

# 全链接分散化多阶段投资组合评价研究<sup>①</sup>

周忠宝<sup>1</sup>, 肖和录<sup>1</sup>, 任甜甜<sup>1</sup>, 马超群<sup>1</sup>, 刘文斌<sup>2, 1</sup>

(1. 湖南大学工商管理学院, 长沙 410082; 2. Business School, University of Kent, Kent CT2 7PE, 英国)

摘要: 现有多阶段分散化投资组合评价模型都是基于各阶段实际收益率来构建的, 然而由于投资组合在各阶段的联系主要体现在财富的动态变化过程中, 因此基于财富动态方程来构建多阶段投资组合评价模型更加符合实际. 本文基于投资组合与前沿面的距离, 给出多阶段投资组合效率的定义. 在均值-方差框架下, 基于财富过程构建不同导向下的全链接分散化多阶段投资组合评价模型, 利用动态规划方法得到投资组合效率的解析式. 最后, 通过数值仿真检验了传统多阶段分散化模型与本文所提出模型之间是存在显著差异的.

关键词: 多阶段投资组合; 全链接分散化; 绩效评价; 投资组合效率

中图分类号: F830.59 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2017)06-0089-12

## 0 引言

自 Markowitz<sup>[1]</sup> 提出均值-方差投资组合理论以来, 如何评价投资组合的绩效已经成为金融领域的研究热点. 目前常用的投资组合绩效评价方法主要有两类: 回归分析法与前沿面法.

常用的回归分析法主要包括单因素方法与多因素方法. Treynor<sup>[2]</sup>、Sharpe<sup>[3]</sup> 以及 Jensen<sup>[4]</sup> 基于资本资产定价模型 (CAPM) 理论, 通过考虑市场因素分别构建了特雷诺 (Treynor) 指数、夏普 (Sharpe) 指数和詹森 (Jensen) 指数三种单因素评价模型. 然而现实金融市场中却存在大量无法由单因素 CAPM 解释的异常现象, 如基金持有股票的规模、账面市值比、动量特征等均会影响其收益水平. 因此, 许多学者构建了多因素模型对投资组合的绩效进行评价, 其中最具代表性的是 Fama 和 French<sup>[5]</sup> 提出的三因素模型以及 Carhart<sup>[6]</sup> 提出的四因素模型. 虽然多因素模型能够在一定程度上弥补单因素模型的缺陷, 但是模型中因素数量选择仍存在争议, 且因素的选取对评价结果较

为敏感, 至今尚无统一的标准.

近年来, 许多学者开始重视采用前沿面方法来评价投资组合的绩效. 该方法基于投资组合真实前沿面, 将待评价投资组合投影到该前沿面上, 进而根据投资组合与投影点之间的距离来评价投资组合的绩效. 目前广泛运用的前沿面方法主要有两类, 第一类是数据包络分析 (data envelopment analysis, DEA). Murthi 等<sup>[7]</sup> 最早将该方法应用于投资组合绩效评价问题, 提出了无需基准、考虑多种交易费用的 DEA 模型. 其国内外相关研究见: 范宇和边馥萍<sup>[8]</sup>、Basso 和 Funari<sup>[9]</sup>、Chen 和 Lin<sup>[10]</sup>、Ding 等<sup>[11]</sup>, Liu 等<sup>[12]</sup> 以及周忠宝等<sup>[13-15]</sup>, Basso 和 Funari<sup>[16]</sup> 等. 虽然 DEA 模型计算简便, 但许多学者质疑此类评价模型能不能有效的表达投资组合分散风险的作用. 另一类是分散化评价方法 (diversification approach), 与 DEA 方法不同, 该方法充分考虑了投资组合对风险的分散作用, 近年来也得到了广泛关注. Briec 等<sup>[17]</sup> 在均值-方差准则下构建分散化效率评价模型, 并严格区分了投资组合效率和分配效率. Joro 和

① 收稿日期: 2014-10-09; 修订日期: 2017-02-14.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71371067; 71431008); 湖南省杰出青年科学基金资助项目 (2017JJ1012).

作者简介: 周忠宝 (1977-), 山东齐河人, 教授, 博士生导师. Email: z. b. zhou@163. com

Na<sup>[18]</sup>考虑了偏度对投资组合的影响,在均值-方差-偏度框架下建立单阶段分散化评价模型. Lozano 和 Gutierrez<sup>[19]</sup>在 Markowitz<sup>[1]</sup>的均值-方差框架下,基于随机占优理论构建了投资组合分散化评价模型. Zhao 等<sup>[20]</sup>将系统风险引入到分散化投资组合评价问题中,并利用中国基金数据检验了模型的有效性. Lamb 和 Tee<sup>[21]</sup>构建了多个收益指标和一致风险测度的分散化评价模型. Branda<sup>[22]</sup>推广了 Lamb 和 Tee<sup>[23]</sup>的结论,将一致风险测度替换为一般偏差测度,从而解决了负风险测度问题. Branda<sup>[24]</sup>基于方向距离函数构建了几类分散化模型,且允许投入、产出数据存在负值. Branda<sup>[25]</sup>在均值-VaR 框架下考虑了一类广义的分散化投资组合评价问题,其中包含机会约束、基数约束等投资情形.

上述研究都局限于对单阶段投资组合问题的评价,然而在实际应用中,多阶段投资更加常见,其国内外相关文献如: Li 和 Ng<sup>[26]</sup>、郭文旌和胡奇英<sup>[27]</sup>、Costa 和 Nabholz<sup>[28]</sup>等. 以基金绩效评价为例,如果仅将最后一期的表现作为评价该只基金的基准显然是不全面的,因此对其进行合理的评价需要综合考虑基金在各个时期的表现. 此外,由于多阶段投资之间是存在联系的,且投资者在各阶段的投资决策也是相互影响,因此在一般情况下是不能将其独立开来处理,同时这也是多阶段投资组合绩效评价的难点. 目前,已有文献多数是基于投资组合在各阶段的收益率来构建多阶段分散化模型,忽略了投资组合在各阶段之间的联系(财富动态过程). Morey 和 Morey<sup>[29]</sup>基于投资组合在各个阶段的收益率,提出了存在二次约束的多阶段分散化评价模型. Briec 和 Kerstens<sup>[30]</sup>拓展了 Morey 和 Morey<sup>[29]</sup>中的单向度量方式,确保对各阶段的收益和风险可以同时改进. Branda<sup>[22]</sup>等在均值-方差-高阶矩框架下,基于 Luenberger 生产率指标构建了多阶段分散化评价模型. 但是上述多阶段分散化评价模型的约束条件中并没有体现各阶段投资之间的动态财富联系,而仅仅是在目标函数中将各阶段效率加权平均来处理此类问题,因此在本质上并没有体现多阶段投资组合的动态性特征. 不难发现,已有分散化评价问题还只是停留在静态投资组合评价与 Morey 和 Morey<sup>[29]</sup>的研究框架下,鲜有研究者考

虑各投资阶段存在联系的分散化投资组合绩效评价问题. 尽管 Lin 等<sup>[32]</sup>基于方向距离函数构建了多阶段分散化模型,且通过基金在各阶段的单位净值来链接各个投资阶段,然而从本质上来讲,上述研究并没有考虑投资组合的财富累积对投资组合的绩效评价产生的影响.

本文首先从多阶段投资组合均值-方差模型出发,定义了多阶段投资组合的投资组合效率 (Portfolio efficiency, PE). 通过财富过程将各阶段投资过程充分联系起来,构建了不同导向下的完全链接分散化多阶段投资组合效率评价模型,利用动态规划原理求出投资组合效率的解析表达式. 最后,通过仿真分析阐述模型的可行性. 现有的多阶段投资组合评价问题都是基于投资组合的收益率来构建评价模型,忽略了财富累积过程对评价结果的影响. 本文从财富累积过程出发,结合投资组合在各阶段的绩效,给出投资组合总效率值的定义. 而且现有的多阶段投资组合评价模型大部分需要利用数值方法来求解,在解决大规模投资组合评价问题时,计算速度受到较大影响,而利用本文得到的多阶段投资组合效率的解析解在很大程度上避免了计算上的困难. 此外,相比于已有的多阶段投资组合评价模型,本文所提出的评价模型不仅能够对投资组合进行评价,而且还能够为投资者的策略改进提供建议.

## 1 多阶段投资组合效率定义及评价模型的构建

假定投资者在 0 时刻持有初始财富  $R_0$  进入投资市场,将其财富投资于  $n + 1$  种风险资产,投资期限为  $T$  阶段. 令  $e_t^i$  表示第  $t$  阶段第  $i$  个资产的随机收益率,各阶段收益率向量  $e_t = (e_t^0, e_t^1, \dots, e_t^n)$  满足阶段统计独立性; 记  $x_t = (x_t^0, x_t^1, \dots, x_t^n)$  其中  $x_t^i$  表示第  $t$  阶段投资在第  $i$  种资产上的权重,且满足  $\sum_{i=0}^n x_t^i = 1$ ;  $R_t$  为  $t$  阶段初投资者拥有的财富值,则此时投资组合的财富动态过程可以表示为  $R_{t+1} = R_t x_t^i e_t^i = R_t \sum_{i=0}^n x_t^i e_t^i$  其中  $i = 0, \dots, n, t = 0, 1, \dots, T - 1$ . 此外,假定对于所有的投资

阶段(  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  ),  $E(e_t e_t')$  为正定矩阵.

若在上述金融市场中 有  $m$  个待评价的投资组合, 令  $H_t^j$  表示第  $j$  个待评价投资组合在第  $t$  阶段初的财富值,  $E(H_t^j)$ ,  $Var(H_t^j)$  分别表示第  $j$  个待评价投资组合在第  $t$  阶段初财富的均值和方差, 其中  $j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T$ . 此外, 假定所有待评价投资组合的初始财富值都为  $R_0$ .

在单阶段投资组合绩效评价中, 通常是通过投资组合的有效前沿面来定义投资组合的 PE 值. 其主要的思路是将待评价投资组合投影到有效前沿面上, 从而根据投资组合与投影点的距离来定义投资组合的效率. 如图 1 所示, 横坐标、纵坐标分别表示表示在某一阶段投资后投资组合财富值的方差与期望, 曲线  $B_2 B_1$  是投资组合的有效前沿面,  $A$  表示待评价投资组合在该阶段的财富值的均值和方差,  $B_1, B_2$  则分别表示在风险导向与收益导向下, 待评价投资组合的均值与方差在前沿面上的投影点. 则该阶段投资组合在收益导向和风险导向的 PE 值可以分别定义为

$$\theta_t^{return} = \frac{E(H_t^0)}{E(R_t^1)}, \theta_t^{risk} = \frac{Var(R_t^1)}{Var(H_t^0)}$$

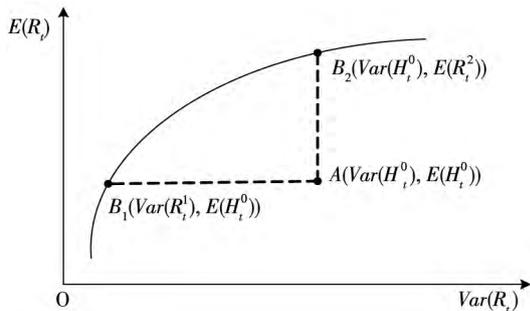


图 1 各阶段投资组合的效率  
Fig. 1 Portfolio efficiency at each period

基于投资组合在各阶段的效率值, 本文将各阶段 PE 值加权平均作为多阶段投资组合的总 PE 值, 并通过财富过程  $R_{t+1} = R_t x_t' e_t = R_t \sum_{i=1}^n x_t^i e_t^i$  将投资组合各阶段完全链接起来, 其中  $i = 0, \dots, n, t = 0, 1, \dots, T - 1$ .

由于已有的多阶段投资组合效率评价模型多数没有考虑阶段之间的联系, 且各个阶段之间的投资联系主要体现在财富的变化过程. 接下来, 本文根据上述多阶段投资组合效率值的定义, 充分考虑各阶段财富变化过程, 建立了不同导向下全

链接分散化多阶段投资组合效率评价模型.

1) 收益导向下的效率评价模型

$$\begin{cases} \max \sum_{t=1}^T p_t \varphi_t \\ \text{s. t. } Var(R_t) \leq Var(H_t^0) \quad t = 1, \dots, T \\ E(R_t) \geq \varphi_t E(H_t^0) \quad t = 1, \dots, T \\ R_{t+1} = R_t \sum_{i=0}^n x_t^i e_t^i, (\text{财富积累过程}) \\ \sum_{i=1}^n x_t^i = 1 \quad t = 0, 1, \dots, T - 1 \end{cases} \quad (1)$$

2) 风险导向下的效率评价模型

$$\begin{cases} \min \sum_{t=1}^T p_t \theta_t \\ \text{s. t. } Var(R_t) \leq \theta_t Var(H_t^0) \quad t = 1, \dots, T \\ E(R_t) \geq E(H_t^0) \quad t = 1, \dots, T \\ R_{t+1} = R_t \sum_{i=0}^n x_t^i e_t^i, (\text{财富积累过程}) \\ \sum_{i=1}^n x_t^i = 1 \quad t = 0, 1, \dots, T - 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $p_t$  表示各阶段效率值在投资组合总体评价中所占有的权重, 且满足  $\sum_{t=1}^T p_t = 1$ .

上述模型是非线性随机规划模型, 求解较为困难. 本文基于 Li 和 Ng<sup>[26]</sup> 的求解思路, 运用动态规划原理对上述问题进行求解.

## 2 多阶段投资组合效率的求解

为了方便起见, 本文不妨将待评价投资组合在各阶段初财富值的期望与方差分别记为  $Var(H_t^0) = \sigma_t, E(H_t^0) = d_t$ , 其中  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ , 故有如下的结论成立

$$\begin{pmatrix} E(e_t^0)^2 & E(e_t^0 P_t) \\ E(e_t^0 P_t) & E(P_t P_t) \end{pmatrix} > 0 \quad (3)$$

$$E(P_t P_t) > 0 \quad (4)$$

以及

$$E(e_t^0)^2 - E(e_t^0 P_t) E^{-1}(P_t P_t) E(e_t^0 P_t) > 0 \quad (5)$$

其中

$$P_t = [(e_t^1 - e_t^0) \ (e_t^2 - e_t^0) \ \dots \ (e_t^n - e_t^0)]', \quad t = 0, 1, \dots, T - 1.$$

不难发现, 模型(1)中约束条件  $E(R_t) \geq \varphi_t d_t$  可

以转化为  $E(R_t)/d_t \geq \varphi_t$  故极大化目标函数  $\varphi_t$  等价  
 为求  $E(R_t)/d_t$  的最大值,其中  $d_t$  为已知量.同理当  
 考虑风险导向下的多阶段评价模型(2)时,极小  $\theta_t$   
 等价求解  $Var(R_t)/\sigma_t$  的最小值.根据上述转换方  
 式,易知模型(1)、模型(2)可以分别等价

$$(PE(\sigma)) \begin{cases} \max \sum_{t=1}^T (p_t/d_t) E(R_t) \\ \text{s. t. } \text{var}(R_t) \leq \sigma_t, t = 1, \dots, T \\ R_{t+1} = R_t(P_t x_t + e_t^0), \\ t = 0, 1, \dots, T-1 \end{cases} \quad (6)$$

以及

$$(PV(d)) \begin{cases} \min \sum_{t=1}^T (p_t/\sigma_t) Var(R_t) \\ \text{s. t. } E(R_t) \geq d_t, t = 1, \dots, T \\ R_{t+1} = R_t(P_t x_t + e_t^0), \\ t = 0, 1, \dots, T-1 \end{cases} \quad (7)$$

记

$$w_t = \begin{cases} p_t/d_t, w_t \in (PV(d)) \\ p_t/\sigma_t, w_t \in (PE(\sigma)) \end{cases} \quad (8)$$

则问题(6)与问题(7)可以统一等价如下  
 优化问题.

$$(PMV(a, b)) : \begin{cases} \max_{\pi} \sum_{t=1}^T w_t [a_t E(R_t) - b_t Var(R_t)] \\ \text{s. t. } R_{t+1} = R_t(P_t x_t + e_t^0), t = 0, 1, \dots, T-1 \end{cases} \quad (9)$$

由于方差不满足平滑性,这也导致等价问题  
 (9)不具有时间一致性,也就是说,本文不能直接  
 运用动态规划方法对问题(9)进行求解.为了解  
 决这个问题, Li 和 Ng<sup>[26]</sup>构造了与原问题对应的  
 辅助问题,并利用动态规划得到了辅助问题的最  
 优解,进而通过原问题与辅助问题最优解的关系  
 求出原问题的最优解.借鉴 Li 和 Ng<sup>[26]</sup>的思路,本  
 文将优化问题(9)的求解分为如下三个步骤:

步骤1 构造问题(9)的辅助问题,并找出辅  
 助问题与原问题的关系;

步骤2 通过动态规划方法求解所构造的辅  
 助问题的最优策略;

步骤3 根据辅助问题与原问题的关系求解

原问题的最优策略.

根据上述求解步骤,类似于 Li 和 Ng<sup>[26]</sup>中构  
 造辅助问题的方法,首先考虑如下的辅助问题

$$(A(\lambda, b)) : \begin{cases} \max \sum_{t=1}^T w_t [\lambda_t E(R_t) - b_t E(R_t^2)] \\ \text{s. t. } R_{t+1} = R_t(P_t x_t + e_t^0), \\ t = 0, 1, \dots, T-1 \end{cases} \quad (10)$$

此处,不妨记问题  $(A(\lambda, b))$  与问题  
 $(PMV(a, b))$  的最优解的集合分别为  $\Pi_A(\lambda, b)$ ,  
 $\Pi_P(a, b)$  其中

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T]^T$$

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_T]^T$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_T]^T$$

接下来,本文定义如下的目标函数

$$\begin{aligned} U(E(R_1), E(R_1^2), \dots, E(R_T), E(R_T^2)) \\ = \sum_{t=1}^T w_t [a_t E(R_t) - b_t Var(R_t)] \\ = \sum_{t=1}^T w_t [a_t E(R_t) - b_t (E(R_t^2) - E^2(R_t))] \end{aligned} \quad (11)$$

显然,  $U$  是关于  $E(R_1), \dots, E(R_T)$  以及  
 $E(R_1^2), \dots, E(R_T^2)$  的凹函数.此外,记

$$d(\pi, a, b) = [d_1(\pi, a, b), \dots, d_T(\pi, a, b)]^T \quad (12)$$

其中

$$d_t(\pi, a, b) = \frac{\partial U}{\partial E(R_t)} = a_t + 2b_t E(R_t), t = 1, \dots, T.$$

根据文献 Li 和 Ng<sup>[26]</sup>中定理1与定理2,易  
 得如下两个命题.

命题1 若  $\pi^* \in \Pi_P(a, b)$ , 则  $\pi^* \in \Pi_A(d(\pi^*, a, b), b)$ .

命题2 令  $\pi^* \in \Pi_A(\lambda^*, b)$ , 则  $\pi^* \in \Pi_P(a, b)$  的必要条件是  $\lambda^* = d(\pi^*, a, b)$ .

由命题1不难发现原问题  $(PMV(a, b))$  的  
 最优策略集合是辅助问题  $(A(\lambda, b))$  最优策略  
 集合的子集.因此,本文可以求解辅助问题  
 $(A(\lambda, b))$ , 然后通过找出原问题与辅助问题的  
 联系,从而实现原问题的求解.此外,命题2为确  
 保辅助问题  $(A(\lambda, b))$  的最优解是原问题

( $PMV(a, b)$ ) 的最优解提供了一个必要条件.

基于命题 1 ~ 命题 2, 则可以进行如下第二个步骤. 上述两个命题主要体现了辅助问题与原问题之间的关系, 因此原问题的最优投资策略可以通过求解辅助问题而获得. 接下来的工作主要是求解辅助问题(10), 当  $0 \leq \tau \leq T$  时, 从  $\tau$  时刻开始定义辅助问题的最优值函数:

$$\begin{aligned} & (A(\lambda, b, \tau, x_\tau)) : J(\tau, x_\tau) \\ & = \max \sum_{t=\tau}^T w_t [\lambda_t E(R_t) - b_t E(R_t^2) | F_\tau] \end{aligned} \quad (13)$$

为了计算方便, 定义如下记号 ( $t = 0, 1, \dots, T - 1$ ):

$$\begin{aligned} B_t &= E(P_t) E^{-1}(P_t P_t) E(P_t), \\ A_t^1 &= E(e_t^0) - E(P_t) E^{-1}(P_t P_t) E(e_t^0 P_t), \\ A_t^2 &= E(e_t^0)^2 - E(e_t^0 P_t) E^{-1}(P_t P_t) E(e_t^0 P_t), \\ \Gamma_1(s, t) &= \prod_{k=s}^t A_k^1, \quad \Gamma_2(s, t) = \prod_{k=s}^t A_k^2. \end{aligned}$$

由于辅助问题的目标函数满足时间一致性, 也就是说, 它可以直接通过动态规划方法进行求解. 利用动态规划原理求解, 可以得到如下结论.

**命题 3** 目标函数  $J(\tau, x_\tau)$  的表达式可以表示为

$$J(\tau, R_\tau) = -\alpha_\tau R_\tau^2 + \beta_\tau R_\tau + \gamma_\tau \quad (14)$$

最优策略为

$$\begin{aligned} x_\tau &= E^{-1}(P_\tau P_\tau) \left[ \frac{\beta_{\tau+1}}{2\alpha_{\tau+1} R_\tau} E(P_\tau) - \right. \\ & \quad \left. E(e_\tau^0 P_\tau) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_\tau &= (w_\tau b_\tau + \alpha_{\tau+1} E(e_t^0)^2 - \\ & \quad \alpha_{\tau+1} E(e_t^0 P_\tau) E^{-1}(P_\tau P_\tau) E(e_t^0 P_\tau)) \\ \beta_\tau &= (w_\tau \lambda_\tau + \beta_{\tau+1} E(e_t^0) - \\ & \quad \beta_{\tau+1} E(P_\tau) E^{-1}(P_\tau P_\tau) E(e_t^0 P_\tau)) \\ \gamma_\tau &= (\gamma_{\tau+1} + \frac{\beta_{\tau+1}^2}{4\alpha_{\tau+1}} E(P_\tau) E^{-1}(P_\tau P_\tau) E(P_\tau)) \end{aligned} \quad (16)$$

证明 当  $\tau = T$  时, 则有

$$\begin{aligned} J(T, R_T) &= -w_T b_T R_T^2 + w_T \lambda_T R_T + 0 \\ &= -\alpha_T R_T^2 + \beta_T R_T + \gamma_T \end{aligned}$$

易知, 当  $\tau = T$  时, 最优价值函数满足式

(14). 假定  $\tau + 1$  时式(14)成立, 根据目标函数的定义可得

$$J(\tau, R_\tau) = -w_\tau b_\tau R_\tau^2 + w_\tau \lambda_\tau R_\tau + \max_{x_\tau} \{ E(J(\tau + 1, R_{\tau+1}) | F_\tau) \}$$

又因为财富过程的转移方程为  $R_{\tau+1} = R_\tau(P_\tau x_\tau + e_\tau^0)$ , 则上式通过化简可得

$$\begin{aligned} J(\tau, R_\tau) &= -[\alpha_{\tau+1} E(e_t^0)^2 + w_\tau b_\tau] R_\tau^2 + \\ & \quad [\beta_{\tau+1} E(e_t^0) + w_\tau \lambda_\tau] R_\tau + \\ & \quad \gamma_{\tau+1} + \max_{x_\tau} f(x_\tau) \end{aligned}$$

其中  $f(x_\tau)$  定义为

$$\begin{aligned} f(x_\tau) &= -2\alpha_{\tau+1} E(e_t^0 P_\tau) R_\tau^2 x_\tau - \\ & \quad \alpha_{\tau+1} R_\tau^2 x_\tau E(P_\tau P_\tau) x_\tau + \\ & \quad \beta_{\tau+1} E(P_\tau) R_\tau x_\tau \end{aligned} \quad (17)$$

根据式(17)可得最优投资比例为

$$x_\tau = E^{-1}(P_\tau P_\tau) \left[ \frac{\beta_{\tau+1}}{2\alpha_{\tau+1} R_\tau} E(P_\tau) - E(e_t^0 P_\tau) \right]$$

以及

$$\begin{aligned} J(\tau, R_\tau) &= -[w_\tau b_\tau + \alpha_{\tau+1} E(e_t^0)^2 - \\ & \quad \alpha_{\tau+1} E(e_t^0 P_\tau) E^{-1}(P_\tau P_\tau) E(e_t^0 P_\tau)] R_\tau^2 + \\ & \quad [w_\tau \lambda_\tau + \beta_{\tau+1} E(e_t^0) - \\ & \quad \beta_{\tau+1} E(P_\tau) E^{-1}(P_\tau P_\tau) E(e_t^0 P_\tau)] R_\tau + \\ & \quad [\gamma_{\tau+1} + \frac{\beta_{\tau+1}^2}{4\alpha_{\tau+1}} E(P_\tau) E^{-1}(P_\tau P_\tau) E(P_\tau)] \\ & = -\alpha_\tau R_\tau^2 + \beta_\tau R_\tau + \gamma_\tau \end{aligned} \quad (18)$$

此时可得  $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$  之间的迭代关系式, 从而命题 3 得证. 证毕

根据命题 3 将辅助问题的最优策略(15)代入财富状态转移方程  $R_{t+1} = R_t(P_t x_t + e_t^0)$  中可以得到如下结论:

$$\begin{aligned} E(R_{t+1}) &= A_t^1 E(R_t) + \frac{\beta_{t+1}}{2\alpha_{t+1}} B \\ E(R_{t+1}^2) &= A_t^2 E(R_t^2) + \frac{\beta_{t+1}^2}{4\alpha_{t+1}^2} B \end{aligned} \quad (19)$$

通过迭代关系式(19)可以求得

$$\begin{aligned} E(R_t) &= \Gamma_1(0, t-1) R_0 + \\ & \quad \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}}{2\alpha_{k+1}} B_k \\ E(R_t^2) &= \Gamma_2(0, t-1) R_0^2 + \\ & \quad \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_2(k+1, t-1) \left( \frac{\beta_{k+1}}{2\alpha_{k+1}} \right)^2 B_k \end{aligned} \quad (20)$$

由式(20)可知,方程组(20)中的未知参数只有  $\beta_t, t = 0, 1, \dots, T - 1$  与  $\lambda$  有关,根据命题1~命题2可知,要得到原问题的最优财富过程,只需在式(20)的基础上求出相应的最优值  $\beta_t^*, t = 0, 1, \dots, T - 1$ . 基于命题1~命题3,则可以进行如下第三个步骤,从而可得到如下结论.

**定理1** 在不同导向下,待评价投资组合的效率值如下所示:

1) 收益导向下投资组合效率值可以表示为

$$\theta_t^{return} = \frac{d_t}{\left( \Gamma_1(0, t-1) R_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} B_k \right)} \quad (21)$$

其中  $t = 1, \dots, T$ , 且上述参数满足如下的迭代关系式

$$\begin{cases} E(R_{\tau+1}) = A_\tau^1 E(R_\tau) + \frac{\beta_{\tau+1}^*}{2\alpha_{\tau+1}} B_\tau, \\ \tau = 0, 1, \dots, T-1 \\ E^2(R_{\tau+1}) + \sigma_{\tau+1} = A_\tau^2 (E^2(R_\tau) + \sigma_\tau) + \frac{\beta_{\tau+1}^{*2}}{4\alpha_{\tau+1}^2} B_\tau, \tau = 0, 1, \dots, T-1 \\ \alpha_\tau = \sum_{i=\tau}^T \left( \frac{p_i}{d_i} b_i \prod_{s=\tau}^{i-1} A_s^2 \right), \tau = 1, \dots, T \\ \beta_\tau^* = \sum_{i=\tau}^T \left( \frac{p_i}{d_i} (1 + 2b_i E(R_i)) \prod_{s=\tau}^{i-1} A_s^1 \right), \\ \tau = 1, \dots, T \end{cases} \quad (22)$$

2) 风险导向下投资组合效率值可以表示为

$$\theta_t^{risk} = \frac{\left( \Gamma_2(0, t-1) R_0^2 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_2(k+1, t-1) \left( \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} \right)^2 B_k \right)}{\sigma_t} - \frac{\left( \Gamma_1(0, t-1) R_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} B_k \right)}{\sigma_t} \quad (23)$$

其中  $t = 1, \dots, T$ , 且相应参数满足如下条件

$$\begin{cases} d_{\tau+1} = A_\tau^1 d_\tau + \frac{\beta_{\tau+1}^*}{2\alpha_{\tau+1}} B_\tau, \tau = 0, 1, \dots, T-1 \\ \alpha_\tau = \sum_{i=\tau}^T \left( \frac{p_i}{\sigma_i} \prod_{s=\tau}^{i-1} A_s^2 \right), \tau = 0, 1, \dots, T \\ \beta_\tau^* = \sum_{i=\tau}^T \left( \frac{p_i}{\sigma_i} (a_i + 2d_i) \prod_{s=\tau}^{i-1} A_s^1 \right), \\ \tau = 0, 1, \dots, T \end{cases} \quad (24)$$

**证明** 根据辅助问题与原问题的关系,则可以得到原问题的最优策略. 由命题1~命题3,可证明定理1,具体过程如下:

首先考虑收益导向下投资组合效率评价模型,由问题  $PE(\sigma)$  的表达式的形式可知,对应等价问题  $(PMV(a, b))$  中  $a_i$  的值为1,由文献Costa和Nabholz<sup>[28]</sup>中的命题6.1可知:如果最优投资策略  $\pi \in \Pi_p(a, b)$ ,且满足如下的条件  $Var(R_t) = \sigma_t$ ,那么  $\pi \in \Pi(PE(\sigma))$  成立.因此本文只需求出  $b_t$  的值.根据式(20)以及命题1、命题2可以得到

$$\begin{cases} E(R_{t+1}) = A_t^1 E(R_t) + \frac{\beta_{t+1}^*}{2\alpha_{t+1}} B_t \\ E^2(R_{t+1}) + \sigma_{t+1} = A_t^2 (E^2(R_t) + \sigma_t) + \frac{\beta_{t+1}^{*2}}{4\alpha_{t+1}^2} B_t \\ \alpha_t = \sum_{i=t}^T (w_i b_i \prod_{s=t}^{i-1} A_s^2) \\ \beta_t^* = \sum_{i=t}^T (w_i (1 + 2b_i E(R_i)) \prod_{s=t}^{i-1} A_s^1) \end{cases} \quad (25)$$

由方程组(25)的具体表达式可知,本文必须同时求出变量  $E(R_t), b_t, \alpha_t, \beta_t^*$  的值,但是由于式(25)为非线性方程组,因此不能保证方程组对所有的参数都存在解.若方程组(25)存在唯一解时,则可以得到最优投资策略以及最优目标函数值的具体表达式.假若上述方程组有解,此时则可求得待评价投资组合在各阶段的效率值.根据收益导向下效率值的定义可知

$$\theta_t^{return} = \frac{E(H_t^0)}{E(R_t)} = \frac{d_t}{E(R_t)}$$

此外,由于

$$E(R_t) = \Gamma_1(0, t-1) R_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} B_k$$

则有

$$\theta_t^{return} = \frac{d_t}{\left( \Gamma_1(0, t-1) R_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} B_k \right)} \quad (26)$$

其中  $E(R_t)$ ,  $\alpha_t$ ,  $\beta_t^*$ ,  $b_t$  满足式(25).

其次, 考虑风险导向下投资组合效率评价模型, 由问题  $PV(d)$  的表达式的形式可知, 对应等价问题  $(PMV(a, b))$  中  $b_t$  的值为 1. 同理, 根据文献 Costa 和 Nabholz<sup>[28]</sup> 中命题 5.1 的结论可知: 如果最优投资策略  $\pi \in \Pi_P(a, b)$ , 且满足如下的条件:  $E(R_t) = d_t$ , 那么  $\pi \in \Pi(PV(d))$  成立. 因此本文只需求出  $a_t$  的值. 根据式(20) 则可以得到

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= A_t^1 d_t + \frac{\beta_{t+1}^*}{2\alpha_{t+1}} B_t \\ \alpha_t &= \sum_{i=t}^T (w_i \prod_{s=t}^{i-1} A_s^2) \\ \beta_t^* &= \sum_{i=t}^T [w_i (a_i + 2d_i) \prod_{s=t}^{i-1} A_s^1] \end{aligned} \quad (27)$$

由上述迭代关系式可以求出  $a_t$  的值, 则最优投资策略以及最优目标函数都可以求得. 根据风险导向下效率值的定义则有

$$\theta_t^{risk} = \frac{Var(R_t)}{Var(H_t^0)} = \frac{Var(R_t)}{\sigma_t}$$

则风险导向下投资组合效率值可以表示为

$$\theta_t^{risk} = \frac{\left( \Gamma_2(0, t-1) R_0^2 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_2(k+1, t-1) \left( \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} \right)^2 B_k \right)}{\sigma_t} - \frac{\left( \Gamma_1(0, t-1) R_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} B_k \right)}{\sigma_t} \quad (28)$$

其中  $\alpha_t$ ,  $\beta_t^*$ ,  $a_t$  满足式(27), 故定理 1 得证.

证毕.

定理 1 主要阐述了待评价投资组合在不同导向、不同阶段下效率值的精确表达式. 对于任意待评价投资组合, 都可计算出它在每一阶段末财富值的期望与方差  $d_t$ ,  $\sigma_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ . 根据定理 1 中的结论, 将  $d_t$ ,  $\sigma_t$  分别代入式(21) 与式(23), 则可得投资组合在每一阶段的效率值以及总效率

值. 在收益导向下, 投资组合中间阶段效率值  $\theta_t^{return}$  表示待评价投资组合与前沿面投影点之间的一个距离度量, 其分子  $d_t$  表示在第  $t$  阶段末待评价投资组合的实际期望财富值, 而分母

$$E(R_t^*) = \Gamma_1(0, t-1) R_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} B_k$$

则表示在给定的风险水平  $\sigma_t$  下, 投资者可达到的理想期望财富值, 且满足  $E(R_t^*) \geq d_t$ . 若  $E(R_t^*) = d_t$ , 则表示投资组合在该阶段的效率值为 1, 投资者在此阶段无需再调整投资策略; 若  $E(R_t^*) > d_t$ , 则表示投资组合在该阶段还可以通过调整投资策略  $x_t$  来增加投资的期望收益, 从而达到理想期望财富值  $E(R_t^*)$ . 同理在风险导向下, 中间阶段效率值  $\theta_t^{risk}$  的分子

$$\begin{aligned} Var(R_t^*) &= \Gamma_2(0, t-1) R_0^2 + \\ &\sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_2(k+1, t-1) \left( \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} \right)^2 B_k - \\ &\sum_{k=0}^{t-1} \Gamma_1(k+1, t-1) \frac{\beta_{k+1}^*}{2\alpha_{k+1}} B_k - \\ &\Gamma_1(0, t-1) R_0 \end{aligned}$$

表示在给定的收益水平  $d_t$  下, 待评价投资组合所能够降低风险的最低值, 其中  $Var(R_t^*) \leq \sigma_t$ . 若  $Var(R_t^*) = \sigma_t$ , 则称该待评价投资组合在该阶段的效率值为 1, 投资者在此阶段无需再调整投资策略; 若  $Var(R_t^*) < \sigma_t$ , 则表明该投资组合还可以通过调整投资策略  $x_t$ , 使其风险降低到理想值  $Var(R_t^*)$ . 此外, 由定理 1 中待评价投资组合效率值的表达式可知, 它的大小很大程度上依赖于待评价投资组合在各阶段的收益、风险以及资产收益率的特征, 也就是说投资组合的各阶段是相互联系的, 因此在实际评价中应该考虑财富累积过程对投资组合绩效的影响.

接下来, 本文将通过数值仿真来比较分析全链接评价模型与无链接模型以及加权效率与末端效率作为投资组合总效率值之间的差异.

### 3 仿真分析

参考 Li 和 Ng<sup>[26]</sup> 的研究数据, 本文假定投资者的初始财富  $R_0 = 1$ , 并假设证券市场上有三种

资产,资产在各阶段的期望收益率向量和协方差矩阵如下所示:

$$E(e_t) = [1.162, 1.246, 1.228]$$

$$Cov(e_t) = \begin{pmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{pmatrix}$$

其中  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ .

不妨假定投资期限  $T = 3$ ,且在每阶段各随机产生满足求和为 1 的 100 组投资比例,若每阶段投资比例一一对应,此时上述投资比例构成 100 个投资组合.通过计算可得上述 100 个投资组合在各阶段初的累积财富的期望、方差,以及在无财富链接条件下各投资组合收益率在各阶段的期望与方差.其具体数据见表 1、表 2.

表 1 财富链接条件下待评价投资组合在各阶段末财富的期望与方差

Table 1 The variances and expectations of portfolio wealth at each period with wealth link conditions

组合编号	第一阶段		第二阶段		第三阶段	
	期望	方差	期望	方差	期望	方差
A1	1.496 3	0.814 7	1.555 3	1.721 1	1.958 8	3.028 4
A2	0.864 3	1.005 5	1.190 3	2.551 7	1.423 3	3.875 4
A3	1.416 2	0.596 7	1.814 2	1.153 5	1.923 5	2.266 8
A4	1.265 1	0.055 9	1.446 3	0.120 5	2.184 3	0.817 1
A5	1.551 6	0.352 7	1.822 1	0.628 2	2.304 5	1.156 5
...	...	...	...	...	...	...
A99	1.301 7	0.214 3	1.544 2	2.634 3	2.032 9	7.557 0
A100	1.527 9	0.278 4	1.823 5	1.567 2	2.230 2	2.530 4

表 2 无财富链接条件下待评价投资组合收益率在各阶段末的期望与方差

Table 2 The variances and expectations of portfolio interest at each period without wealth link conditions

组合编号	第一阶段		第二阶段		第三阶段	
	期望	方差	期望	方差	期望	方差
A1	1.496 3	0.814 7	1.039 5	0.275 3	1.259 4	0.072 1
A2	0.864 3	1.005 5	1.377 1	0.368 0	1.195 8	0.057 2
A3	1.416 2	0.596 7	1.281 1	0.066 9	1.060 3	0.218 3
A4	1.265 1	0.055 9	1.143 2	0.028 6	1.510 3	0.245 2
A5	1.551 6	0.352 7	1.174 3	0.051 4	1.264 8	0.038 4
...	...	...	...	...	...	...
A99	1.301 7	0.214 3	1.186 3	1.222 1	1.316 5	0.596 0
A100	1.527 9	0.278 4	1.193 4	0.448 0	1.223 1	0.038 0

根据模型 (1-2) 的表达式,假定模型中  $d_t$ ,  $\sigma_t$  取值于上述仿真点在各阶段财富收益的期望与方差,其中  $t = 1, 2, 3$ . 根据定理 1 的结论,可以得到 100 组投资组合基于收益导向、风险导向,以及有、无财富链接条件下的效率值(见表 3).

表 3 不同导向、不同模型下待评价投资组合效率值 ( $p = [1/6, 1/3, 1/2]$ )

Table 3 The portfolio efficiencies under different orientations and models ( $p = [1/6, 1/3, 1/2]$ )

组合编号	收益导向下效率值		风险导向下效率值	
	有链接条件下	无链接条件下	有链接条件下	无链接条件下
A1	0.556 0	0.833 8	0.154 9	0.301 6
A2	0.359 5	0.811 1	0.084 6	0.249 5
A3	0.629 2	0.809 8	0.160 4	0.287 8
A4	0.880 9	0.966 2	0.602 5	0.772 1
A5	0.804 9	0.962 4	0.463 4	0.714 0
...	...	...	...	...
A99	0.528 2	0.815 1	0.065 2	0.098 1
A100	0.691 9	0.890 9	0.279 4	0.473 6

根据表 3 中的评价结果, 则可知投资组合在给定权重下的效率值的相关系数, 其具体结果如表 4 所示.

由待评价投资组合在有、无财富链接条件下所得效率值的相关系数可知, 上述两种情况所得投资组合总效率值的相关性并不是很高. 换言之,

这二者是存在差异性的, 说明财富的累积对投资组合的绩效评价会产生较大的影响. 为了进一步检验有链接条件与无链接条件模型所得评价结果是否存在显著性差异, 本文采用秩和检验方法对上述评价结果进行检验. 其具体结果如表 5 所示.

表 4 不同模型、不同导向下投资组合效率值的相关系数

Table 4 The correlation coefficients of portfolio efficiencies under different models and orientations

收益导向下			风险导向下		
相关系数	Case1	Case 2	相关系数	Case1	Case 2
Case 1	1.000 0	0.633 9	Case 1	1.000 0	0.546 3
Case 2	0.633 9	1.000 0	Case 2	0.546 3	1.000 0

注: 表 4 中 Case 1 表示有链接条件, Case 2 表示无链接条件.

表 5 不同模型、不同导向下投资组合效率值的秩和检验 P-值

Table 5 P-values of Wilcoxon rank-sum test of portfolio efficiencies under different models and orientations

P-值	投资组合效率值秩和检验的 P-值				
	收益导向下		风险导向下		
	Case 1	Case 2	P-值	Case1	Case 2
Case 1	1.000 0**	0.000 0	Case 1	1.000 0**	0.000 0
Case 2	0.000 0	1.000 0**	Case 2	0.000 0	1.000 0**

注: 表 5 中 Case 1 表示有链接条件, Case 2 表示无链接条件; \*\* 表示在 5% 显著性水平下显著.

表 5 展示了待评价投资组合在不同评价模型下的效率值的秩和检验 P-值. 不难发现, 在 5% 的显著水平下, 秩和检验结果接受上述两种模型所得效率值是存在显著差异的假设, 这也说明本文考虑的全链接投资组合模型是很有必要的.

接下来, 本文将主要分析投资组合的总绩效是否会受投资组合中间效率值的影响. 根据模型

(1-2) 的表达式, 假定模型中  $d_t, \sigma_t$  取值于上述仿真点在各阶段财富收益的期望与方差, 其中  $t = 1, 2, 3$ . 根据定理 1, 则可以得到 100 组投资组合在不同导向、不同权重下的总效率值. 不同权重  $p$  下各待评价投资组合的效率值、效率值的相关系数以及秩和检验结果分别如表 6、表 7 和表 8 所示.

表 6 不同导向、不同权重下投资组合的效率值

Table 6 The portfolio efficiencies under different orientations and weights

组合编号	收益导向下			风险导向下		
	Case 3	Case4	Case5	Case 3	Case4	Case5
A1	0.456 5	0.614 4	0.556 0	0.044 7	0.183 0	0.154 9
A2	0.305 1	0.383 2	0.359 5	0.013 8	0.102 7	0.084 6
A3	0.492 4	0.680 9	0.629 2	0.054 4	0.178 5	0.160 4
A4	0.750 7	0.898 9	0.880 9	0.287 7	0.598 0	0.602 5
A5	0.721 1	0.844 7	0.804 9	0.262 8	0.550 2	0.463 4
...	...	...	...	...	...	...
A99	0.342 3	0.606 3	0.528 2	0.021 7	0.102 2	0.065 2
A100	0.551 2	0.759 6	0.691 9	0.102 8	0.418 3	0.279 4

注: 表 8 中 Case 3 表示  $p = [0, 0, 1]$ , Case 4 表示  $p = [1/3, 1/3, 1/3]$ , Case 5 表示  $p = [1/6, 1/3, 1/2]$ .

表7 不同权重、不同导向下效率值的相关系数

Table 7 The correlation coefficients of portfolio efficiencies under different weights and orientations

收益导向下				风险导向下			
相关系数	Case 3	Case 4	Case 5	相关系数	Case 3	Case 4	Case 5
Case 3	1.000 0	0.986 1	0.881 6	Case 3	1.000 0	0.970 9	0.725 2
Case 4	0.881 6	1.000 0	0.813 9	Case 4	0.970 9	1.000 0	0.629 0
Case 5	0.881 6	0.813 9	1.000 0	Case 5	0.725 2	0.629 0	1.000 0

表8 不同权重、不同导向下效率值的秩和检验 P-值

Table 8 P-values of Wilcoxon rank-sum test of portfolio efficiencies under different weights and orientations

收益导向下				风险导向下			
P-值	Case 3	Case 4	Case 5	P-值	Case 3	Case 4	Case 5
Case 3	1.000 0**	0.006 4	0.000 0	Case 3	1.000 0**	0.132 6**	0.000 0
Case 4	0.006 4	1.000 0**	0.000 0	Case 4	0.132 6**	1.000 0	0.000 0
Case 5	0.000 0	0.000 0	1.000 0**	Case 5	0.000 0	0.000 0	1.000 0**

注: \*\*表示在5%显著性水平下显著.

如表6所示,当投资组合在各阶段的效率值的权重  $p$  取不同值时,根据定理3.1中的投资组合效率值的解析表达式,则可以得到待评价投资组合在不同权重  $p$  下的效率值.由表6不难发现,在不同权重  $p$  下,相应投资组合的效率值是存在差异性的.直观上讲,权重  $p$  的选取会对评价结果产生影响.为了进一步验证权重  $p$  的选取是否对评价结果具有显著影响,进而解释上述评价结果出现差异性的原因,本文将通过相关系数和秩和检验方法对表6中的评价结果进行统计分析,其主要内容见表7和表8.

相关系数作为评判两组数据是否存在差异的一种简单方法,其被广泛应用于投资组合评价结果的比较中,如Ding等<sup>[11]</sup>,Liu等<sup>[12]</sup>以及Branda<sup>[23]</sup>等.而在上述文献的结论中,若两组评价结果的相关系数在0.9以上,则通常将其视为高度相关.由表6中的评价结果,可以得到不同导向、不同权重下的效率值的相关系数,如表7所示.由表7可知,当投资组合在各阶段取不同权重时,投资组合效率值的相关系数在某些情况下并不是很高,如:Case 3与Case 5以及Case 4与Case 5.因此,从相关系数的角度而言,权重  $p$  的选取对评价结果会产生一定的影响,进一步在统计意义上验证了表6所得结论.

此外,由于相关系数只是一种判断两组数据是否存在差异的粗略方法,为了进一步说明表6所得结论的合理性,接下来,本文将采用秩和检验方法进一步检验权重  $p$  的选取是否会对评价结果

产生显著性影响.如表8所示,当  $p$  取值于上述三种情形时,在收益导向下,秩和检验结果在5%的显著性水平下接受上述三种情形所得效率值是存在显著差异的假设;在风险导向下,尽管Case 3、Case 4两种情形所得秩和检验结果在5%的显著性水平下拒绝两者存在显著差异的假设,然而Case 3、Case 4所得效率值却与Case 5所得效率值在5%的显著性水平下存在显著差异.总体来讲,权重的选取会对投资组合的总效率值产生显著性的影响,这也说明投资组合中间阶段效率值在很大程度上会影响投资组合的总体评价结果.此外,由于本文的仿真只选取了投资期限  $T = 3$ ,而当投资的期限  $T$  较大时,投资组合中间阶段的效率值则更为重要,因此投资组合中间阶段的效率值在其总体评价中的作用是不可忽视的.

综上所述,对于投资者来讲,不同的权重值  $p$  则反映了投资者对投资组合在各阶段绩效的偏好程度,权重越大则表示投资者对投资组合在该阶段的绩效越关注.而且在不同的权重值下,该投资组合在前沿面上的投影点也是互不相同的,这也导致投资组合的效率值发生变化,如:  $p = [0, 0, 1]$  则表明投资者只关注投资组合的终端绩效,不考虑投资组合在中间阶段的表现.上述原因也导致表6中待评价投资组合的总效率值在不同权重下的总效率值会有显著差异.

### 4 结束语

本文首先将单阶段投资组合效率的定义推广

到多阶段投资组合的情形,区别于已有的多阶段投资组合评价研究,本文从投资组合的累积财富过程出发构造评价模型,通过综合考虑财富变化过程和分散化风险,构建了不同导向下的全链接分散化多阶段投资组合效率评价模型,通过动态规划原理得到了各阶段效率值和总效率的解析表达式,并通过仿真分析说明了模型和方法的可行

性,并与无链接多阶段投资组合效率评价结果进行了比较分析,结果表明考虑财富变化过程对多阶段投资组合评价产生较大的影响.本文的研究可以拓展到有市场摩擦的情形,这不仅对于多阶段投资组合(基金)绩效评价有理论意义,而且可以为投资者改进投资组合提供相应的建议,具有实际经济意义.

#### 参考文献:

- [1]Markowitz H. Portfolio selection[J]. *The Journal of Finance*, 1952, 7(1): 77-91.
- [2]Treyner J. How to rate management investment funds[J]. *Harvard Business Review*, 1965, 44: 131-136.
- [3]Sharp W F. Mutualfund performance[J]. *Journal of Business*, 1966, 39(7): 119-138.
- [4]Jensen M. Theperformance of mutual funds in the period 1945-1964[J]. *Journal of Finance*, 1968, 23: 389-416.
- [5]Fama E F, French K R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds[J]. *Journal of Financial Economics*, 1993, 33: 3-53.
- [6]Carhart M M. On persistence in mutual fund performance[J]. *The Journal of Finance*, 1997, 52(1): 57-82.
- [7]Murthi B P S, Choi Y K, Desai P. Efficiency of mutual funds and portfolio performance measurement: A non-parametric approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 1997, 98: 408-418.
- [8]范宇,边馥萍. 基于对策 DEA 的投资基金业绩评估[J]. *管理科学学报*, 2005, 3: 41-49.  
Fan Yu, Bian Fuping. Evaluation of investment funds via game-DEA models[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 3: 41-49. (in Chinese)
- [9]Basso A, Funari S. A data envelopment analysis approach to measure the mutual fund performance[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 135(3): 477-492.
- [10]Chen Z, Lin R. Mutual fund performance evaluation using data envelopment analysis with new risk measures[J]. *OR Spectrum*, 2006, 28(3): 375-398.
- [11]Ding H, Zhou Z, Xiao H, et al. Performance evaluation of portfolios with margin requirements[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014.
- [12]Liu W, Zhou Z, Liu D, et al. Estimation of portfolio efficiency via DEA[J]. *Omega*, 2015, 52: 107-118.
- [13]周忠宝,丁慧,马超群,等. 考虑交易成本的投资组合效率估计方法[J]. *中国管理科学*, 2015, 23(1): 25-33.  
Zhou Zhongbao, Ding hui, Ma Chaoqun, et al. Technical efficiency evaluation approach for portfolios with transaction costs[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2015, 23(1): 25-33. (in Chinese)
- [14]周忠宝,刘佩,喻怀宁,等. 考虑交易成本的多阶段投资组合评价方法研究[J]. *中国管理科学*, 2015, 23(5): 1-6.  
Zhou Zhongbao, Liu Pei, Yu Huaining, et al. Performance evaluation of multi-period portfolios on considering transaction costs[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2015, 23(5): 1-6. (in Chinese)
- [15]周忠宝,罗咪,肖和录,等. 基于网络 Index DEA 的多阶段投资组合效率评价研究[J]. *湖南商学院学报*, 2016, 23(2): 98-103.  
Zhou Zhongbao, Luo Mi, Xiao Helu, et al. Performance evaluation of multi-period portfolios based on the network index DEA[J]. *Journal of Hunan Business College*, 2016, 23(2): 98-103. (in Chinese)
- [16]Basso A, Funari S. DEA Performance Assessment of Mutual Funds[M]//Data Envelopment Analysis. Springer US, 2016: 229-287.
- [17]Briec W, Kerstens K, Lesourd J B. Single-period Markowitz portfolio selection, performance gauging, and duality: A variation on the Luenberger shortage function[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004, 120(1): 1-27.
- [18]Joro T, Na P. Portfolio performance evaluation in a mean-variance-skewness framework[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 175(1): 446-461.
- [19]Lozano S, Gutiérrez E. Data envelopment analysis of mutual funds based on second-order stochastic dominance[J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 189: 230-244.
- [20]Zhao X, Wang S, Lai K K. Mutual funds performance evaluation based on endogenous benchmarks[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38(4): 3663-3670.

- [21] Lamb J D , Tee K H. Data envelopment analysis models of investment funds [J]. *European Journal of Operational Research* ,2012 ,216( 3) : 687 – 696.
- [22] Branda M. Diversification-consistent data envelopment analysis with general deviation measures [J]. *European Journal of Operational Research* ,2013 ,226( 3) : 626 – 635.
- [23] Branda M. Diversification-consistent data envelopment analysis based on directional-distance measures [J]. *Omega* ,2015 , 52: 65 – 76.
- [24] Branda M. Mean-value at risk portfolio efficiency: Approaches based on data envelopment analysis models with negative data and their empirical behaviour [J]. *4OR* ,2016 ,14( 1) : 77 – 99.
- [25] Branda M , Kopa M. DEA models equivalent to general Nth order stochastic dominance efficiency tests [J]. *Operations Research Letters* ,2016 ,44( 2) : 285 – 289.
- [26] Li D , Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation [J]. *Mathematical Finance* , 2000 ,10( 3) : 387 – 406.
- [27] 郭文旌, 胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合 [J]. *管理科学学报* ,2005 ,8( 2) : 13 – 19.  
Guo Wenjing , Hu qiying. Multi-period portfolio optimization when exit time is uncertain [J]. *Journal of Management Sciences in China* ,2005 ,8( 2) : 13 – 19. ( in Chinese)
- [28] Costa O L V , Nabholz R B. Multiperiod mean-variance optimization with intertemporal restrictions [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications* ,2007 ,134( 2) : 257 – 274.
- [29] Morey M R , Morey R C. Mutual fund performance appraisals: A multi-horizon perspective with endogenous benchmarking [J]. *Omega* ,1999 ,27( 6) : 241 – 258.
- [30] Briec W , Kerstens K. Multi-horizon Markowitz portfolio performance appraisals: A general approach [J]. *Omega* ,2009 , 37: 50 – 62.
- [31] Brandouy O , Briec W , Kerstens K , et al. Portfolio performance gauging in discrete time using a Luenberger productivity indicator [J]. *Journal of Banking & Finance* ,2010 ,34( 8) : 1899 – 1910.
- [32] Lin R , Chen Z , Hu Q. Multi-period fund performance evaluation: A dynamic network DEA approach with diversification and the directional distance function [R]. Working Paper ,2015 , [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2015/07/5029.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2015/07/5029.pdf).

## Performance evaluation of multi-period portfolios via the fully linked diversification model

ZHOU Zhong-bao<sup>1</sup> , XIAO He-lu<sup>1</sup> , REN Tian-tian<sup>1</sup> , MA Chao-qun<sup>1</sup> , LIU Wen-bin<sup>2,1</sup>

1. School of Business Administration , Hunan University , Changsha 410082 , China;

2. Business School , University of Kent , Kent CT2 7PE , England

**Abstract:** Existing models to evaluate the performance of multi-period diversification portfolio are mainly based on the actual returns of portfolios at each period , so that the dynamic characteristics of portfolios cannot be reflected. Since the links of portfolios at different periods are mainly reflected during the dynamic wealth process , thus multi-period evaluation models should be constructed according to the dynamic wealth process to reflect the actual investment. In this paper , the definition of multi-period portfolio efficiency is proposed based on the distance between the portfolio and its projection on the efficient frontier. Under the mean-variance framework , and considering the dynamic wealth process , models are developed to evaluate the performance of the fully linked multi-period diversification portfolios with different orientations. Also , the analytic expression of multi-period portfolio efficiency is given by using the dynamic programming approach. The numerical simulations show that the models are better and there exist significant differences between the traditional multi-period diversification models and the proposed models.

**Key words:** multi-period portfolios; fully linked diversification; performance evaluation; portfolio efficiency