

固定分区下随机需求 IRP 问题最优策略及算法^①

赵 达^{1,2}, 李 军³, 马丹祥⁴, 李妍峰³

(1. 海南大学经济与管理学院, 海口 570228; 2. 华南理工大学工商管理学院, 广州 510641;
3. 西南交通大学经济管理学院, 成都 610031; 4. 华北理工大学建筑工程学院, 唐山 063009)

摘要: 随机需求库存-路径问题(stochastic demand inventory routing problem, SDIRP) 是典型的 NP 难题, 考虑随机需求环境下供应链中库存与配送问题的协调优化, 是实施供应商管理库存策略的关键所在. 文章的研究基于固定分区策略(fixed partition policy, FPP) 在 FPP 下客户被分为若干个服务区域, 在同一区域中的所有客户均被同时配送. 根据分区策略对配送以及库存成本的影响提出了基于修正 C-W 节约算法的客户分区算法, 证明了各区域的最优库存策略为 (s, S) 形式, 分区内各客户的库存策略为 order-up-to 形式, 进而设计了求解 FPP 下 SDIRP 最优策略的算法. 最后, 通过数值算例验证了该算法的有效性以及 FPP 的适用性.

关键词: 随机需求库存-路径问题; 固定分区策略; (s, S) 策略; order-up-to 策略; 修正 C-W 节约算法

中图分类号: F253.4 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2016)12-0025-11

0 引 言

通常意义下库存-路径问题(inventory routing problem, IRP) 是指在供应商管理库存(vendor managed inventory, VMI) 模式下, 在无限(较长) 计划期内, 由 1 个供应商(配送中心) 向多个客户提供补货配送服务, 在满足一定约束条件(客户库存能力、配送车辆数量及能力等) 时, 确定各决策阶段的库存策略, 即配送对象及其配送数量, 以及相应的配送策略, 即配送路径, 使系统平均(折扣) 运行成本, 包括: 库存持有成本、缺货损失成本、配送成本等最小^[1], 其实质就是研究库存补充和配送之间的协调问题^[2]. 由此可见, 有效解决 IRP 是实施 VMI, 削弱牛鞭效应、降低供应链运行成本的关键所在. 同时, IRP 还是典型的

NP-hard 问题^[3], 在客户数量较多、需求不确定的情况下求解难度更大. 因此, 对于 IRP 的研究具有很强的现实意义和理论价值.

由于 IRP 的复杂性, 使其最优策略的求解十分困难, 即使最优策略存在往往也十分复杂, 不具备稳定的配送间隔、路线或配送数量, 导致其实施难度较大^[4-5], 而随机需求 IRP(stochastic demand inventory routing problem, SDIRP) 的最优策略更是只在一些特殊情形下存在. 因此, 研究更有实施效率的近优平稳策略^②具有重要的实际意义. 在对确定需求 IRP 的研究中, 很多学者提出了一类基于固定分区策略(fixed partition policy, FPP) 的平稳策略, 在 FPP 下把客户划分为若干个服务区域, 不同区域中的客户相互独立地接受配送中心的服务, 且同一区域中所有客户均由同一车辆提

① 收稿日期: 2012-08-09; 修订日期: 2016-08-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71361006; 71271178; 71131003); 中西部综合能力提升计划资助项目(海南大学, ZXBH-XK022); 中国博士后科学基金资助项目(2014M552205); 教育部人文社会科学研究一般资助项目(12YJA630057); 海南省自然科学基金资助项目(714257; 20157263).

作者简介: 赵 达(1980—), 男, 河北易县人, 博士, 副教授, 硕士生导师. Email: zhaoda2002@vip.sina.com

② 所谓平稳策略是指策略的形式、参数不随决策阶段、历史以及当前状态等因素的变化而改变的一类策略^[6].

供配送服务,即当区域中存在需要配送的客户时,配送车辆则同时服务该区域中的所有客户^[4-5,7-11].采用FPP后各客户分区之间的决策相互独立,因此,IRP可根据分区情况被分解为若干个相互独立的子问题进行处理,从而有效地降低了求解的难度,同时也增加了优化策略的可实施性.

在现有的相关文献中,Anily和Federguen^[4]研究了客户需求可分割条件下基于分区策略的确定需求IRP,即先将客户按照标准的需求单位分为若干个需求点,而后再将需求点进行分区的策略.文章给出了在上述策略下IRP成本的上、下界,证明了该上、下界具有渐进优化性,并以此为基础设计了相应的求解算法.文献[4]是IRP研究领域较早引入分区思想的文献,其中考虑的分区的策略将客户分为多个需求点,但上述处理方式使得1个客户由多辆车提供服务,既提高了实际操作的难度也增加了运作管理的成本. Bramel和Simchi-Levi^[7]以及Chan等^[8]改进了文献[4]中分区策略的不足,要求客户只能属于唯一分区,即FPP策略,在此基础上将客户的分区问题转化为求解较为成熟的约束集线器选址问题(capacitated concentrator location problem, CCLP),而后通过最近邻插入法确定不同区域内的路径安排,从而得到确定需求IRP的解,并且证明了上述结果在一定条件下具有渐进优化性.此外,Anily和Bramel^[5]给出了FPP下确定需求IRP的98.5%有效的成本下界,从而为评估不同FPP对IRP的优化效果提供了依据.

在近期研究中,Zhao等^[9-10]分别考虑了同时采用FPP以及二次幂库存策略的2层(配送中心和客户)以及3层(外部供应商、配送中心和客户)供应链系统中的确定需求IRP,并分别提出了对应的表搜索以及可变大规模邻域搜索算法. Li等^[11]考虑了允许外部供应商直接对客户进行配送服务的3层供应链确定需求IRP,基于FPP将上述问题分解为外部供应商对客户、配送中心对客户以及外部供应商对配送中心进行服务3个子问题,并设计了相应的遗传算法对其进行求解. Michel和Vanderbeck^[12]采用列生成技术在战术层面上求解了FPP下确定需求的拣货型IRP.通过上述分析,不难看出现有文献着重对于FPP有

效性以及FPP下不同结构IRP的优化算法这两类问题进行了研究.但上述研究均是在客户需求确定的假设下进行的,而将FPP应用到解决更贴近实际的SDIRP,并讨论其最优策略形式的文献却十分罕见.但是,FPP可以有效降低优化策略求解难度和实施难度^[13]的特点对于SDIRP更具意义.因此,FPP下SDIRP的相关研究具有很强的理论和现实必要性.

与确定需求IRP的两阶段求解过程不同,本文将FPP下SDIRP的求解过程分为3个阶段,除了客户分区阶段以及路线安排阶段之外^[4-5,7-12],由于客户所面对需求的随机性,还需加入确定客户库存策略阶段.与文献[7]、文献[8]将客户分区问题转化为CCLP加以解决的方法不同,本文首先根据客户需求随机的特性以及分区对配送及库存成本的影响,提出了基于修正C-W法的客户分区算法;证明了各分区的最优库存策略为 (s, S) 形式,分区内各客户的最优库存策略为order-up-to形式,并设计了相应的最优策略求解算法;进而通过求解旅行商问题(traveling salesman problem, TSP)以确定各分区的配送路径.最后,通过数值算例验证了上述算法的有效性,并讨论了FPP在求解SDIRP中的适用性以及不同分区方法对算法的影响.

1 问题描述

1.1 问题的基本描述

考虑一个采用VMI库存管理模式的物流系统,1个配送中心为 n 个已知地理位置的客户提供某种产品,令: $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示客户集合; $d_{ij} (i, j \in N \cup \{0\})$ 表示客户 i 到客户 j 的最短距离,其中0表示配送中心,并假设不考虑配送中心的供应能力限制及其相应的库存成本^[1-5,7-8,12].客户每天面对的需求量为一组稳定的独立同分布随机变量 $u_i (i \in N)$,其密度函数为 $f_i(\cdot)$;同时,每个客户的最大库存容量为 C_i ,且假设车辆的配送能力 C_v 至少可以满足1个客户的需求.配送中心首先基于FPP对客户进行分区,并在每阶段(每天)市场需求到达之前,根据客户的历史需求数据及库存信息对各分区中的客户进行服务.

1.2 问题的成本结构

上述物流系统中每阶段的运行成本包括: 配送成本、库存持有成本以及由于客户需求随机而引起的缺货损失成本. 其中, 由于配送中的固定成本, 如: 车辆购置成本、人员工资等均属于沉没成本, 因此本文中的配送成本仅考虑与行驶距离有关的可变成本, 并假设该可变成本是车辆行驶距离的线性函数, 直接用车辆行驶距离表示; 同时, 假设客户每天的库存持有成本与客户当天的剩余库存量成正比, 如客户 i 的单位持有成本为 h_i , 其配送前的库存水平为 x_i , 且当天到达的配送量为 q_i , 则该客户库存持有成本为 $h_i(\max\{y_i - u_i, 0\})$, 其中 $y_i = x_i + q_i$; 最后, 假设缺货损失成本与缺货量成正比, 如客户 i 的单位缺货损失成本为 p_i , 则其缺货损失成本为 $p_i(\max\{u_i - y_i, 0\})$. 此外, 由于该系统处于 VMI 库存管理模式下, 并不存在客户的订货成本. 因此, 令函数 $G_i(y_i)$ 表示当客户 i 的库存水平为 x_i , 配送量为 q_i 时, 其单阶段的期望库存成本(持有成本与缺货损失成本之和) 则

$$G_i(y_i) = h_i \int_0^{y_i} (y_i - u_i) f_i(u_i) du_i + p_i \int_{y_i}^{\infty} (u_i - y_i) f_i(u_i) du_i \quad (1)$$

其中为了贴近实际, 假设客户的基本参数均可保证无限量订货或者无限量缺货策略是策略集中的绝对劣势策略, 即参数 p_i, h_i 的关系为 $0 < h_i < p_i$. 系统目标是求得一个(组) 最优策略, 使得系统长期运行的平均(折扣) 成本最小.

2 确定客户分区

根据文献 [4]、文献 [7] 以及文献 [8], 即使在客户需求确定条件下, 求解客户最优分区也是一个 NP-hard 问题, 文献 [7]、文献 [8] 中将该问题转化为另一类较为成熟的组合优化问题 CCLP, 通过对其进行求解从而确定客户分区方案, 但在上述方法中由于客户需求已知, 其仅以客户的地理位置作为分区的主要依据, 并没有考虑不同分区方案对于客户库存的影响, 而在随机需求环境

下, 上述两个因素的作用均不能忽略, 因此本文同时考虑分区对库存以及配送成本的影响, 提出了修正的 C-W 节约算法. 在保证对路径进行优化的前提下, 将分区对于库存成本的影响也加入其中.

2.1 修正的 C-W 节约算法

经典的 C-W 节约法不但可以对配送路径进行优化, 同时也将配送对象进行了分区. 该算法的核心在于提出了节约值 S_{ij} 概念. 根据文献 [14], 在经典的节约值定义中只考虑了不同的配送(分区) 方式对于配送成本的影响, 然而在基于 FPP 的 SDIRP 中配送(分区) 方式不仅对客户的配送成本同时也会对其库存成本产生影响, 因此有必要对节约值进行重新定义.

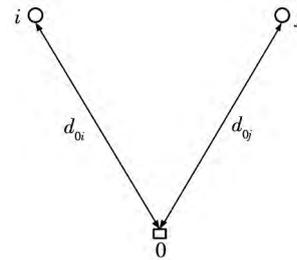


图 1 a) 直接配送的情况

Fig. 1 a) Case of direct delivery

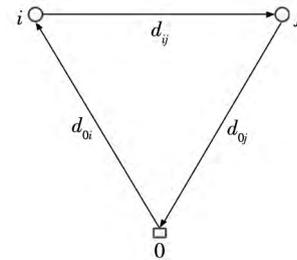


图 1 b) 共同配送的情况

Fig. 1 b) Case of common delivery

令 w_{0i}^i, w_{0j}^j 分别表示客户 i, j 属于不同的分区时(图 1 a), 两者的最优长期平均总成本包括配送和库存成本; 同时, 令 w_{ij} 分别表示客户 i, j 属于同一分区时(图 1 b), 系统的最优长期平均总成本. 根据经典节约值的定义思路, 则修正节约值 \hat{S}_{ij} 的表达式为

$$\hat{S}_{ij} = w_{0i}^i + w_{0j}^j - w_{ij} \quad (2)$$

将通过式 (2) 得到的 \hat{S}_{ij} 替换经典 C-W 节约算法步骤③中的节约值 S_{ij} , 即可得到用于 SDIRP 客户

③ 本文使用的为考虑车辆配送能力约束的经典 C-W 节约算法, 其具体步骤详见文献 [14].

分区的修正 C-W 节约算法,该算法改进了采用 CCLP 法对 SDIRP 客户进行分区中的不足.而在上述算法中,如何得到式(2)中不同情况下客户(系统)的最优长期平均总成本 w_{0i}^i 、 w_{0j}^j 以及 w_{ij} 是关键所在.

2.2 修正节约值 \hat{S}_{ij} 的计算

在图 1 a) 中,配送中心采用直接配送的方式对客户 i, j 进行服务,并同时考虑客户的库存与配送成本,则该问题的本质为一类基于直接配送的 SDIRP(stochastic demand inventory routing problem with direct deliveries, SDIRPDD). 因此,可以利用 SDIRPDD 的相关性质确定客户的最优长期平均总成本函数 w_{0i}^i, w_{0j}^j .

由于 SDIRPDD 特殊的配送方式,使得此类问题的配送策略已经确定且各客户的配送成本退化为常量,此时该问题最优策略的形式完全由客户的库存策略形式决定.同时,在没有车辆数约束的条件下该问题中每个客户之间的决策是相互独立的,因此可以将该问题以客户为单位分为 n 个独立的子问题,并给出如下引理:

引理 在不考虑配送车辆数和客户库存容量约束的条件下,SDIRPDD 子问题与有订货成本的无限阶段随机需求库存问题^④等价,最优策略形式均为 (s_i, S_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 结构,且 SDIRPDD 最优策略由上述子问题最优策略构成,其形式为 $\{(s_1, S_1), (s_2, S_2), \dots, (s_i, S_i), \dots, (s_n, S_n)\}$ ^⑤.

其中,所谓 (s, S) 库存策略即当且仅当客户的库存量小于等于 s 时进行补货,补货量为当前库存量与 S 之间的差.因此,当客户存在最大库存容量约束时,某些本地库存容量相对较小的客户其最优平稳策略 (s_i, S_i) 中的最大库存水平 S_i 可能会大于客户的最高库存容量 C_i . 此时,可以采用修正 (s_i, \hat{S}_i) 策略代替最优平稳策略,其中, $\hat{S}_i = \min\{C_i, S_i\}$, 即当客户的库存水平小于等于 s_i 时,尽可能的将库存补充到 S_i , 在上述情况下即补充到客户 i 本地最高库存容量 C_i [18-19].

根据引理 0 给出的 SDIRPDD 子问题与有订

货成本无限阶段随机需求库存问题的等价关系以及文献 [16] 中给出的客户平均总成本函数,可以给出 w_{0i}^i 的表达式如下

$$w_{0i}^i = \frac{2d_{0i} + \sum_{\eta=0}^{\hat{S}_i - s_i - 1} m_i(\eta) G_i(\hat{S}_i - \eta)}{M_i(\hat{S}_i - s_i)} \quad (3)$$

其中 η 表示客户在 1 个库存周期内可能的需求量;更新方程 $M_i(\cdot)$ 、 $m_i(\cdot)$ 的表达式为

$$M_i(k) = M_i(k-1) + m_i(k-1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$M_i(0) = 0, \quad m_i(0) = (1 - p_0^i)^{-1} \quad (5)$$

$$m_i(k) = \sum_{l=0}^k p_l^i m(k-l), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

k 为迭代过程的中间变量, p_l^i 表示客户 i 1 天的需求量为 l ($l = 0, 1, \dots$) 的概率. 同理,将式(3)中的下标 i 替换为 j 即可得到 w_{0j}^j 的表达式为

$$w_{0j}^j = \frac{2d_{0j} + \sum_{\eta=0}^{\hat{S}_j - s_j - 1} m_j(\eta) G_j(\hat{S}_j - \eta)}{M_j(\hat{S}_j - s_j)} \quad (7)$$

图 1 b) 中,客户 i, j 由同一车辆进行配送,因此可以将两个客户合并为 1 个虚拟客户 z . 同时,令虚拟客户 z 的需求量为随机变量 $u_z = u_i + u_j$, 其概率密度函数为 $f_z(\cdot)$; 如果当前阶段对该虚拟客户的配送量为 q_z , 则其库存持有成本为 $h_z(\max\{x_z + q_z - u_z, 0\})$, 缺货损失成本为 $p_z(\max\{u_z - x_z - q_z, 0\})$, 其中,其配送前的库存水平 $x_z = x_i + x_j$; h_z, p_z 分别表示其单位库存持有成本以及单位缺货损失成本. 此外,配送中心到该虚拟客户的配送距离 $d_{0z} = \frac{d_{0i} + d_{0j} + d_{ij}}{2}$. 此时,虚拟客户 z 可看作由配送中心采用直接配送的方式进行服务. 因此,根据引理可以近似地给出此时系统最优长期平均总成本 w_{ij} 的表达式为

$$w_{ij} = \frac{2d_{0z} + \sum_{\eta=0}^{\hat{S}_z - s_z - 1} m_z(\eta) G_z(\hat{S}_z - \eta)}{M_z(\hat{S}_z - s_z)} \quad (8)$$

④ 无限阶段随机需求库存问题是一类经典问题,从 Scarf 1960 年开始包括 Federgruen^[15]、Zheng^[16] 等众多学者对该问题最优策略的形式及其算法进行了研究,其中文献 [16] 给出的算法更被认为是求解此类问题的标准算法.

⑤ 引理的证明详见文献 [17].

其中式(3)、式(7)以及式(8)中各客户相应的最优 s, S 参数值均可通过文献[16]中的算法得到.

至此 根据式(2)以及式(3)、式(7)、式(8), 可以计算出修正的节约值 \hat{S}_{ij} . 同时, 参考经典 C-W 节约算法的基本步骤, 即可得到同时考虑配送和库存成本的 SDIRP 客户分区方案 $P = \{S_1, S_2, \dots, S_r, \dots, S_t\}$, 其中 $\forall S_r \in P$ 表示 1 个客户分区, t 表示该方案中客户分区总数.

3 确定最优库存策略

客户分区确定后, 在确定需求 IRP 中各客户每阶段需要的配送量也随即确定^[5-7, 12], 但由于 SDIRP 中客户需求的随机性使得确定各客户在不同阶段中的配送量也十分困难. 因此, 确定每个客户的库存策略就成为解决 SDIRP 的关键. 此外, 由于使用 FPP, 使得每个分区的库存策略成为确定独立客户库存策略的基础, 因此, 本文首先对 FPP 下 SDIRP 中各分区的最优库存策略进行讨论.

3.1 分区的最优库存策略

当客户分区方案 P 确定后, 根据 FPP 的定义各分区中的客户均由同一车辆进行服务且各分区之间相互独立. 因此, 可以将每个分区作为 1 个虚拟客户, 且上述虚拟客户均可看作由配送中心采用直接配送的方式进行服务. 此时, 对于 $\forall S_r \in P$, 将客户分区 S_r 看作是 1 个虚拟客户 r , 则该虚拟客户所面对的需求量为随机变量 $u_{S_r} = \sum_{i \in S_r} u_i$, 其密度函数为 $f_{S_r}(\cdot)$; 如果当前阶段对该虚拟客户 r 配送前的库存水平 $x_{S_r} = \sum_{i \in S_r} x_i$, 配送量为 q_{S_r} , 则其库存持有成本为 $h_{S_r}(\max\{x_{S_r} + q_{S_r} - u_{S_r}, 0\})$, 缺货损失成本为 $p_{S_r}(\max\{u_{S_r} - x_{S_r} - q_{S_r}, 0\})$, 其中 h_{S_r}, p_{S_r} 分别表示单位库存持有成本以及单位缺货损失成本; 同时, 配送中心到虚拟客户 r 的直接配送距离为访问该分区内所有客户的最短距离, 即 $d_{0S_r} + d_{S_r0} = TSP(S_r)$, 其中 $TSP(S_r)$ 表示集合 $S_r \cap \{0\}$ 上的 TSP 问题最优值. 通过上述参数设定即可将客户分组后的 SDIRP 转化为 SDIRPDD.

根据引理以及 FPP 下 SDIRP 各客户分区的

库存最优平稳策略与 SDIRPDD 最优策略之间的对应关系, 不难给出如下命题:

命题 1 FPP 下, 当 SDIRP 客户分区方案 P 确定后, 分区的最优库存策略形式为 $\{(s_1^*, \hat{S}_1^*), (s_2^*, \hat{S}_2^*), \dots, (s_{S_r}^*, \hat{S}_{S_r}^*), \dots, (s_t^*, \hat{S}_t^*)\}$, 其中 $\hat{S}_{S_r}^* = \min\{S_{S_r}^*, \sum_{i \in S_r} C_i, C_V\}$, ($\forall S_r \in P$).

各分区最优策略中订货点 $s_{S_r}^*$ 和最高库存水平 $S_{S_r}^*$ 仍可按照文献[16]中给出的相关算法得到.

3.2 客户的最优库存策略

根据命题 1, FPP 下各分区的最优库存策略均属于 (s, S) 结构, 则当虚拟客户 r 补货前的库存水平小于等于订货点 $s_{S_r}^*$ 时, 其最优配送量 $q_{S_r}^* = \hat{S}_{S_r}^* - x_{S_r}$, 同时以分区 S_r 中各客户的平均运行成本最小为目标可将虚拟客户 r 的配送量 $q_{S_r}^*$ 分配给该分区中的各个客户, 从而得到客户的库存策略. 同时, 根据更新过程理论^[20], 虚拟客户 r 的期望配送周期 $T_{S_r} = M_{S_r}(\hat{S}_{S_r}^* - s_{S_r}^*)$, 即每隔周期 T_{S_r} 其库存水平将被补充到 $\hat{S}_{S_r}^*$, 因此 T_{S_r} 同时也是该虚拟客户的期望库存周期, 其计算公式见式(4)~式(6).

根据式(4)~式(6)不难发现虚拟客户 r 的期望配送间隔 T_{S_r} 只与该客户最优库存策略相关, 即当虚拟客户 r 的最优库存策略确定后, 该虚拟客户的期望库存周期 T_{S_r} 也随即确定. 此时, 通过将 $q_{S_r}^*$ 以周期 T_{S_r} 内分区 S_r 中各客户总的平均运行成本最小为目标进行分配即可得到该分区中各客户的配送量 q_i ($i \in S_r$).

令 $T_{S_r}^* = \lceil T_{S_r} + 0.5 \rceil$, 其中 $\lceil x \rceil$ 表示不超过 x 的最大整数; 同时, 令随机变量 $D_i^{(T_{S_r}^*)}$ 表示客户 i ($i \in S_r$) 在周期 $T_{S_r}^*$ 中的累积需求, 则其密度函数 $f_i^{(T_{S_r}^*)}(\cdot)$ 为 $f_i(\cdot)$ 的 $T_{S_r}^*$ 重卷积; 最后, 令 $\pi_{S_r}(q)$ 表示周期 $T_{S_r}^*$ 内分区 S_r 中各客户总的平均运行成本, 其中 q 为 q_i 构成的向量, 则

$$\pi_{S_r}(q) = \frac{1}{T_{S_r}^*} \sum_{i \in S_r} \left[\int_0^{x_i+q_i} h_i(x_i + q_i - D_i^{(T_{S_r}^*)}) \times f_i^{(T_{S_r}^*)}(D_i^{(T_{S_r}^*)}) dD_i^{(T_{S_r}^*)} + \int_{x_i+q_i}^{\infty} p_i(D_i^{(T_{S_r}^*)} - x_i - q_i) \times f_i^{(T_{S_r}^*)}(D_i^{(T_{S_r}^*)}) dD_i^{(T_{S_r}^*)} \right] \quad (9)$$

此时,通过求解如下的非线性规划问题即可确定在分区 S_r 中各客户的最优配送量

$$q_i^* = \min \pi_{S_r}(q) \tag{10}$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in S_r} q_i = q_{S_r}^* \tag{11}$$

采用拉格朗日松弛法求解上述规划,令

$$\hat{\pi}_{S_r}(q) = \pi_{S_r}(q) + \lambda_{S_r} \left(\sum_{i \in S_r} q_i - q_{S_r}^* \right)$$

其中 $\lambda_{S_r} \in \mathbf{R}$ 为拉格朗日乘子. 令 $\nabla \hat{\pi}_{S_r}(q) = 0$, 得到

$$h_i F_i^{(T_{S_r}^*)}(x_i + q_i) - p_i (1 - F_i^{(T_{S_r}^*)}(x_i + q_i)) + T_{S_r}^* \lambda_{S_r} = 0, \forall i \in S_r \tag{12}$$

整理得到

$$q_i = F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \lambda_{S_r}}{h_i + p_i} \right) - x_i, \forall i \in S_r \tag{13}$$

其中 $F_i^{(T_{S_r}^*)}(\cdot)$, $F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}}(\cdot)$ 分别表示随机变量 $D_i^{(T_{S_r}^*)}$ 的累积分布函数及其反函数. 此时,将式(13)代入约束(11)得到如下关于 λ_{S_r} 的非线性方程

$$\sum_{i \in S_r} F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \lambda_{S_r}}{h_i + p_i} \right) = q_{S_r}^* + x_{S_r} \tag{14}$$

根据命题 1 中给出的 FPP 下各分区最优库存策略的形式,不难发现方程(14)等号右侧满足 $q_{S_r}^* + x_{S_r} = \hat{S}_{S_r}^*$. 因此,对方程(14)进行化简得到

$$\sum_{i \in S_r} F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \lambda_{S_r}}{h_i + p_i} \right) = \hat{S}_{S_r}^* \tag{15}$$

求解方程(15)即可得到最优的拉格朗日乘子 $\lambda_{S_r}^*$, 将其代入式(13)得到 q_i^* 的表达式为

$$q_i^* = F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \lambda_{S_r}^*}{h_i + p_i} \right) - x_i, \forall i \in S_r \tag{16}$$

通过上述分析,对于 FPP 下 SDIRP 进行客户分区后,任意分区 S_r 中客户 $i (i \in S_r)$ 的库存策略均为 order-up-to 策略,即每次配送的补货量应使客户的库存水平达到其最优库存水平 (order-up-to level) L_i^* .

命题 2 FPP 下,当 SDIRP 客户分区方案 P 确定后,任意分区 $S_r (S_r \in P)$ 中客户 i 的库存策略为 order-up-to 策略,其中,对于 $\forall i \in S_r$, 其最优

库存水平 L_i^* 为

$$L_i^* = F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \lambda_{S_r}^*}{h_i + p_i} \right) \tag{17}$$

当某些客户的本地库存容量 C_i 相对较小,当存在 $L_i^* > C_i$ 时,需要对命题中给出的 L^* 进行修正,由于

$$\frac{\partial \pi_{S_r}^2(q)}{\partial^2 q_i} = (h_i + p_i) f_i^{(T_{S_r}^*)}(x_i + q_i) \geq 0$$

因此修正的 $L_i^* = C_i$, 即该客户的最优库存水平为其最大库存能力. 此时,客户 i 的配送量 q_i 减小,使得 $\sum_{i \in S_r} q_i < q_{S_r}^*$, 因此也需要对式(13)进行修正以保证约束(11)成立,从而得到其他客户的修正最优库存水平.

令集合 $\varphi_r = \{\kappa | L_{\kappa}^* > C_{\kappa}, \kappa \in S_r\}$, 则式(13)应修正为

$$\begin{cases} q_i = F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \lambda_{S_r}}{h_i + p_i} \right) - x_i, \\ \forall i \in S_r - \varphi_r \\ q_j = C_j - x_j, \forall j \in \varphi_r \end{cases} \tag{18}$$

同理,将式(18)代入约束(11)得到如下关于 λ_{S_r} 的非线性方程

$$\sum_{i \in S_r - \varphi_r} F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \lambda_{S_r}}{h_i + p_i} \right) = \hat{S}_{S_r}^* - \sum_{j \in \varphi_r} C_j \tag{19}$$

求解上述方程(19)即可得到修正的最优拉格朗日乘子 $\hat{\lambda}_{S_r}^*$, 并得到客户 $i (i \in S_r - \varphi_r)$ 修正的最优库存水平

$$L_i^* = F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \hat{\lambda}_{S_r}^*}{h_i + p_i} \right)$$

如仍有客户的 $L_i^* > C_i$, 则重复上述式(18)、式(19)的求解过程,直至集合 φ_r 中的元素稳定.

综上所述,可以给出修正的最优库存水平 \hat{L}_i^* 的表达式如下

$$\hat{L}_i^* = \begin{cases} F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}} \left(\frac{p_i - T_{S_r}^* \hat{\lambda}_{S_r}^*}{h_i + p_i} \right) & i \in S_r - \varphi_r \\ C_i & i \in \varphi_r \end{cases} \tag{20}$$

根据式(17)~式(20)即可确定任一分区内任意客户的最优库存策略.

4 基于 FPP 的 SDIRP 最优策略及其算法

根据命题 1、命题 2, 可以给出基于 FPP 对客户进行分区后, SDIRP 问题的最优策略结构如下.

命题 3 基于 FPP 对客户进行分区后, 属于任意分区 S_r 的客户 $j(j \in S_r)$, 其最优库存策略为 $(s_{S_r}^*, \hat{L}_j^*)$, 其最优配送策略为由集合 $S_r \cap \{0\}$ 中所有客户构成的最优 TSP 路径.

根据命题 3 可知, 当分区 S_r 的总库存水平小于等于 $s_{S_r}^*$ 时, 则配送中心指派一辆配送车辆对该区域内所有客户进行配送, 配送的线路为集合 $S_r \cap \{0\}$ 上的最优 TSP 路径, 各客户每次的配送量为 $\hat{L}_j^* - x_j$. 不难看出, 上述策略具有稳定的配送线路, 并且该策略的形式、参数也不随决策阶段、当前状态等因素的变化而变化, 属于平稳策略类. 因此, 该策略在实际实施过程中具备更好的可操作性.

根据上述对 FPP 下 SDIRP 问题最优策略形式的分析, 以及本文 2、3 节对于客户分区算法以及客户最优库存策略的讨论, 可以得到求解 FPP 下 SDIRP 最优策略的启发式算法, 基本步骤如下:

步骤 0 令指标变量 $\alpha = 0$;

步骤 1 对于 $\forall j \in N$, 为了保证得到的分区中客户的配送总量在任意决策阶段均满足配送车辆的容量限制, 令客户的配送量 q_j 为其配送量的上限, 即 $q_j = C_j$, 并采用修正的 C-W 节约算法对客户集合进行分区, 得到客户分区方案 $P^{(\alpha)}$;

步骤 2 在分区方案 $P^{(\alpha)}$ 中, 对于任意的客户分区 $S_r (S_r \in P^{(\alpha)})$, 初始化虚拟客户 r 的 h_{S_r} 、 p_{S_r} 、 $TSP(S_r)$ 等相关参数, 采用文献 [16] 中的算法确定分区的最优库存策略 $(s_{S_r}^*, \hat{S}_{S_r}^*)$, 并计算 $q_{S_r}^*$;

步骤 3 根据式 (4) ~ 式 (6) 计算 $T_{S_r}^*$, 并得到相应的库存周期 $T_{S_r}^*$;

步骤 4 对于分区 S_r 中的任意客户 $i (i \in S_r)$, 根据 $T_{S_r}^*$ 的取值和 $f_i(\cdot)$ 的形式计算函数 $f_i^{(T_{S_r}^*)}(\cdot)$, 并推导函数 $F_i^{(T_{S_r}^*)^{-1}}(\cdot)$ 的形式;

步骤 5 求解方程 (15)、方程 (19) ^⑥, 得到相应的最优的拉格朗日乘子 $\lambda_{S_r}^*$ 、 $\hat{\lambda}_{S_r}^*$, 并代入式 (17) ~ 式 (20) 中得到客户 i 的最优库存水平 \hat{L}_i^* ;

步骤 6 对于 $\forall j \in N$, 与步骤 1 相似, 令 $q_j = \hat{L}_j^*$, 并采用修正的 C-W 节约算法对客户集合进行分区, 得到分区方案 $P^{(\alpha+1)}$;

步骤 7 如果 $P^{(\alpha+1)} \neq P^{(\alpha)}$, 则令 $\alpha := \alpha + 1$ 并转入步骤 2; 如果 $P^{(\alpha+1)} = P^{(\alpha)}$, 则转入步骤 8;

步骤 8 在分区方案 $P^{(\alpha)}$ 下, 根据文献 [22]、文献 [23] 中的算法计算任意分区 S_r 的最优 TSP 路径, 算法终止.

在上述算法中, 通过对客户配送量 q_j 从上界 C_j 到优化值 \hat{L}_j^* 的迭代, 使得以此为参数的客户分区从初始方案 $P^{(0)}$ 渐进优化到最终方案 $P^{(\alpha)}$. 此时, 步骤 2 以及步骤 5 中给出的参数 $(s_{S_r}^*, \hat{L}_j^*)$, $(S_r \in P^{(\alpha)})$ 即为基于 FPP 下 SDIRP 问题各客户的最优库存策略, 步骤 8 中得到的通过各分区 S_r 中所有客户的 TSP 最优路径即为其最优配送策略. 此外, 在步骤 2 中对虚拟客户 r 的单位库存成本 h_{S_r} 以及单位缺货损失成本 p_{S_r} 的估计效果对算法的效率有着重要的影响, 相关内容将在算例分析中进一步的讨论.

5 算例分析

本文中由于客户需求量相对于车辆配送能力而言较小, 根据文献 [24] 的相关结论, 此时客户需求假设服从 Poisson 分布较为合理, 其中 Poisson 分布的均值 μ 可以通过客户需求的到达强度和每个需求的平均需求量得到. 因此, 本文随机生成了 10 个需求服从 Poisson 分布的客户需求信息以及每个客户的地理位置信息 (见表 1、表 2), 同

⑥ 方程 (15) 的具体形式与函数 $F_i^{(T_{S_r}^*)}(\cdot)$ 有关, 具体的求解方法参见文献 [21].

时,假设车辆的配送能力 C_V 为 40.

表 1 客户基础信息

Table 1 Basic information of customers

客户	需求均值 μ	单位持有 成本 h	单位缺货 损失 p	最大库存 容量 C
1	3	3	31	20
2	6	4	30	20
3	5	3	29	20
4	6	5	29	20
5	5	4	31	20
6	4	6	32	20
7	9	2	22	20
8	7	3	24	20
9	5	5	31	20
10	4	4	29	20

表 2 客户地理位置信息

Table 1 Location information of customers

客户	D. C. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D. C. 0	-	20	25	24	28	27	22	23	20	21	26
1		-	16	23	18	28	24	19	34	18	11
2			-	9	16	22	27	30	17	13	24
3				-	30	27	29	31	12	18	24
4					-	18	24	21	33	12	26
5						-	26	20	14	30	27
6							-	34	26	18	27
7								-	21	32	25
8									-	26	35
9										-	25
10											-

5.1 虚拟客户参数的估计

根据分区算法中修正节约值 \hat{S}_{ij} 的定义以及命题 2 的证明过程不难发现,只有确定任意虚拟客户 r 的单位库存持有成本 h_{s_r} 以及单位缺货损失成本 p_{s_r} 后,文中提出的相关算法才能有效地运行.然而,需求的随机性使得精确计算上述参数难度很大.因此,本文首先对上述参数的性质进行分析,并以此为基础给出对其进行估计的方法.

命题 4 在分区 S_r 中客户 $i(i \in S_r)$ 的需求均值 μ_i 占虚拟客户 r 的需求均值 μ_{s_r} 的比例越大,其单位库存持有成本 h_i (单位缺货损失成本 p_i) 在虚拟客户 r 的相应单位成本中所占的比例则越小(大).

命题 4 证明如下.在客户的最优库存策略 $(s_{s_r}^*, \hat{L}_i^*)$ 下,考虑虚拟客户 r 在期望库存周期 $T_{s_r}^*$

内的期望持有库存成本,如采用虚拟客户 r 的单位库存持有成本 h_{s_r} 进行计算,则其表达式为

$$h_{s_r} E \left[\left(\hat{S}_{s_r}^* - \frac{T_{s_r}^* + 1}{2} u_{s_r} \right)^+ \right] = h_{s_r} \left(\hat{S}_{s_r}^* - \frac{T_{s_r}^* + 1}{2} \mu_{s_r} \right) P \left(u_{s_r} \leq \frac{2\hat{S}_{s_r}^*}{T_{s_r}^* + 1} \right) \quad (21)$$

同时,如采用分区 S_r 中各客户的单位库存 $h_i(i \in S_r)$ 进行计算,则其表达式为

$$\sum_{i \in S_r} h_i E \left[\left(\hat{L}_i^* - \frac{T_{s_r}^* + 1}{2} u_i \right)^+ \right] = \sum_{i \in S_r} h_i \left(\hat{L}_i^* - \frac{T_{s_r}^* + 1}{2} \mu_i \right) P \left(u_i \leq \frac{2\hat{L}_i^*}{T_{s_r}^* + 1} \right) \quad (22)$$

通过式(21)、式(22)不难得到,虚拟客户 r 的单位库存持有成本 h_{s_r} 的表达式为

$$h_{s_r} = \sum_{i \in S_r} h_i \omega_i^h \quad (23)$$

其中权重 ω_i^h 的表达式如下

$$\omega_i^h = \frac{\left(\hat{L}_i^* - \frac{T_{s_r}^* + 1}{2} \mu_i \right) P \left(u_i \leq \frac{2\hat{L}_i^*}{T_{s_r}^* + 1} \right)}{\left(\hat{S}_{s_r}^* - \frac{T_{s_r}^* + 1}{2} \mu_{s_r} \right) P \left(u_{s_r} \leq \frac{2\hat{S}_{s_r}^*}{T_{s_r}^* + 1} \right)} \quad (24)$$

此时,令虚拟客户 r 的需求 u_{s_r} 固定,客户 i 的需求 u_i 变大,即均值 μ_i 变大;不难发现,式(24)中分母不变,分子减小,即客户 i 的需求均值 μ_i 占虚拟客户 r 的需求均值 μ_{s_r} 的比例越大,其单位库存持有成本 h_i 在虚拟客户 r 的相应单位成本 h_{s_r} 中所占的比例越小.

同理,可以得到虚拟客户 r 的单位缺货损失成本 p_{s_r} 的表达式为

$$p_{s_r} = \sum_{i \in S_r} p_i \omega_i^p \quad (25)$$

其中权重 ω_i^p 的表达式为

$$\omega_i^p = \frac{\left(\frac{T_{s_r}^* + 1}{2} \mu_i - \hat{L}_i^* \right) P \left(u_i > \frac{2\hat{L}_i^*}{T_{s_r}^* + 1} \right)}{\left(\frac{T_{s_r}^* + 1}{2} \mu_{s_r} - \hat{S}_{s_r}^* \right) P \left(u_{s_r} > \frac{2\hat{S}_{s_r}^*}{T_{s_r}^* + 1} \right)} \quad (26)$$

此时 若固定虚拟客户 r 的需求 u_{s_r} , 加大客户 i 的需求 u_i . 不难发现, 式(26) 中的分母不变, 分子增大, 即客户 i 的需求均值 μ_i 占虚拟客户 r 的需求均值 μ_{s_r} 的比例增大, 其单位缺货损失成本 p_i 在虚拟客户 r 的相应单位成本 p_{s_r} 中所占的比例也增大, 命题得证.

命题 4 的证明过程虽然给出了虚拟客户 r 相关参数的表达式, 但由于式(24)、式(26) 中给出的权重表达式中包含待确定的最优策略 (s_r^*, \hat{L}_i^*) 等参数, 因此本文根据命题 4 给出的客户需求与虚拟客户相关参数计算权重的关系, 近似地

令分区 S_r 中任意客户 i 的单位缺货损失成本 p_i 在 p_{s_r} 中的权重 $\omega_i^p = \frac{\mu_i}{\sum_{i \in S_r} \mu_i}$, 其单位库存持有成本 h_i

在 h_{s_r} 中的权重 $\omega_i^h = \frac{1 - \omega_i^p}{|S_r| - 1}$. 则根据上述给出的权重, 通过式(23)、式(25) 不难得到虚拟客户 r 的 h_{s_r} 、 p_{s_r} 的估计值.

为了验证通过上述方式给出的虚拟客户相关参数估计方法的效果, 将上述方法与简单平均法进行比较, 采用文中算法计算 FPP 下 SDIRP 的优化策略并进行模拟得到系统运行 1 年后的日平均成本, 具体策略及相应成本如表 3 所示.

表 3 参数估计方法对算法的影响

Table 3 Effect of different parameter estimation methods on algorithms

算法	分区及其路径	分区库存策略	客户库存策略(1-10)	日平均成本/元
简单平均	3-2-4-9-6-7-5-8-1-10	(23, 30) (17, 31) (16, 29)	(6, 10, 10, 6, 11, 6, 15, 10, 8, 8)	422.789 0
本文算法	3-2-4-9-6-7-5-8-1-10	(28, 36) (22, 36) (6, 18)	(8, 10, 5, 7, 11, 6, 11, 14, 8, 10)	403.915 1

根据表 3 不难发现, 参数估计方法对于得到的优化策略具有一定影响, 在本例中虽然采用不同参数估计方法得到的客户分区没有变化, 但由于最优策略不同使得系统平均成本变化在 4.5% 左右; 同时, 采用本文方法进行估计时得到的平均成本更低, 在一定程度上说明了该方法的有效性. 因此, 在后续的算例中均以此方法作为基础进行讨论.

5.2 算法有效性分析

首先, 为了说明文中客户分区算法的有效性, 将本文提出的基于修正 C-W 节约法的客户分区算法与文献[7]、文献[8]中采用的 CCLP 方法进行比较. 其中, 采用 CCLP 方法对客户进行分区后, 仍按照本文中的结论计算 SDIRP 的最优策略. 同时, 将通过上述两种分区算法得到的 SDIRP 最优策略进行模拟, 得到系统运行 1 年后的日平均成本, 如表 4 所示.

表 4 不同分区算法的比较

Table 4 Comparison of different partition algorithms

算法	分区及其路径	分区库存策略	客户库存策略(1-10)	日平均成本/元
修正的 C-W	3-2-4-9-6-7-5-8-1-10	(29, 38) (23, 38) (6, 18)	(8, 11, 5, 8, 11, 7, 12, 14, 9, 10)	386.742 8
CCLP	3-2-9-10-1-6-8-5-4-7	(24, 34) (31, 40)	(5, 11, 7, 9, 7, 5, 10, 9, 9, 6)	411.164 3

通过表 4 不难发现, 采用修正 C-W 节约算法进行客户分区后得到的系统日平均运行成本比 CCLP 方法降低了 5.9%, 从而验证了 CCLP 用于随机需求客户分区时没有考虑库存因素的理论局限性, 同时也说明了本文提出的客户分区算法在上述方面的改进.

解算法以及文献[3]中基于马尔可夫决策过程 (Markov decision process, MDP) 的启发式算法进行比较. 根据表 1、表 2 中的数据, 分别采用上述 3 种算法得到 SDIRP 的优化策略并进行模拟, 得到系统运行 1 年后的日平均成本, 如表 5 所示.

表 5 FPP 以及算法有效性比较

Table 5 Comparison of FPP and algorithms' validity

算法	日平均成本/元	CPU 运行时间/s
本文算法	403.915 9	0.077
文献[7]中算法	506.975 3	0.073
文献[3]中算法	377.923 3	0.358

根据表 5 可知, 通过本文算法得到的 FPP 下

此外, 虽然 FPP 在解决确定需求 IRP 时被广泛使用, 但该策略在解决 SDIRP 时的有效性却没有相关的研究, 因此有必要对 FPP 应用在 SDIRP 上的效果进行验证. 为了对 FPP 以及文中最优策略的有效性进行分析, 将本文的求解算法与使用均值确定化处理后根据文献[7]得到的 FPP 下 SDIRP 的求

SDIRP 的最优策略与通过同样采用 FPP 的文献 [7] 得到的同一问题的策略相比, 在基本相同的运算成本下系统平均运行成本降低了 20.3%; 说明本文给出的最优策略及其算法, 与同样采用 FPP 的文献相比具有明显的优越性; 此外, 与通过文献 [3] 中算法得到的不采用 FPP 时同一问题的策略相比, 系统平均运行成本提高 6.8%. 但如果以相同计算环境下模拟系统平均运行成本所用的 CPU 时间衡量两种策略的实施和管理成本, 则采用 FPP 后该项成本显著降低了 78.49%. 此外, 采用 FPP 后 SDIRP 的最优策略属于平稳策略类, 且文中算法的计算复杂性并不会随客户规模的增加而显著变化; 但文献 [3] 中采用 MDP 模型得到的配送策略并不稳定, 且其计算复杂性对客户规模、客户的库存容量等数据十分敏感, 当系统中的客户数量以及客户库存容量较大时其算法将很难实现. 因此, 实际 SDIRP 中 FPP 的使用可以有效地增加算法的适用范围, 同时保证在满意的运行成本前提下, 显著降低策略的相关实施、管理成本.

6 结束语

本文研究了 FPP 下 SDIRP 的最优策略形式

及其算法. 首先, 根据随机需求下客户分区问题的特点提出了基于修正 C-W 节约法的客户分区算法; 其次, 在对客户进行分区的基础上, 证明了各分区的最优库存策略形式为 $(s_{S_r}^*, \hat{S}_{S_r}^*)$, 各客户的最优库存策略形式为 $(s_{S_r}^*, \hat{L}_j^*)$, 进而将上述最优库存策略与各分区内的 TSP 配送路径结合构成了 SDIRP 的最优策略, 并以此为基础设计了求解基于 FPP 的 SDIRP 最优策略的启发式算法. 最后, 通过具体的数值算例, 将本文算法与文献 [3]、文献 [7] 中的算法进行了比较. 结果显示文中算法在与同样采用 FPP 的算法相比在求解 SDIRP 时具有明显的优势; 同时, 与全局范围内求解 SDIRP 的算法相比, 文中算法既保证了策略对成本优化的满意度, 也大幅降低了 SDIRP 的求解难度以及策略的实施成本, 从而一定程度上也验证了应用 FPP 策略解决 SDIRP 的有效性.

虽然本文证明了 FPP 下 SDIRP 最优策略的形式, 讨论了估计虚拟客户参数的方法, 并通过数值算例对 FPP 的有效性进行了分析. 但对于通过理论推导研究 FPP 的有效性等问题并未深入探讨, 上述问题将是作者下一步工作的主要方向.

参考文献:

- [1] Federgruen A, Zipkin P. A combined vehicle routing and inventory allocation problem [J]. *Operations Research*, 1984, 32(5): 1019 - 1036.
- [2] Qu W W, Bookbinder J H, Iyogun P. An integrated inventory-transportation system with modified periodic policy for multiple products [J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 115(2): 254 - 269.
- [3] 赵达, 李军, 马丹祥. 求解随机需求库存-路径问题的一种算法 [J]. *系统工程*, 2006, 24(5): 23 - 28.
Zhao Da, Li Jun, Ma Danxiang. An algorithm for stochastic demand inventory routing problem [J]. *Systems Engineering*, 2006, 24(5): 23 - 28. (in Chinese)
- [4] Anily S, Federgruen A. One warehouse multiple retailer systems with vehicle routing costs [J]. *Management Science*, 1990, 36(1): 92 - 114.
- [5] Anily S, Bramel J. An asymptotic 98.5%-effective lower bound on fixed partition policies for the inventory-routing problem [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2004, 145(1): 22 - 39.
- [6] 刘克. 实用马尔可夫决策过程 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 9 - 11.
Liu Ke. *Applied Markov Decision Processes* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 9 - 11. (in Chinese)
- [7] Bramel J, Simchi-Levi D. A location based heuristic for general routing problems [J]. *Operational Research*, 1995, 43(4): 649 - 660.
- [8] Chan L, Federgruen A, Simchi-Levi D. Probabilistic analyses and practical algorithms for inventory-routing models [J]. *Operational Research*, 1998, 46(1): 96 - 106.
- [9] Zhao Q H, Wang S Y, Lai K K. A partition approach to the inventory/routing problem [J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 177(2): 786 - 802.

- [10] Zhao Q H, Chen S, Zang C X. Model and algorithm for inventory/routing decision in a three-echelon logistics system [J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 191(3): 623–635.
- [11] Li J X, Chu F, Chen H X. A solution approach to the inventory routing problem in a three-level distribution system [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 210(3): 736–744.
- [12] Michel S, Vanderbeck F. A column-generation based tactical planning method for inventory routing [J]. *Operational Research*, 2012, 60(2): 382–397.
- [13] 陈久梅, 张旭梅, 肖 剑 等. 随机动态装卸混合问题的分区求解策略 [J]. *管理科学学报*, 2012, 15(1): 43–53.
Chen Jiumei, Zhang Xumei, Xiao Jian, et al. Region partitioning policy for stochastic dynamic pick-up and delivery problem [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2012, 15(1): 43–53. (in Chinese)
- [14] 李 军, 郭耀煌. 物流配送—车辆优化调度理论与方法 [M]. 北京: 中国物资出版社, 2001: 78–80.
Li Jun, Guo Yaohuang. *Logistics-Vehicle Schedule Optimization Theories and Methods* [M]. Beijing: China Logistics Publishing House, 2001: 78–80. (in Chinese)
- [15] Federgruen A, Zipkin P. An efficient algorithm for computing optimal (s, S) policies [J]. *Operational Research*, 1984, 32(6): 1268–1285.
- [16] Zheng Y S, Federgruen A. Finding optimal (s, S) policies is about as simple as evaluating a single policy [J]. *Operations Research*, 1991, 39(4): 654–665.
- [17] 赵 达, 李 军, 马丹祥, 等. 随机需求库存—路径问题最优策略及其算法 [J]. *管理科学学报*, 2014, 17(5): 14–24.
Zhao Da, Li Jun, Ma Danxiang, et al. Optimal strategy of stochastic demand inventory routing problem and algorithms [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, 17(5): 14–24. (in Chinese)
- [18] Federgruen A, Zipkin P. An inventory model with limited production capacity and uncertain demands I. The average-cost criterion [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1986, 11(2): 193–207.
- [19] Chen S X, Lambrecht M. X-Y band and modified (s, S) policy [J]. *Operations Research*, 1996, 44(6): 1013–1019.
- [20] Ross M. *Introduction to Probability Models (Tenth Edition)* [M]. Academic Press, 2010: 455–457.
- [21] Brent R. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function [J]. *The Computer Journal*, 1971, 14(4): 422–425.
- [22] 李 峰. 基于偏好信息的多目标旅行商问题 Pareto 优化求解 [J]. *系统工程学报*, 2011, 26(5): 592–598.
Li Feng. Preference-based Pareto optimization of multi-objective traveling salesman problems [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2011, 26(5): 592–598. (in Chinese)
- [23] 李妍峰, 李 军, 高自友. 大规模邻域搜索算法求解时变车辆调度问题 [J]. *管理科学学报*, 2012, 15(1): 23–32.
Li Yanfeng, Li Jun, Gao Ziyou. Very large scale neighborhood search algorithm for solving time dependent vehicle routing problem [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2012, 15(1): 23–32. (in Chinese)
- [24] Axsater S. *库存控制* [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 77.
Axsater S. *Inventory Control* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 77. (in Chinese)

Optimal strategy and algorithm of stochastic demand inventory routing problem under fixed partition policy

ZHAO Da^{1,2}, LI Jun³, MA Dan-xiang⁴, LI Yan-feng³

1. School of Economics and Management, Hainan University, Haikou 570228, China;
2. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;
3. School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
4. College of Civil and Architectural Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan 063009, China

Abstract: The stochastic demand inventory routing problem (SDIRP) is a typical NP-hard problem. It is also
(下转第 70 页)

Inventory model with inverse S-shaped probability weighting in presence of supply disruptions

CHEN Jun-lin¹, ZHAO Xiao-bo², WANG Xiao-jie²

1. School of Management Science and Engineering, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China;
2. Department of Industrial Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

Abstract: This paper considers a continuous-review inventory system which applies zero-inventory-order (ZIO) replenishment policy and which is subject to supply disruption risk. The supplier's available and disrupted durations are assumed to follow two independent exponential distributions. A risk-averse manager is likely to overweigh the probability that the supplier is unavailable when the inventory level reaches the reorder point. An inverse-S shaped weighting function is used to describe the manager's risk-aversion behavior. The supplier's state transition process is modeled by a two-state continuous-time Markov chain, and the long-run average cost function is constructed according to renewal reward theorems. It is proved that the negative cost function is a unimodal function and that there exists a uniquely optimal inventory order quantity. An approximation method along with an upper bound of the approximated cost function error is proposed which can give the analytic expression for the optimal order quantity. Numerical studies are presented to investigate the biases on optimal order quantities and system costs between risk-averse and risk-neutral managers. Also, with a sample size of 160 benchmark sets and 1 000 random sets, the validity of approximation method is illustrated.

Key words: supply disruption; inverse-S shaped weighting function; risk aversion; inventory

(上接第 35 页)

the key to implementing vendor managed inventory (VMI) strategy, that is, to coordinate the inventory problem and distribution problem in a stochastic demand environment. This paper studies the SDIRP based on the Fixed Partition Policy (FPP). Under this policy, customers are partitioned according to the service regions they are in, and customers who are in the same service region are served simultaneously. In this paper, a modified C-W saving algorithm is designed to partition customers, taking into account the impact of partition policy on inventory costs and distribution costs. It is shown that the optimal inventory policy for individual service region is a (s, S) policy, whereas the inventory policy for customers in each service region is an order-up-to policy. Furthermore, this paper proposes an algorithm to solve SDIRP based on FPP. Finally, a numerical example is presented to confirm the efficiency and applicability of the proposed algorithm.

Key words: SDIRP; FPP; (s, S) policy; order-up-to policy; modified C-W saving algorithm