

# 一类考虑反 S 型概率权重的供货中断库存模型<sup>①</sup>

陈俊霖<sup>1</sup>, 赵晓波<sup>2</sup>, 王小劫<sup>2</sup>

( 1. 中央财经大学管理科学与工程学院, 北京 100081; 2. 清华大学工业工程系, 北京 100084)

**摘要:** 在连续盘点库存系统中应用零点订货库存(ZIO)策略,假设供应商工作和中断的持续时间分别服从独立的指数分布.首先,引入反 S 型权重函数刻画风险厌恶型决策者主观高估补货点供应商处于中断的小概率关键事件的行为偏好.其次,利用两个状态连续时间 Markov 链和更新报酬定理构建了长程平均成本模型,证明了成本函数的单峰性,对比讨论了结合数值算例与风险中性模型结论.最后,设计了近似条件得出最优订货量的解析表达式及成本的近似误差上界,配合基准集和随机数据集分别计算了 160 组和 10 000 组数值实验样本,验证了近似方法的有效性.

**关键词:** 供货风险; 风险厌恶; 反 S 型权重; 库存

**中图分类号:** F253.4    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1007-9807(2016)12-0059-12

## 0 引言

自然灾害、设备损坏、人为失误等因素均能影响供应的连续性,造成供货随机中断环境风险.随机中断环境给库存管理者带来极大挑战,相关库存优化问题一直是运作管理研究的重点之一<sup>[1]</sup>.代表性的研究有: Dada 等<sup>[2]</sup>, Hu 和 Kostamis<sup>[3]</sup>, Chen 等<sup>[4]</sup>在单期库存系统中讨论供货中断风险环境下的库存决策; Song 和 Zipkin<sup>[5]</sup>, Jakšić 和 Fransoo<sup>[6]</sup>, Chen 等<sup>[7]</sup>在周期性盘点库存系统中刻画了随机中断环境下的最优订货结构策略; 对于连续性盘点库存系统, Parlar 和 Berkin<sup>[8]</sup>, Berk 和 Arreola-Risa<sup>[9]</sup>假设可供货期与中断期服从独立指数分布,首次构建分析了经济订货批量(EOQ)模型并应用在随机供货中断环境中; 娄山佐等<sup>[10]</sup>进一步考虑了供应商和零售商均可能发生随机中断的情况, Snyder<sup>[11]</sup>基于该模型进一步提出了解析解的近似方法. Snyder 等<sup>[12]</sup>对随机中断环境下的库存优化模型的相关研究进

行了详尽的综述.

行为运作管理作为新兴学科近年来已成为学术界关注的焦点<sup>[13]</sup>.一些学者将决策者的风险态度引入经典的库存模型,并论证修正的库存模型可更好地指导决策. Merzifonluoglu<sup>[14]</sup>采用均值-方差效用函数构建了风险厌恶偏好下的报童模型,并分析了它对最优订货量的影响. Giri<sup>[15]</sup>采用指数效用函数刻画零售商的风险态度,在双渠道单期库存系统中分析零售商的最优常规订货量和最优应急预定量. Chen 等<sup>[16]</sup>基于周期性盘点库存系统,刻画了指数效用函数下最优库存(定价)结构策略. 简惠云和许民利<sup>[17]</sup>通过设计实验室实验论证了零售商具有显著的风险规避或风险寻求特征,风险态度可用 CVaR 效用函数进行刻画. 代建生等<sup>[18]</sup>分析了销售商的风险规避偏好对回购契约实施的影响. 王丽梅等<sup>[19]</sup>采用均值-方差效用函数分析现货供应不确定条件下,风险厌恶型的销售商的库存优化策略. 于辉

① 收稿日期: 2014-12-09; 修订日期: 2016-03-07.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71401195; 71031005; 91324203); 中央高校基本科研业务费专项基金中央财经大学科研创新团队支持计划资助项目.

作者简介: 陈俊霖(1983—),女,四川巴中人,博士,副教授. Email: chenjunlin@cufe.edu.cn

等<sup>[20]</sup>建立了 CVaR 下的供应商 - 零售商收益共享契约以分析供应链应急恢复优化策略. 以上均为从量级 (magnitude) 的角度构建引入风险态度的库存管理模型.

另一方面, 风险发生的概率 (probability) 也是随机中断环境的关键要素. 如 Ellis 等<sup>[21]</sup>在调查了 223 名买方后所指出, 供货中断风险的量级与发生概率均为买方衡量卖方总体可靠性的两个重要方面. Kahneman 和 Tversky<sup>[22]</sup>的研究表明决策者的风险态度在发生概率上亦有明显的表现. 损失发生的小概率事件通常被主观高估, 大概率事件被主观低估, 因此权重函数曲线呈现反 S 型的特点 (图 1). 从风险发生概率的角度研究风险态度下的库存管理问题并不多见. Ranjan 和 Shogren<sup>[23]</sup>发现主观放大的损失概率将导致水资源供给大打折扣. 陈俊霖和赵晓波<sup>[24]</sup>指在供需双方或一方具有反 S 权重风险态度时, 批发价格合同可使供应链在双方均有激励动机下达到协调. Chen 等<sup>[25]</sup>通过仿真实验讨论了反 S 权重函数在连续盘点库存系统中的应用.

本文基于随机供货中断环境下的连续盘点库存系统, 考察在补货点发生供货中断的小概率关键事件对最优定货决策以及库存系统运行的影响. 本文采用 Prelec<sup>[26]</sup>反 S 型权重函数刻画决策者风险厌恶偏好, 构建零点订货库存策略下的成本优化模型, 证明了最优订货决策的惟一性并提出了其近似解析解. 通过与风险中性模型进行对比分析, 描述了风险厌恶行为偏好下系统最优订货量以及成本的偏差情况.

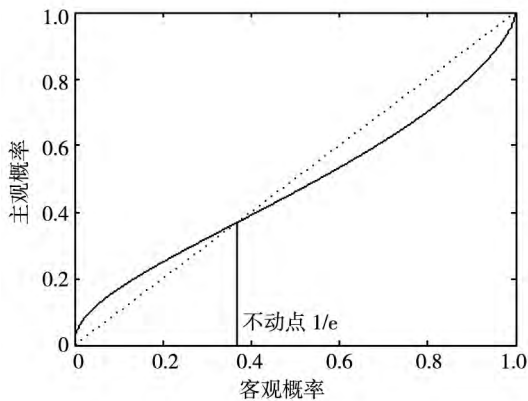


图 1 反 S 型权重函数示意图

Fig. 1 Sample of inverse-S shaped probability weighting function

## 1 模型构建与分析

考虑一个连续盘点库存系统. 生产商从供应商处订货并供给需求客户. 供应商面临供货中断风险, 其正常工作 (状态 0) 和供货中断 (状态 1) 的持续时间分别服从参数为  $\lambda$  和  $\mu$  的指数分布. 以  $X_i$  为第  $i-1$  次中断结束后直到第  $i$  次中断发生时, 供应商已持续工作的时间, 则  $X_i$  的密度函数为  $f_1(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i}$ ; 以  $S_i$  为第  $i$  次中断持续的时间, 则  $S_i$  的密度函数为  $f_0(s_i) = \mu e^{-\mu s_i}$ . 采用两状态连续时间马尔科夫链描述供应商的状态转移过程. 设  $\beta_{ij}(t)$  为供应商从状态  $i$  经过时间  $t (\geq 0)$  后转移到状态  $j$  的概率,  $i, j = 0$  或  $1$ , 则根据 Kolmogorov Forward 等式<sup>[27]</sup>, 有

$$\beta_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \quad (1)$$

$$\beta_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \quad (2)$$

设生产商单次订货成本为  $K$ , 单位产品单位时间的持货成本为  $h$ . 当系统库存水平不为 0 时, 按速率  $D$  满足用户需求, 一旦库存水平降到 0, 生产商则订取批量为  $Q$  的产品. 若供应商处于工作状态, 货物瞬时到达, 提前期为 0; 若供应商处于中断状态, 则订单要待供应商处于工作状态时才可完成, 在此等待期间, 未满足的用户每单位产品需求损失成本为  $\pi$ . 据上述描述可知, 生产商库存的变化过程是随订货重复进行的, 将库存到达  $Q$  的两次相邻订货期视为 1 个周期, 用  $T$  表示. 图 2 描述了供应商的状态和库存水平随时间变化的样本过程.

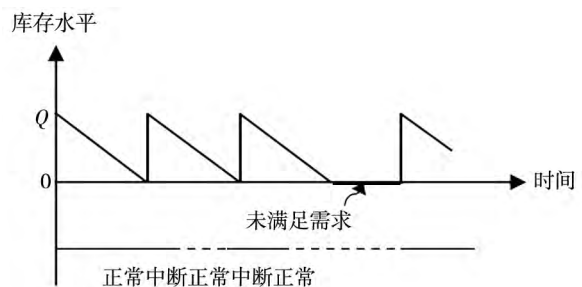


图 2 供应商状态和库存水平随时间变化示意图

Fig. 2 Sample of supplier's status and inventory level over time

在 1 个周期内, 库存水平从期初 ( $t=0$ )  $Q$  逐渐以  $D$  速率下降, 在时刻点  $t = Q/D$  到达 0 点.

根据周期的定义, 期初  $t=0$  供应商均为正常工作状态, 当  $t=Q/D$  时, 供应商无法供货的概率为  $\beta_{01}(t=Q/D)$ . 因供应商工作和中断时间服从独立的指数分布, 故单个周期长度  $T$  的概率密度函数<sup>[5-6]</sup> 为

$$P(T=t) = \begin{cases} 0 & t < Q/D \\ 1 - \beta_{01}(t) & t = Q/D \\ \beta_{01}(t)\mu e^{-\mu(t-Q/D)} & t > Q/D \end{cases} \quad (3)$$

通常, 供应商发生中断为小概率事件, 供应商正常工作持续的时间比其供货中断的时间更长, 因此可假设  $\lambda < \mu$ , 并且, 可假设订货时刻点供应商无法供货概率  $\beta_{01}(t=Q/D) < 1/e$ . 这里,  $1/e$  为 Prelec<sup>[26]</sup> 提出的单参数概率权重函数不动点. 如图 1 所示, 风险厌恶型决策者主观高估小于  $1/e$  的小概率损失, 对于大于  $1/e$  的大概率事件则主观低估. 由于本文讨论风险厌恶型决策者对订货时刻点供应商无法供货的小概率主观放大的行为, 因此仅考虑  $\beta_{01} \leq 1/e$  的部分. Prelec<sup>[26]</sup> 单参数权重函数形式为

$$w_{01}(\beta_{01}) = e^{-(\ln\beta_{01})^\gamma}, 0 < \gamma \leq 1 \quad (4)$$

式中参数  $\gamma$  描述决策者风险厌恶程度,  $\gamma$  越大, 风险厌恶程度越低,  $\gamma=1$  表示决策者风险中性, 即  $w_{01} = \beta_{01}$ .

根据等级依赖效用理论(rank-dependent expected utility theory)<sup>[28]</sup>, 可得风险厌恶型决策者的主观概率为

$$w_{01}(Q/D) = e^{-(\ln\beta_{01}(Q/D))^\gamma} \quad (5)$$

$$w_{00}(Q/D) = 1 - e^{-(\ln\beta_{01}(Q/D))^\gamma} \quad (6)$$

以下为了简化表述, 将  $\beta_{01}(Q/D)$ ,  $w_{01}(Q/D)$  分别简称为  $\beta_0(Q)$ ,  $w_0(Q)$ .

以  $E(C)$  表示 1 个周期内生产商发生的库存总成本期望的主观效用值, 包括 1 次订货成本  $K$ 、库存持货成本  $hQ^2/(2D)$ 、以及可能发生缺货成本  $\pi D w_0(Q)/\mu$ , 因此

$$E(C) = K + \frac{hQ^2}{2D} + \frac{\pi D w_0(Q)}{\mu}$$

1 个周期  $T$  期望时间为总的工作时间加等待时间的期望. 总的工作时间为  $Q/D$ , 等待时间期望可由单个周期长度  $T$  的概率密度函数加权平均求得. 由式(3)知, 周期长度  $T$  的概率密度函数依赖于决策者对  $t=Q/D$  时刻供应商无法供货的

概率判断, 因此, 引入主观周期长度  $T'$ , 易得  $T'$  的概率密度函数为

$$P(T'=t) = \begin{cases} 0 & t < Q/D \\ 1 - w_0(t) & t = Q/D \\ w_0(t)\mu e^{-\mu(t-Q/D)} & t > Q/D \end{cases} \quad (7)$$

据此, 周期长度  $T'$  期望值  $E(T') = Q/D + w_0(Q)/\mu$ . 根据更新报酬定理可知, 系统长期运行平均成本等于单个周期的期望成本与单个周期期望时间长度之比. 令  $g_s$  为系统长期运行平均成本函数, 则

$$g_s(Q) = \frac{E(C)}{E(T')} = \frac{K + \frac{hQ^2}{2D} + \frac{\pi D w_0(Q)}{\mu}}{\frac{Q}{D} + \frac{w_0(Q)}{\mu}} \quad (8)$$

考虑极端的情况. 若供应商十分可靠, 参数  $\lambda \ll \mu$ , 或  $\lambda/\mu \rightarrow 0$ ; 此时式(8)中成本函数  $g_s(Q)$ , 收敛为经典的 EOQ 成本函数, 记为  $g_E(Q)$ , 如命题 1 所示.

**命题 1**  $\lim_{\lambda/\mu \rightarrow 0} g_s(Q) = g_E(Q)$ , 其中  $g_E(Q) = \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2}$  为经典 EOQ 成本函数.

证明略.

假设无限量订货( $Q = \infty$ ) 或者无限量缺货策略( $Q = 0$ ) 是绝对劣势策略, 这一假设符合库存系统的实践. 在该假设条件下, 单件缺货损失成本大于持货成本  $\pi > h > 0$ , 经典 EOQ 成本函数  $g_E(Q) < \pi D$ , 从而系统最小单位时间运行成本小于缺货成本  $\sqrt{2KDh} < \pi D$ . 这里,  $\sqrt{2KDh}$  为经典 EOQ 模型下单位时间成本函数极小值<sup>[26]</sup>, 也可以作为本文中函数  $g_s(Q)$  的下界,  $\pi D$  为无限量缺货单位时间成本.

**命题 2** 在  $\beta_0(Q) \in [0, 1/e]$  条件下,  $w_0(Q)$  是关于  $Q (> 0)$  的增凹函数; 给定  $Q (> 0)$ , 以参数  $\gamma (0 < \gamma \leq 1)$  为变量, 则  $w_0$  是关于  $\gamma (0 < \gamma \leq 1)$  的减函数.

**命题 3** 在  $Q > 0$ ,  $g_E(Q) < \pi D$  的条件下,  $g_s(Q)$  是关于  $w_0(Q)$  的增函数; 给定  $Q (> 0)$ , 以参数  $\gamma (0 < \gamma \leq 1)$  为变量, 则  $g_s$  是关于  $\gamma (0 < \gamma \leq 1)$  的减函数.

参数  $\gamma$  描述决策者风险厌恶程度,  $\gamma$  越大, 风险厌恶程度越低. 因此, 由命题 2, 命题 3 可知, 在同等订货量  $Q (> 0)$  的条件下, 风险厌恶程

度越高 ( $\gamma$  越小) 的决策者认为订货时刻点供应商无法供货的概率  $w_0(Q)$  越大, 从而感知的成本  $g_s(Q)$  越高. 这一结论是符合直观的.

命题 4  $-g_s(Q)$  为单峰函数, 存在惟一的最优解  $Q_s^* (> 0)$  使  $g_s(Q)$  取得极小值.

函数  $-g_s(Q)$  的单峰性质保证了  $Q_s^*$  的惟一性和最优性, 但是不能得到其解析表达式, 需通过计算机寻优算法进行计算求出. 为使得易获取最优订货量表达式和成本函数的简洁易行, 本文进一步从近似的角度修正函数  $g_s(Q)$ , 使修正函数具有凸的特征, 解决这一难题.

## 2 模型近似

本文的基本假设之一为  $\lambda < \mu$ , 在该假设下系统可达到稳态. 令  $\beta$  表示稳态条件下订货点供应商无法供货的客观概率, 易得  $\beta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ .

进一步, 可使用系统稳态条件下的关键概率  $\beta$  近似  $t$  时刻状态转移概率  $\beta_{ij}(t)$ . 具体而言, 针对指数项, 令稳态概率的线性积  $\beta\theta$  替换  $\beta_0(Q)$ ,  $\theta$  为常数,  $0 < \theta \leq 1$ . 稳态概率是对系统长期状态的预测, 常数  $\theta$  体现了系统近代历史. 在近似条件下, 式 (4) 主观概率  $w_0(Q)$  调整为  $w = e^{-(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\theta)^Y}$ . 若仅对系统长期状态进行讨论, 可令  $\theta = 1$  [11 29]. 由于  $\lambda < \mu$ , 因此  $\beta \leq 1/e$ , 即  $\lambda \leq \frac{1}{e-1}\mu$  的条件自然满足.

令  $g(Q)$  表示近似条件下的系统长期运行平均成本函数, 则

$$g(Q) = \frac{K + \frac{hQ^2}{2D} + \frac{\pi Dw}{\mu}}{\frac{Q}{D} + \frac{w}{\mu}} \quad (9)$$

在近似条件下, 系统的最优订货量以及系统最小成本如命题 5 所示.

命题 5  $g(Q)$  是关于  $Q$  的凸函数,  $g(Q)$  在  $Q^* = \frac{\sqrt{(wDh)^2 + 2h\mu(KD\mu + D^2\pi w)} - wDh}{h\mu}$  处取得极小值.

近似成本函数  $g(Q)$  的凸性为求取最优订货量  $Q^*$  的解析表达式提供了便利. 化简  $Q^*$  可得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h} + a^2 + b} - a$$

其中  $a = \frac{wD}{\mu}$ ;  $b = \frac{2D^2\pi w}{h\mu}$ . 可以看到, 最优订货量  $Q^*$  一方面与参数  $K, h, D$  有关, 另一方面还与主观概率  $w$  系统修复的速度  $\mu$  以及缺货成本  $\pi$  有关. 而一般 EOQ 模型最优订货量为  $\sqrt{\frac{2KD}{h}}$ , 仅与参数  $K, h, D$  有关.

近似方法可以在一定程度上提供满意的优化决策, 其近似解的精确性对决策效果的影响也是不容忽视的. 进一步探讨最优订货量以及系统成本的近似误差. 采用近似成本函数与原成本函数之差, 除以原成本函数归一化得到近似误差比值. 通过近似误差比值分析成本函数近似的精确程度, 分析结论如命题 6 所示.

命题 6 (a) 近似最优订货量大于原最优订货量  $Q^* \geq Q_s^*$ ;

(b) 在  $Q > 0, g_s(Q) < \pi D$  的条件下, 有  $g(Q) \geq g_s(Q)$ ;

$$\frac{g(Q) - g_s(Q)}{g_s(Q)} \leq \frac{w - w_0(Q)}{w_0(Q)} \left[ 1 - \frac{g_E(Q)}{\pi D} \right];$$

$$\frac{g(Q^*) - g_s(Q^*)}{g_s(Q^*)} \leq$$

$$\min \left\{ \frac{w - w_0(Q^*)}{w_0(Q^*)} \left[ 1 - \frac{g_E(Q^*)}{\pi D} \right], \frac{w - w_0(Q^*)}{w} \right\} < 1$$

近似条件下, 最优订货量偏大, 系统成本也相应增加. 可找出系统成本增加的误差比值上界, 即主观概率近似误差比值  $\frac{w - w_0(Q)}{w_0(Q)}$  与比例

项  $1 - \frac{g_E(Q)}{\pi D}$  的乘积. 比例项  $1 - \frac{g_E(Q)}{\pi D}$  在

$g_E(Q) < \pi D$  条件下小于 1, 因此成本误差是主观概率误差的缩减, 可以说明近似具有较高精确性. 成本误差上界在  $Q^*$  点可直接运用主观概率的误差比值  $\frac{w - w_0(Q^*)}{w}$  描述, 并且这也是一个

小于 1 的数. 因此, 可以预期近似成本误差具有收敛的特性. 需要指出的是, 本文采用 Prelec 的权重函数讨论模型的近似效果, 但近似方法并不局限在 Prelec 的权重函数形式下, 可在一般的反 S 型权重函数下推广运用.

### 3 数值分析

首先,分析系统成本函数随风险厌恶程度变化的趋势. 设  $K = 500, h = 0.5, \pi = 10, D = 1\ 000, \lambda = 1, \mu = 5, \gamma = 0.3$ . 为描述系统的客观运行成本,令  $g_{s\beta}$  表示风险中性 ( $\gamma = 1$ ) 假设下,系统长期运行平均成本函数. 由命题 4 易知  $-g_{s\beta}$  关于  $Q$  具有单峰性,设其在  $Q_{s\beta}^*$  处取得极小值.

如图 3 所示,  $g_s(Q_s^*)$  随着  $\gamma$  的增加而减小,在  $\gamma = 1$  (风险中性) 处减至最低点. 风险厌恶程度越高 ( $\gamma$  越小) 的决策者认为订货时刻点供应商无法供货的概率越大,从而引起较高的系统成本. 这一结论是命题 2,命题 3 的延伸. 从系统实际成本的角度,风险厌恶程度越高,  $g_{s\beta}(Q_s^*)$  偏离最优值越远,并且成本偏差  $g_s(Q_s^*) - g_{s\beta}(Q_s^*)$  越大. 即相比于风险中性决策者,高风险厌恶程度的决策者判断出现较大的成本计算偏差,并且产生较大的系统实际成本.

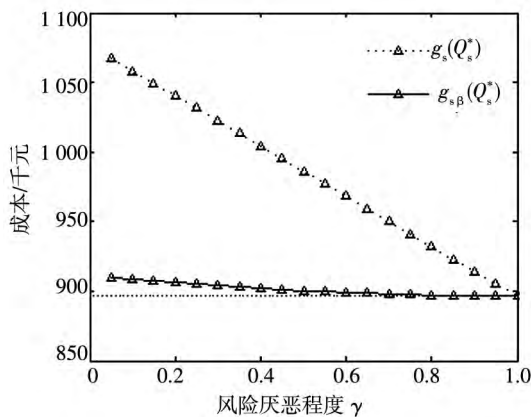


图 3  $g_s(Q_s^*)$   $g_{s\beta}(Q_s^*)$  关于  $\gamma$  的变化趋势  
Fig. 3  $g_s(Q_s^*)$  and  $g_{s\beta}(Q_s^*)$  as functions of  $\gamma$

参数  $1/\lambda$  表示 1 个周期内供应商正常供货期望时间,  $\mu/\lambda$  表示 1 个周期内正常供货期望时间与供货中断期望时间的比值. 可以认为,较大的  $\lambda$  表示供应商更易发生中断; 在给定  $\lambda$  的条件下,较大的  $\mu/\lambda$  表示供应商的恢复能力更强. 也即是,  $\lambda$  表示供应商的可靠性,  $\lambda$  越大,可靠性越差,  $\mu/\lambda$  表示供应商的敏捷性,  $\mu/\lambda$  越大,敏捷性越强,可靠性和敏捷性从两个角度综合反映了供应商的供货能力.

从可靠性的角度,如图 4 所示,在  $\mu/\lambda = 5$

的条件下,随着  $\lambda$  的增加,风险中性决策者 (risk neutral, 以下简称 N) 的最优订货量先增加后下降,风险厌恶型决策者 (risk averse, 以下简称 A) 则订货量保持下降趋势,由此可见,系统的最优订货量大小与系统的可靠性无单调关系,可靠性越差的系统 1 个周期内的最优订货量水平可能会越低. 两类决策者的最优订货量偏差在  $\lambda$  较小的区域差异较大,而随着  $\lambda$  的增加,差异逐渐缩小,表明决策者的风险态度在供货中断发生不太频繁的系统下对最优库存决策影响较大,与理性最优决策出现较大偏差.

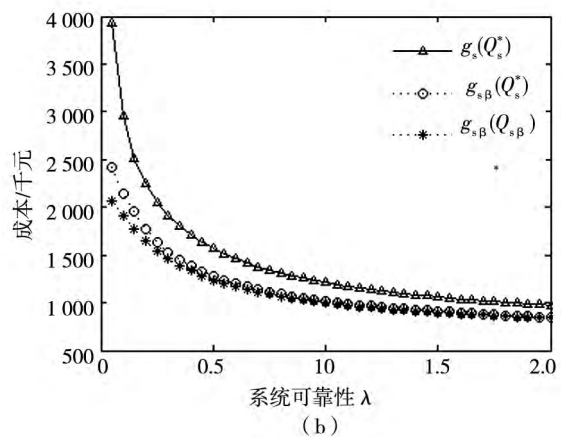
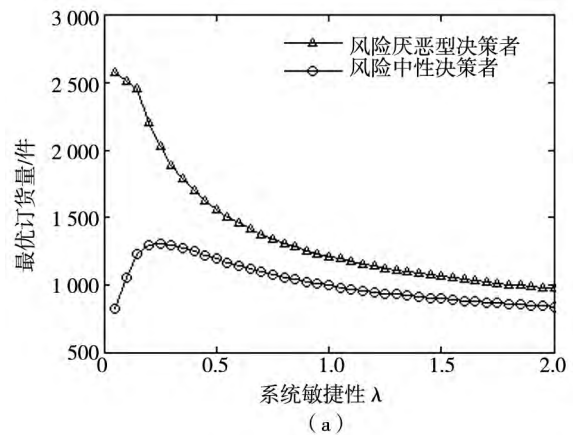


图 4 最优订货量与系统成本关于可靠性  $\lambda$  的变化趋势 ( $\mu/\lambda = 5$ )  
Fig. 4 Optimal order quantity and system cost as functions of reliability parameter  $\lambda$  ( $\mu/\lambda = 5$ )

从敏捷性的角度,如图 5 所示,在给定  $\lambda = 1$  的条件下,随着  $\mu/\lambda$  的增加, N 型决策者与 A 型决策者的最优订货量以及系统成本均表现为下降趋势. 这一结论符合直观,敏捷性越强,系统内库存水平越低,运行成本越小. 另一方面,对比 A 型决策者与 N 型决策者的最优订货量可以发

现,在敏捷性较高的系统中,有  $Q_s^* > Q_{s\beta}^*$ , 即 A 型决策者订货量偏高; 而在敏捷性较差的系统中,有  $Q_s^* < Q_{s\beta}^*$ , 即 N 型决策者订货量偏高. 这一结论并不符合直观. A 型决策者主观高估了订货点发生供货中断的概率,但最优订货量并未相应增加. 图 5(a) 也体现了这一特征. 由此可见,对 A 型决策者而言,通过多订货来防范供货中断风险并不总是经济有效,因此,针对性的构建库存优化模型作为决策支持是十分有必要的.

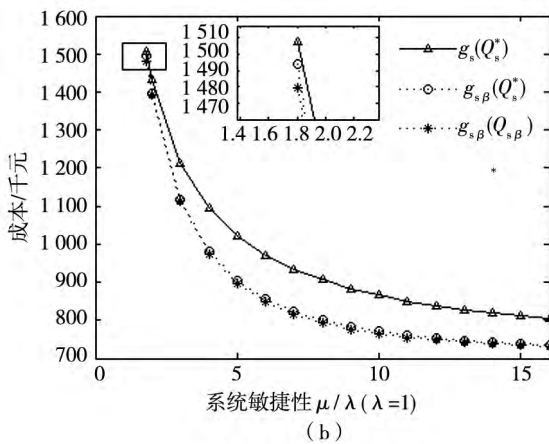
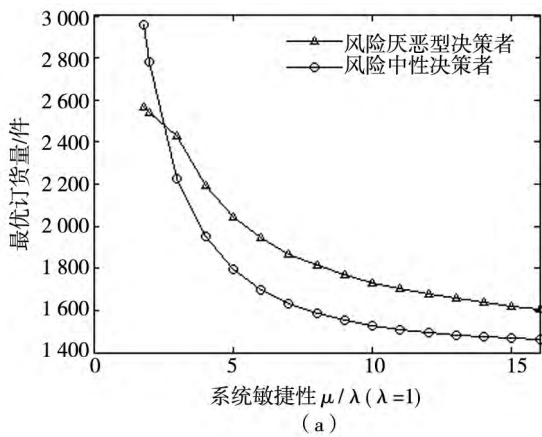


图 5 最优订货量与系统成本关于敏捷性  $\mu/\lambda$  的变化趋势

Fig.5 Optimal order quantity and system cost as functions of agility  $\mu/\lambda$

结合图 4 与图 5, A 型决策者与 N 型决策者最优订货量差异比随着  $\lambda$  增大而减小, 随着  $\mu/\lambda$  增大而增大. 决策者的风险态度对其最优决策以及系统的运行成本有显著影响. 因此, 在构建库存优化模型时, 尤其针对供应商供货中断风险发生频率较低, 但恢复正常工作较强的这类系统, 需对决策者的风险态度进行着重区别分析.

进一步讨论缺货成本  $\pi$  对最优订货量以及系统成本的影响. 如图 6 所示, A 型与 N 型决策者的系统成本均随着缺货成本的增加而增加. 从最优订货量的角度, N 型决策者最优订货量决策对缺货成本的变化较为敏感. A 型决策者最优订货量在缺货成本较小时增加速度较快, 而后逐渐趋于平稳, A 型决策者最优订货量仅在缺货成本较小的区域较为敏感, 而在较大的区域范围内不敏感.

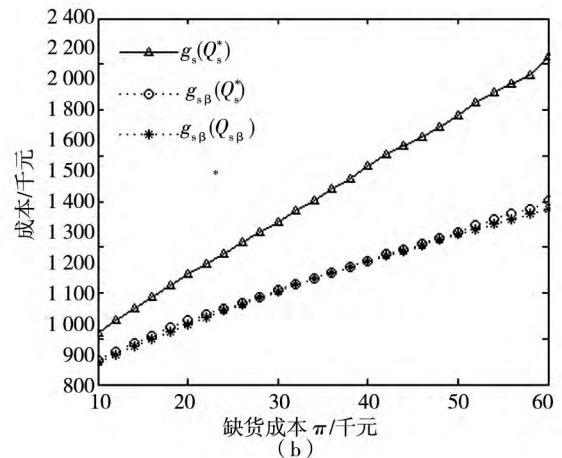
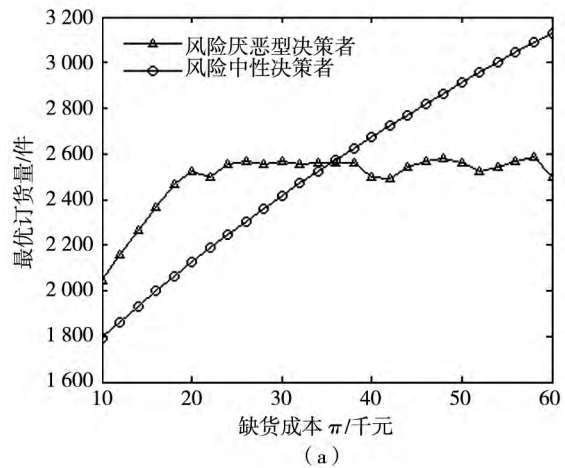


图 6 最优订货量与系统成本关于缺货成本  $\pi$  的变化趋势

Fig.6 Optimal order quantity and system cost as functions of penalty cost  $\pi$

图 7 描述了持货成本  $h$  的变化对最优决策和系统成本的影响. A 型决策者与 N 型决策者的最优订货量和成本关于  $h$  的变化趋势相似. 随着持货成本的增加, 最优订货量逐渐减小, 系统成本逐渐增加. 在较小的  $h$  范围内, 减小或增加的速度较快, 而在较大的  $h$  范围内, 变化速度较慢. 表明最优订货量与系统成本对于持货成本  $h$  较小时较为敏感.

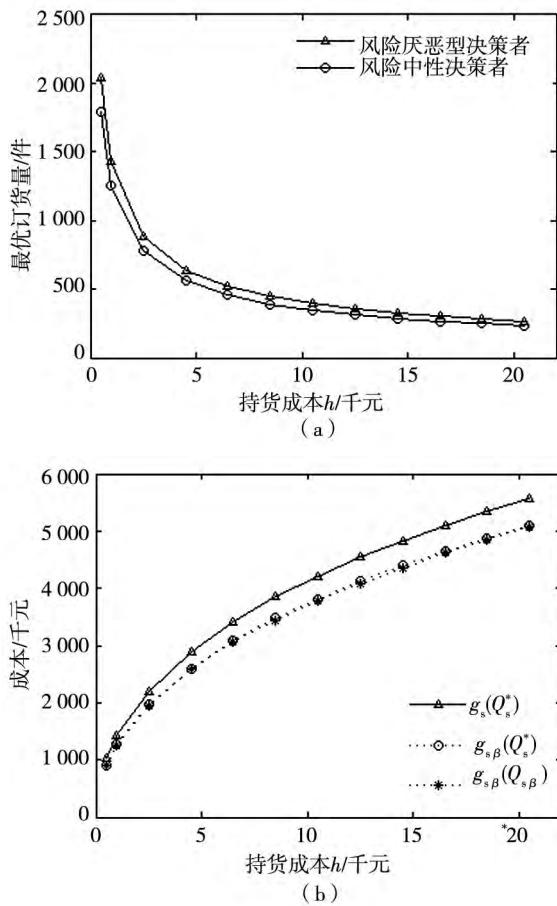


图 7 最优订货量与系统成本关于持货成本  $h$  的变化趋势  
 Fig. 7 Optimal order quantity and system cost as functions of holding cost  $h$

接下来,设计数值实验讨论近似精确度,并对比分析 A 型决策者与 N 型决策者的最优决策偏离情况. 图 8 直观描述了近似成本函数  $g$  与精确成本函数  $g_s$  在  $Q = [1\ 000, 3\ 500]$  范围内的曲线图. 给定  $Q$ , 近似成本函数取值大于精确成本函数, 并且最优订货量  $Q^* > Q_s^*$ ,

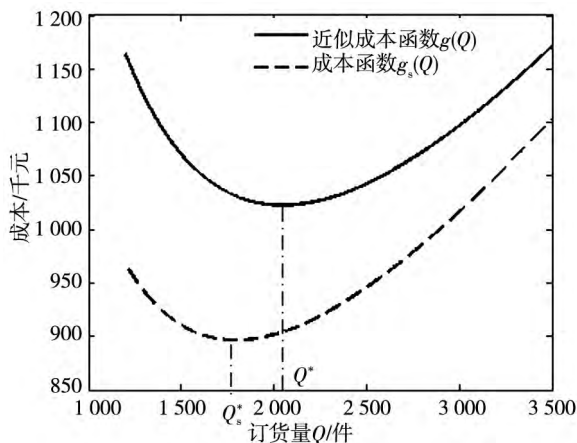


图 8 系统近似成本  $g$  与精确成本函数  $g_s$   
 Fig. 8 Approximated system cost  $g$  and accurate system cost  $g_s$  as functions of order quantity  $Q$

验证了命题 5 的结论. 图 9 描述成本近似误差比值与其上界的变化趋势. 成本近似误差百分比在  $Q$  较小时误差较大, 随着  $Q$  的增加, 呈现先增后减的趋势, 并逐渐收敛至 0 点. 近似方法在最优点的精确度较高, 在最优点  $Q_s^*$  点以及需求  $D$  点的误差百分比值小于  $10^{-5}$ . 误差比值的界与误差比值趋势类似, 并具有收敛的特征.

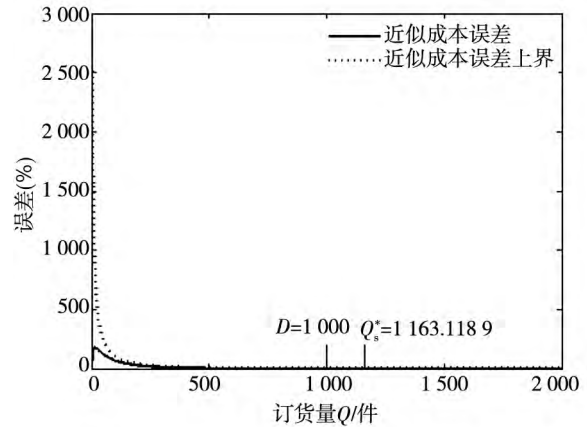


图 9  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$  及其上界关于  $Q$  的变化趋势图

Fig. 9  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$  and upper bound as functions of order quantity  $Q$

针对近似最优解的精确程度, 表 1 列出了  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$  误差比的平均值和最大值, 考察当采用近似最优解  $Q^*$  为最优决策时, 系统的精确成本与系统的最小运行成本  $g_s(Q_s^*)$  的百分比误差. 计算结果表明, 误差比平均值 0.002 5%, 最大值 1.412 8%, 在整体样本下, 其中 99.99% 的样本误差小于 1%, 99.69% 的样本误差小于 0.1%, 可以认为, 采用  $Q^*$  作为最优解时, 成本函数的增加量在可接受范围内.

表 2 描述了两类订货量的偏移程度  $\frac{Q^* - Q_s^*}{Q^*}$ , 在整体样本下, 差异比平均值为 0.133 8%, 最大值 25%, 有 92.64% 的样本满足差异比小于 0.1%, 由此可以说明, 两类订货量在取值上并没有出现太大的偏移. 这一结论可用于计算  $Q_s^*$  的算法设计中, 将近似解  $Q^*$  赋为初值, 为计算带来方便.

表 1 成本函数近似误差  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$

Table 1 Approximation error of system cost  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$

$\lambda$	$\mu/\lambda$	基准集(%)		随机集(%)		汇总(%)	
		平均值	最大值	平均值	最大值	平均值	最大值
0.5	2	0.153 5	0.378 2	0.018 7	0.981 5	0.086 1	0.981 5
0.5	4	0.089 8	0.230 4	0.000 3	0.244 9	0.046 4	0.244 9
0.5	8	0.027 0	0.100 2	0.000 5	0.038 3	0.013 8	0.100 2
0.5	16	0.004 9	0.027 2	<0.000 1	0.001 7	0.002 5	0.027 2
1	2	0.016 5	0.045 7	0.008 3	1.412 8	0.012 4	1.412 8
1	4	0.007 2	0.024 8	0.001 2	0.137 9	0.004 2	0.137 9
1	8	0.001 3	0.007 5	0.003 4	0.129 2	0.002 4	0.129 2
1	16	0.000 1	0.000 9	<0.000 1	0.000 1	0.000 1	0.000 9
2	2	0.000 5	0.001 9	0.000 3	0.020 5	0.000 4	0.020 5
2	4	0.000 2	0.000 9	<0.000 1	0.001	0.000 1	0.001
2	8	<0.000 1	0.000 1	0.000 7	0.002 3	0.000 4	0.002 3
2	16	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1
汇总(%)		0.018 9	0.378 2	0.002 3	1.412 8	0.002 5	1.412 8

表 2 最优订货量近似误差  $\frac{Q^* - Q_s^*}{Q^*}$

Table 2 Approximation error of optimal order quantity  $\frac{Q^* - Q_s^*}{Q^*}$

$\lambda$	$\mu/\lambda$	基准集(%)		随机集(%)		汇总(%)	
		平均值	最大值	平均值	最大值	平均值	最大值
0.5	2	5.048 5	11.666 3	1.050 4	19.899 3	3.049 5	19.899 3
0.5	4	4.364 4	8.381 7	0.265 8	8.307 0	2.315 1	8.381 7
0.5	8	2.154 4	5.144 1	0.060 4	3.024 7	1.107 4	5.144 1
0.5	16	0.715 7	2.522 0	0.029 3	0.608 0	0.372 5	2.522 0
1	2	1.697 7	3.506 0	0.233 6	24.997 1	0.965 7	24.997 1
1	4	0.996 6	2.462 8	0.067 6	6.058 9	0.532 1	6.058 9
1	8	0.361 1	1.301 6	0.107 0	5.859 6	0.234 1	5.859 6
1	16	0.086 9	0.437 6	0.011 9	0.115 3	0.049 4	0.437 6
2	2	0.244 2	0.658 0	0.030 5	2.227 3	0.137 4	2.227 3
2	4	0.125 6	0.431 9	0.013 7	0.469 8	0.069 7	0.469 8
2	8	0.030 1	0.165 1	0.042 7	0.708 9	0.036 4	0.708 9
2	16	0.006 7	0.024 3	0.002 0	0.019 7	0.004 4	0.024 3
4	2	0.015 2	0.058 3	0.004 5	0.106 4	0.009 9	0.106 4
4	4	0.031 5	0.005 9	0.031 5	0.001 3	0.011 1	0.003 6
4	8	0.001 2	0.005 8	<0.000 1	<0.000 1	0.000 6	0.005 8
4	16	<0.000 1	0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	0.000 1
汇总(%)		0.990 9	11.666 3	0.120 0	24.997 1	0.133 8	24.997 1

进一步设计大规模数值实验考察近似方法的精确性,设置基准数据集和随机数据集两类仿真数据集.基准数据集在给定数据下进行组合计算,随机数据集为在一定范围内进行随机取值计

算.基准集和随机数据的配合有效地增加了样本量并保证了样本取值范围的广度.两类数据样本量分别为160组和10 000组.基准集参数  $h, K, \pi$  和  $D$  的取值如表3所示,  $\lambda = (0.5, 1, 2, 4)$ ,



$\mu = (2\lambda, 4\lambda, 8\lambda, 16\lambda)$ . 在随机组中, 设  $D = 100, K \sim [0, 10\ 000], h \sim [0, 100]$ . 为保证缺货成本大于持货成本 ( $\pi \geq h$ ), 设置  $\pi \sim [h, 1\ 000]$ . 计算通过 MATLAB 模块进行.

表 3 基准集参数

Table 3 Problem parameters for benchmark data sets

持货成本	固定订货成本	持货成本	需求
$h$	$k$	$\pi$	$D$
0.6	25	5	500
12	11	72	13
7	180	45	2 700
1.8	50	16	200
48	4 750	400	2 500
4	250	50	3 200
0.02	38	0.7	1 800
8	30	80	540
0.05	12	0.31	3 000
4.1	13 400	70	9 800

如表 4 所示, 考虑成本函数的近似误差以及命

题 6 提出的误差上界. 近似误差  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$  的平均值和最大值, 标记为“实际误差”, 理论上界  $\min\left\{\frac{w - w_0(Q^*)}{w_0(Q^*)} \left(1 - \frac{g_E(Q^*)}{Dp}\right), \frac{w - w_0(Q^*)}{w(Q^*)}\right\}$  的平均值和最大值标记为“误差上界”. 仍然区分基准集和随机集两种样本类型. 计算结果表明, 近似成本误差平均值 0.022 1%, 最大值 5.445 3%, 误差上界平均值 0.066 3%, 最大值 17.51%, 误差上界能较紧的约束实际误差, 并且明显小于最坏情况的上界 1. 较紧的上界可显著减少计算量, 优化计算方法. 在整体样本下, 有 99.69% 的样本实际误差小于 1%, 96.88% 的样本实际误差小于 0.1%, 结合平均误差 0.022 1%, 可以说明在近似条件下, 系统最优成本的增加并不大, 在可接受范围内.

表 4 成本函数近似误差  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$  及其误差上界

Table 4 Approximation errors of system cost  $\frac{g(Q^*) - g_s(Q_s^*)}{g_s(Q_s^*)}$  and upper bound

$\lambda$	$\mu/\lambda$	基准集 (%)				随机集 (%)				汇总 (%)			
		误差上界		实际误差		误差上界		实际误差		误差上界		实际误差	
		平均值	最大值	平均值	最大值	平均值	最大值	平均值	最大值	平均值	最大值	平均值	最大值
0.5	2	2.351 9	4.329 2	1.105 0	1.992 2	0.584 1	12.49 7	0.190 5	4.603 1	1.468 0	12.49 7	0.647 8	4.603 1
0.5	4	0.677 2	3.137 3	0.773 6	1.511 6	0.158 7	7.597 0	0.044 2	2.189 7	0.918 0	7.597 0	0.408 9	2.189 7
0.5	8	0.883 3	1.982 6	0.380 5	0.946 6	0.028 3	2.510 4	0.007 4	0.660 8	0.455 8	2.510 4	0.194 0	0.946 6
0.5	16	0.298 2	0.982 6	0.116 6	0.446 9	0.008 2	0.511 2	0.002 2	0.090 1	0.153 2	0.982 6	0.059 4	0.446 9
1	2	0.543 6	1.130 5	0.255 7	0.544 8	0.117 9	13.556 8	0.038 9	5.445 3	0.330 8	13.556 8	0.147 3	5.445 3
1	4	0.341 2	0.817 4	0.152 2	0.395 7	0.029 7	5.737 3	0.008 6	1.539 5	0.185 5	5.737 3	0.080 4	1.539 5
1	8	0.126 6	0.434 3	0.051 7	0.202 8	0.027 5	2.777 3	0.012 0	1.173 4	0.077 1	2.777 3	0.031 9	1.173 4
1	16	0.028 4	14.530 0	0.011 2	0.061 2	0.002 2	0.045 0	0.000 9	0.013 6	0.015 3	14.530 0	0.006 1	0.061 2
2	2	0.065 7	17.510 0	0.030 0	0.085 4	0.009 3	1.316 3	0.003 0	0.407 1	0.037 5	17.510 0	0.016 5	0.407 1
2	4	0.031 8	0.117 7	0.013 5	0.056	0.002 0	0.133 6	0.001 0	0.063 2	0.016 9	0.133 6	0.007 3	0.063 2
2	8	0.008 1	0.044 7	0.003 3	0.019 7	0.005 0	0.221 1	0.003 1	0.102 3	0.006 6	0.221 1	0.003 2	0.102 3
2	16	0.001 1	0.006 6	0.000 4	0.002 4	0.000 9	0.007 8	0.000 3	0.002 0	0.001 0	0.007 8	0.000 4	0.002 4
4	2	0.003 2	0.011 9	0.001 4	0.005 8	0.002 1	0.187 0	0.000 3	0.018 0	0.002 7	0.187 0	0.000 9	0.018 0
4	4	0.001 1	0.006 6	0.000 5	0.000 3	0.000 2	0.002 3	<0.000 1	0.000 9	0.000 7	0.006 6	0.000 3	0.003 0
4	8	0.000 2	0.001 2	0.0001	0.000 5	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	0.000 1	0.001 2	0.000 1	0.000 5
4	16	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1	<0.000 1
汇总 (%)		0.397 6	17.51	0.181 0	1.992 2	0.061 0	13.556 8	0.019 5	5.445 3	0.066 3	17.51	0.022 1	5.445 3

## 6 结束语

本文在连续盘点库存系统中,讨论风险厌恶者主观高估补货点发生供货中断的小概率关键事件对最优决策以及系统成本的影响.利用两个状态连续时间 Markov 链和更新报酬定理构建了长程平均成本模型,证明了最优订货决策的惟一性.进一步,设计近似模型并得出最优订货量的近似解析解,并分析了近似解的精确度,给出了近似成本误差理论上界.

与风险中性模型进行了对比讨论.结果表明,决策者的风险厌恶偏好会增加系统运行成本,但通过提高订货量水平并不总是经济有效的.对于风险厌恶型决策者而言,选择比风险中性决策者更低的订货量水平可能使得系统运行成本更低.

此外,风险厌恶型决策者与风险中性决策者对系统参数的敏感程度也体现出显著差异.例如,风险中性决策者最优订货量对缺货成本的变化较为敏感.随着缺货成本的增加,最优订货量也相应增加.而风险厌恶型决策者最优订货量仅在缺货成本较小的区域较为敏感,而在较大的区域范围内不敏感.特别的,对于供货中断风险发生不频繁,但处理中断敏捷性较差的这类系统,决策者的风险厌恶态度对最优订货量和系统成本的影响较大.

本文基于缺货不补的库存策略讨论决策者风险态度,后续可进一步针对缺货回补的库存策略进行讨论.另外,本文聚焦于小概率高量级的风险主观性,供应链面临的风险远不仅如此,频繁发生或量级低的风险对库存管理的影响也有待考察.

## 参 考 文 献:

- [1] 吴 军, 李 健, 汪寿阳. 供应链风险管理中的几个重要问题[J]. 管理科学学报, 2007, 9(6): 1-12.  
Wu Jun, Li Jian, Wang Shouyang. Some key problems in supply chain risk management [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 9(4): 1-12. (in Chinese)
- [2] Dada M, Petrucci N C, Schwarz L B. A newsvendor's procurement problem when suppliers are unreliable [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2007, 9(1): 9-32.
- [3] Hu B, Kostamis D. Managing supply disruptions when sourcing from reliable and unreliable suppliers [J]. Production and Operations Management, 2015, 24(5): 808-820.
- [4] Chen J, Zhao X, Shen Z. Risk mitigation benefit from backup suppliers in the presence of the horizontal fairness concern [J]. Decision Sciences, 2015, 46(4): 663-696.
- [5] Song J S, Zipkin P H. Inventory control with information about supply conditions [J]. Management Science, 1996, 42(10): 1409-1419.
- [6] Jakšić M, Fransoo J C. Optimal inventory management with supply backordering [J]. International Journal of Production Economics, 2015, 159(1): 254-264.
- [7] Chen J, Zhao X, Zhou Y. A periodic-review inventory system with a capacitated backup supplier for mitigating supply disruptions [J]. European Journal of Operational Research, 2012, 219(2): 312-323.
- [8] Parlar M, Berkin D. Future supply uncertainty in EOQ models [J]. Naval Research Logistics, 1991, 38(1): 107-121.
- [9] Berk E, Arreola-Risa A. Note on "Future supply uncertainty in EOQ models" [J]. Naval Research Logistics, 1994, 41(1): 129-132.
- [10] 娄山佐, 吴耀华, 吕 文, 等. 随机中断环境下的库存优化管理 [J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 469-475.  
Lou Shanzuo, Wu Yaohua, Lü Wen, et al. Optima inventory management under stochastic disruption [J]. Systems Engi-

- neering-Theory & Practice ,2010 ,30( 3) : 469 - 475. ( in Chinese)
- [11] Snyder L V. A tight approximation for an EOQ model with supply disruptions [J]. International Journal of Production Economics ,2014 ,155( 9) : 91 - 108.
- [12] Snyder L V , Atan Z , Peng P , et al. OR/MS models for supply chain disruptions: A review [J]. IIE Transactions ,2016 ,48( 2) : 89 - 109.
- [13] 刘作仪, 查 勇. 行为运作管理: 一个正在显现的研究领域 [J]. 管理科学学报 ,2009 ,12( 4) : 64 - 74.  
Liu Zuoyi , Zha Yong. Behavioral operations management: An emerging research field [J]. Journal of Management Sciences in China ,2009 ,12( 4) : 64 - 74. ( in Chinese)
- [14] Merzifonluoglu Y. Impact of risk aversion and backup supplier on sourcing decisions of a firm [J]. International Journal of Production Research ,2015 ,53( 22) : 6937 - 6961.
- [15] Giri B C. Managing inventory with two suppliers under yield uncertainty and risk aversion [J]. International Journal of Production Economics ,2011 ,133( 1) : 80 - 85.
- [16] Chen X , Sim M , Simchi-Levi D , et al. Risk aversion in inventory management [J]. Operations Research ,2007 ,55( 5) : 828 - 842.
- [17] 简惠云, 许民利. 基于 CVaR 的供应链契约及其实验研究 [J]. 管理科学学报 ,2015 ,18( 10) : 56 - 68.  
Jian Huiyun , Xu Minli. Models and their experiments of supply chain contracts based on CVaR [J]. Journal of Management Sciences in China ,2015 ,18( 10) : 56 - 68. ( in Chinese)
- [18] 代建生, 孟卫东, 范 波. 风险规避供应链的回购契约安排 [J]. 管理科学学报 ,2015 ,18( 5) : 57 - 67.  
Dai Jiansheng , Meng Weidong , Fan Bo. Supply chain coordination with risk aversion via buy-back contracts [J]. Journal of Management Sciences in China ,2015 ,18( 5) : 57 - 67. ( in Chinese)
- [19] 王丽梅, 姚 忠, 刘 鲁. 现货供应不确定下的优化采购策略研究 [J]. 管理科学学报 ,2011 ,14( 4) : 24 - 35.  
Wang Limei , Yao Zhong , Liu Lu. Dual sourcing optimal procurement policy under spot market supply uncertainty [J]. Journal of Management Sciences in China ,2011 ,14( 4) : 24 - 35. ( in Chinese)
- [20] 于 辉, 邓 亮, 孙彩虹. 供应链应急援助的 CVaR 模型 [J]. 管理科学学报 ,2011 ,14( 6) : 68 - 75.  
Yu Hui , Deng Liang , Sun Caihong. A CVaR model of supply chain emergency assistance [J]. Journal of Management Sciences in China ,2011 ,14( 6) : 68 - 75. ( in Chinese)
- [21] Ellis S C , Henry R M , Shockley J. Buyer perceptions of supply disruption risk: A behavioral view and empirical assessment [J]. Journal of Operations Management ,2010 ,28( 1) : 34 - 46.
- [22] Kahneman D , Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk [J]. Econometrica ,1990 ,47( 2) : 140 - 170.
- [23] Ranjan R , Shogren J F. How probability weighting affects participation in water markets [J]. Water Resources Research ,2006 ,42( 8) : 1013 - 1016.
- [24] 陈俊霖, 赵晓波. 反 S 型权重风险偏好对一类两级供应链的影响 [J]. 运筹与管理 ,2013 ,22( 2) : 1 - 7.  
Chen Junlin , Zhao Xiaobo. Inverse-S shaped weighting function in a two stage supply chain [J]. Operations Research and Management Science ,2013 ,22( 2) : 1 - 7. ( in Chinese)
- [25] Chen J , Zhao H , Zhao X. How probability weighting affects inventory management with supply disruptions [J]. Lecture Notes in Engineering & Computer Science ,2012 ,2196( 1) .
- [26] Prelec D. The probability weighting function [J]. Econometrica ,1998 ,66( 3) : 497 - 528.
- [27] Ross S M. Introduction to Probability Models [M]. New York , London: Academic Press Inc. ninth edition ,2006: 625 - 627.
- [28] Quiggin J. Generalized Expected Utility Theory: The Rank Dependent Model [M]. Berlin: Springer ,1992.
- [29] Porteus E L. Foundations of Stochastic Inventory Theory [M]. Stanford: Stanford University Press ,2002.

## Inventory model with inverse S-shaped probability weighting in presence of supply disruptions

CHEN Jun-lin<sup>1</sup>, ZHAO Xiao-bo<sup>2</sup>, WANG Xiao-jie<sup>2</sup>

1. School of Management Science and Engineering, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China;
2. Department of Industrial Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

**Abstract:** This paper considers a continuous-review inventory system which applies zero-inventory-order (ZIO) replenishment policy and which is subject to supply disruption risk. The supplier's available and disrupted durations are assumed to follow two independent exponential distributions. A risk-averse manager is likely to overweigh the probability that the supplier is unavailable when the inventory level reaches the reorder point. An inverse-S shaped weighting function is used to describe the manager's risk-aversion behavior. The supplier's state transition process is modeled by a two-state continuous-time Markov chain, and the long-run average cost function is constructed according to renewal reward theorems. It is proved that the negative cost function is a unimodal function and that there exists a uniquely optimal inventory order quantity. An approximation method along with an upper bound of the approximated cost function error is proposed which can give the analytic expression for the optimal order quantity. Numerical studies are presented to investigate the biases on optimal order quantities and system costs between risk-averse and risk-neutral managers. Also, with a sample size of 160 benchmark sets and 1 000 random sets, the validity of approximation method is illustrated.

**Key words:** supply disruption; inverse-S shaped weighting function; risk aversion; inventory

(上接第 35 页)

the key to implementing vendor managed inventory (VMI) strategy, that is, to coordinate the inventory problem and distribution problem in a stochastic demand environment. This paper studies the SDIRP based on the Fixed Partition Policy (FPP). Under this policy, customers are partitioned according to the service regions they are in, and customers who are in the same service region are served simultaneously. In this paper, a modified C-W saving algorithm is designed to partition customers, taking into account the impact of partition policy on inventory costs and distribution costs. It is shown that the optimal inventory policy for individual service region is a  $(s, S)$  policy, whereas the inventory policy for customers in each service region is an order-up-to policy. Furthermore, this paper proposes an algorithm to solve SDIRP based on FPP. Finally, a numerical example is presented to confirm the efficiency and applicability of the proposed algorithm.

**Key words:** SDIRP; FPP;  $(s, S)$  policy; order-up-to policy; modified C-W saving algorithm