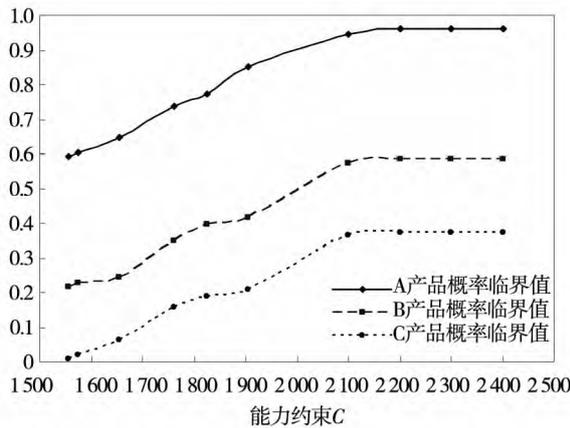


图 3 能力约束 C 对概率临界值的影响

Fig. 3 Capacity constraint C impacts on the threshold of probability value

由图 2 可知,随着能力约束 C 值的增大, A、B、C 三种产品的最优订购量都相应的增加,其中 C 产品的最优订购量受能力约束 C 值的影响最为敏感,而 A 产品的敏感度相对低些.能力约束 C 值对各产品最优订购量的敏感性的,可归结为概率临界值所致.正如上文对表 2 的数据结果分析所述,在能力约束不变的情形下,概率值 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优订购量 $Q_{n(k+1)}^*$ 的影响取决于概率临界值 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 的大小.综合表 2 和图 3 易知,在能力约束 C 不同的取值条件下, B 产品和 C 产品的正面空间都比 A 产品的大.如当能力约束 $C = 2100$ 时, A 产品的正面空间 $\{P_1(I = 3) | P_1(I = 3) \in (P_1^*(I = 3), 1]\} = (0.975, 1]$, 而 C 产品的正面空间 $\{P_3(I = 3) | P_3(I = 3) \in (P_3^*(I = 3), 1]\} = (0.371, 1]$. 因此, $P_1(I =$

$i_{t_0})$ 只有在区间 $[0.975, 1]$ 上取值时,才能对最优订购量 $Q_{1(k+1)}^*$ 产生正面的影响,而 $P_3(I = i_{t_0})$ 只要落在区间 $[0.371, 1]$ 上,就可以对 $Q_{3(k+1)}^*$ 施加正面的影响.显然, C 产品 $P_3(I = i_{t_0})$ 的取值对最优订购量的正面影响的可能性更大.因此,随着能力约束 C 值的增大, A 产品的正面空间进一步压缩, C 值对其最优订购量增大的敏感度逐渐降低,从而导致其增长曲线较其它产品而言相对平坦一些;同时,各产品的最优订购量都处于一个相对平稳的状态.结合表 2 的 λ^* 值,易从理论上解释这种现象.事实上,当能力约束 C 充分大时, λ^* 值趋向于零,再由模型的 Kuhn-Tucker 条件可知,此时模型的最优解不再受约束条件 C 的限制,所以最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 趋向于稳定的状态.这表明当能力水平达到一定程度时,可以不考虑其对库存系统的优化和控制的影响.

4 结束语

利用经典报童模型解决多产品的库存优化问题存在一定的理论局限性,比如:总假设各产品之间的需求相互独立,未考虑需求间的关联性;在需求分布函数给定的条件下,经典模型的最优订购策略只跟能力、单位缺货成本和剩余成本等非随机因素有关,从而忽视了随机因素对其最优解的影响.针对此问题,本文首先以多元马氏模型为理论导向,建立了多元马氏需求模型,对多产品的需求进行预测,并解决了需求间的关联性问题.库存系统的决策者可以通过该模型来获知各产品需求间的关系权数,进而深入了解需求间相互影响的情况.其次,在该模型的理论基础上,提出了带有能力约束的多元马氏需求报童模型,并研究了该模型的最优解及其性质.模型 (9) 的结论表明,多产品的最优订购策略不但跟上述的非随机因素有关,而且与左、右截尾概率和 $P_n(I = i_{t_0})$ 等随机因素有着密切的关系,即最优订购策略 $Q_{n(k+1)}^*$ 是关于右截尾概率 $P_n(I \geq i_{t_0})$ 的单调递增函数,关于左截尾概率 $P_n(I < i_{t_0})$ 的单调递减函数,而跟 $P_n(I = i_{t_0})$ 具有正反的双重关系.因此,在随

机需求环境下,较于经典的报童模型,基于多元马氏理论的多产品报童模型更具有优越性和客观实际意义.

算例的结果表明,只需确定各产品间的转移概率和依赖需求状态的概率密度,就可以通过多元马氏理论求出库存系统在下个周期的需求量并确定它们之间的关系.同时,在能力约束的条件下,利用基于多元马氏需求的报童模型,不但可以得出多产品的最优订购量,还可以得出 $P_n(I = i_{t_0})$ 的临界值 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 在库存优化管理中的一个重要启示,即决策者可以利用临界值 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 来对其所销售的产品进行风险评估.事实上,当决策者预测出某产品在下个周期处于需求状态 i_{t_0} 的概率为 $P_n(I = i_{t_0})$ 时,该概率值对库存系统最优策略所产生的影响是正面还是反面是未知

的,但通过与 $P_n^*(I = i_{t_0})$ 的比较,即可获知 $P_n(I = i_{t_0})$ 对最优策略影响的属性.比如当 $P_n(I = i_{t_0})$ 落在正面空间时,对最优策略具有正面的影响.同时,当 $P_n(I = i_{t_0})$ 的取值越大时,其相应的右截尾概率 $P_n(I \geq i_{t_0})$ 就越高,从而其所对应的期望需求状态 $\sum_{t=i_{t_0}}^l i_t X_{i_t(k+1)}^{(n)}$ 的值就越大.在这种情形下,由需求状态和需求量之间的关系可知该产品在下个周期的需求量也相应增多,所以高销售量的可靠性也会高一些.因此,基于上述条件,当 $P_n(I = i_{t_0})$ 取值越大时,销售商获取高利润的机率就越高,并且所面临的损失风险就越低.决策者可以根据该模型的最优解及其性质做出科学的订货量决策,以获取最大的经济效益,从而提高库存的优化管理水平.

参考文献:

- [1]Whitin T M. Inventory control and price theory [J]. Management Science, 1955, 2(1): 61-68.
- [2]Bisi A, Dada M. Dynamic learning, pricing, and ordering by a censored newsvendor [J]. Naval Research Logistics (NRL), 2007, 54(4): 448-461.
- [3]Lau H S, Hing-Ling Lau A. The newsstand problem: A capacitated multiple-product single-period inventory problem [J]. European Journal of Operational Research, 1996, 94(1): 29-42.
- [4]姚忠. 风险约束下退货合同对供应链的协调性分析 [J]. 管理科学学报, 2008, 11(3): 96-105.
Yao Zhong. Analysis of return policy for coordinating supply chain under downside risk constraints [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(3): 96-105. (in Chinese)
- [5]黄松, 杨超, 张曦. 考虑战略顾客行为带预算约束的多产品报童问题 [J]. 中国管理科学, 2011, 19(3): 70-78.
Huang Song, Yang Chao, Zhang Xi. Multi-product newsvendor problem with budget constraint and strategic customers [J]. Chinese Journal of Management Science, 2011, 19(3): 70-78. (in Chinese)
- [6]黄松, 杨超, 张曦. 考虑战略顾客行为时的供应链性能分析与协调 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(2): 47-58.
Huang Song, Yang Chao, Zhang Xi. Supply chain performance analysis and coordination with consideration of strategic customer behavior [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(2): 47-58. (in Chinese)
- [7]李毅学, 汪寿阳, 冯耕中. 物流金融中季节性存货质押融资利率决策 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(11): 19-32.
Li Yixue, Wang Shouyang, Feng Gengzhong. Decision of loan-to-cash ratios of seasonal inventory/pledge financing based on logistics finance [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(11): 19-32. (in Chinese)
- [8]谷水亮, 鞠彦兵. 资金和风险约束下的多产品报童模型最优解的研究 [J]. 软科学, 2012, 26(3): 129-133.
Gu Shuilang, Ju Yanbing. The study of the optimal solution of multi-product newsvendor in the constraints of funding and risk [J]. Soft Science, 2012, 26(3): 129-133. (in Chinese)
- [9]朱赛花, 戴琳, 胡朝明. 两个约束条件下允许外购的多产品报童问题 [J]. 经济数学, 2013, 30(2): 31-35.
Zhu Saihua, Dai Lin, Hu Zhaoming. Multi-product newsboy problem with two constraints and nonzero lead time outsourcing [J]. Journal of Quantitative Economics, 2013, 30(2): 31-35. (in Chinese)

- [10]周艳菊,应仁仁,陈晓红,等. 基于前景理论的两产品报童的订货模型[J]. 管理科学学报,2013,16(11):17-29.
Zhou Yanju, Ying Renren, Chen Xiaohong, et al. Two product newsboy problem based on prospect theory[J]. Journal of Management Sciences in China,2013,16(11):17-29. (in Chinese)
- [11]Chen Y J. Existence and uniqueness of Nash equilibrium in a supply chain newsvendor game[J]. Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Applications,2011,2(1):20-28.
- [12]Choi S, Ruszczyński A. A multi-product risk-averse newsvendor with exponential utility function[J]. European Journal of Operational Research,2011,214(1):78-84.
- [13]Shi J, Zhang G. Multi-product budget-constrained acquisition and pricing with uncertain demand and supplier quantity discounts[J]. International Journal of Production Economics,2010,128(1):322-331.
- [14]Zhang B, Du S. Multi-product newsboy problem with limited capacity and outsourcing[J]. European Journal of Operational Research,2010,202(1):107-113.
- [15]Jammernegg W, Kischka P. Risk preferences of a newsvendor with service and loss constraints[J]. International Journal of Production Economics,2013,143(2):410-415.
- [16]Jammernegg W, Kischka P. The price-setting newsvendor with service and loss constraints[J]. Omega,2013,41(2):326-335.
- [17]Murray C C, Gosavi A, Talukdar D. The multi-product price-setting newsvendor with resource capacity constraints[J]. International Journal of Production Economics,2012,138(1):148-158.
- [18]Zhang B, Hua Z. A portfolio approach to multi-product newsboy problem with budget constraint[J]. Computers & Industrial Engineering,2010,58(4):759-765.
- [19]Abdel-Malek L L, Otegbeye M. Separable programming/duality approach to solving the multi-product newsboy/gardener problem with linear constraints[J]. Applied Mathematical Modeling,2013,37(10):4497-4508.
- [20]Ching W K, Fung E S, Ng M K. A multivariate Markov chain model for categorical data sequences and its applications in demand predictions[J]. IMA Journal of Management Mathematics,2002,13(3):187-199.
- [21]Ching W K, Ng M K. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications[M]. New York: Springer,2006.

Capacitated newsboy model with multivariate Markovian demand

CHEN Jie^{1,2}, CHEN Zhi-xiang¹, XING Ling-bo², CHEN Chong-ping¹

1. School of Business, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Hainan Tropical Ocean University, Sanya 572022, China

Abstract: In this paper, a multi-product capacitated newsvendor model with stochastic demand is studied. Firstly, a multivariate Markovian demand model to forecast the demands of multiple products is constructed, and the relationships among the demands are measured by the model. Secondly, a capacitated newsboy model with multivariate Markovian demand is proposed, and then the solution of optimal ordering policy for multiple products is derived. At last, the properties of the optimal policy through the probability value and truncated probability of the expected demand state are discussed. With capacity constraints, the theoretical analysis shows that the optimal ordering quantity is a monotonic decreasing function with respect to the left truncated probability, and a monotonic increasing function with respect to the right truncated probability, but the probability value of the expected demand state has special dual effects on the optimal ordering quantity.

Key words: multivariate Markov chains; multi-product newsboy problem; capacity constraint; truncated probability; optimal ordering policy