

# 价格-数量调节网络交通流演化模型<sup>①</sup>

黄中祥, 江向军, 伍建辉

(长沙理工大学交通运输工程学院, 长沙 410114)

**摘要:** 首次运用经济学非瓦尔拉斯均衡中的价格-数量调节原理和方法, 建立网络交通流动态演化模型. 假设出行者在路径选择决策时, 不但受路径出行时间(价格)的影响, 而且还受到路径剩余通行能力(数量)的影响, 并将这种路径选择行为形成的稳定交通流模式定义为价格-数量混合调节用户均衡. 论文分别建立了价格调节演化模型和数量调节演化模型, 进而构建了价格-数量共同调节演化模型, 证明了演化模型的稳定状态等价于价格-数量调节用户均衡, 且价格调节用户均衡和数量调节用户均衡均为价格-数量调节用户均衡的特例. 论文最后以一个简单的测试网络为例对文中建立的演化模型进行了计算分析, 结果显示三种演化模型均可较理想地模拟路径流随时间变化的过程, 且模型稳定状态分别对应三种用户均衡交通流模式.

**关键词:** 非均衡理论; 非均衡交通流模式; 交通流演化; 价格调节; 数量调节

**中图分类号:** U491.12    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1007-9807(2017)08-0102-10

## 0 引言

现实交通网络中, 交通流经常会受到诸如交通事故、施工建设等外界因素的干扰. 如果原来的交通流运行处在均衡状态, 那么这些干扰因素会破坏原本稳定均衡的网络交通流模式. 当交通网络处在非均衡模式时, 高成本路径上的驾驶员会朝着低成本路径转移, 这种路径转移过程使得交通流会随时间的变化而变化, 直到新的均衡状态形成<sup>[1-6]</sup>. 过去几十年间, 学者们针对如何刻画网络交通流从非均衡模式向均衡模式的演变过程进行了深入的研究.

根据干扰因素对网络交通流影响持续时间的长短, 演化过程可分别用逐日(day-to-day)交通流动态模型及日内(within-day)交通流动态模型来刻画. 逐日交通流动态演化模型被认为是最适合用于分析交通均衡过程的方法<sup>[7-8]</sup>. Yang等<sup>[9]</sup>总

结出用于模拟逐日交通流演化过程的方法主要包括: 比例转换调节过程(proportional-switch adjustment process), 投影动态系统(projected dynamic systems), 网络摸索过程(network tatonnement process), 演化对策理论(evolutionary game theory)和单纯重力流动态(simplex gravity flow dynamics). 这5种方法可以分别描述网络交通流的演化过程, 但每种演化过程趋向稳定所花费的时间和演化过程的稳定性则各不相同<sup>[10-14]</sup>. 这5种交通流演化模型均属连续时间模型, 连续时间模型在分析解的存在性及稳定性方面具有明显优势. 由于大部分交通流动态模型都是探索一种保证交通系统收敛到Wardrop用户最优或系统最优均衡的动态演化规则<sup>[15]</sup>, 因此, 模型多基于路径相关变量建模, 思路明确, 模型构建严谨, 调节过程完成后与用户或系统均衡等价<sup>[16]</sup>.

在监测路径流量的动态变化方面, 由于路段

① 收稿日期: 2016-06-06; 修订日期: 2017-01-10.

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(51338002); 国家自然科学基金资助项目(50578019).

作者简介: 黄中祥(1965—), 男, 湖南汨罗人, 教授, 博士生导师. Email: mehzx@126.com

流量的监测比路径流量要容易得多,因此,Zhang等<sup>[17]</sup>提出了一个有关网络均衡与逐日演化模型稳定时的路段交通流等价的推论,稳定的路段交通流与交通网络均衡之间的等价意味着分析和监测交通流模式可依赖于路段流量来实现.另外,Guo等<sup>[18]</sup>基于路段流量相关变量构建了一种通用的动态系统模型,用以表征流量从非均衡到均衡的演变过程.

具体的逐日交通流演化模型可能是几种不同类型的基本模型的结合,如离散随机模型及基于路径流量的连续模型等<sup>[19]</sup>.由于早期逐日演化模型关注的是稳定后的交通流模式是否满足均衡流模式,而忽视演化过程的真实性,因此,模型得到的演化过程大多不符合实际.基于此,研究者开始逐步考虑如何建立更符合实际的交通流演化模型.He等<sup>[20]</sup>认为,应该用经验数据对现有的逐日动态演化模型进行验证,提出了一种可以描述交通均衡过程的预测-校正模型.Tan等<sup>[21]</sup>则考虑了出行者逐日路径调节过程及其差异,提出了一种拥挤收费策略的动态演化方法.

总体来讲,目前大多数逐日交通分配模型均假定出行者对路径的选择是以干扰前的经验为基础的完全理性行为,而且大多数模型中的路径选择仅仅考虑路径费用,即出行价格.因此,这些逐日演化模型本质上依据的是经济学瓦尔拉斯均衡理论,出行价格是调节供需关系唯一变量.非瓦尔拉斯均衡理论指出,完全依靠价格调节使供需在所有市场、所有时间上都相等的可能性非常小.行为人在市场上不仅能获得价格信号,更重要的是还能获得数量信号,所以,行为人在市场上受到价格和数量的双重约束.这种价格-数量混合调节机制成为了非均衡理论与方法的基础.值得指出的是非瓦尔拉斯均衡理论不是反均衡理论,而是在更一般的意义下分析问题.基于此,本文将运用经济学非瓦尔拉斯均衡理论中的价格-数量调节原理,在基于经济学瓦尔拉斯均衡理论建立的网络摸索过程这一演化模型的基础上,建立非均衡网络交通流演变模型.为此,将 OD 对间路径出行时间视为价格,路径剩余容量视为数量,分析交通流在网络上的演变过程和最终分布情况.论文首先针对价格和数量信号的单因素影响,分别建立单一的价格调节和数量调节演化模型,然后综合考

虑价格和数量的共同调节,建立混合演化模型,并对三者的演化结果加以比较.

## 1 路径选择行为与均衡

### 1.1 符号说明

- $A$ : 网络路段集合;
- $N$ : 网络节点集合;
- $f_a(t)$ :  $t$  时刻路段  $a$  上的流量;
- $h_p(t)$ :  $t$  时刻路径  $p$  上的流量;
- $h(t) = (h_p(t) : p \in P)$ :  $t$  时刻路径流集合;
- $P_{ij}$ : OD 对  $(i, j)$  间路径集合;
- $\delta_{ap}$ : 路段-路径关联矩阵元素,若  $a \in p$  则  $\delta_{ap} = 1$ , 否则为 0;
- $\Delta = (\delta_{ap} : a \in A, p \in P_{ij})$ : 路段-路径关联矩阵;
- $\mu_{ij}(t)$ :  $t$  时刻  $(i, j)$  间最小平均时间;
- $\mu(t) = (\mu_{ij}(t) : i \in N_o, j \in N_d)$ :  $t$  时刻最小平均时间集合;
- $c_p(h(t))$ :  $t$  时刻路径  $p$  的时间;
- $c_p(\text{rev}(t))$ :  $t$  时刻路径  $p$  剩余容量感知时间;
- $c(h(t)) = (c_p(h(t)) : p \in P)$ :  $t$  时刻路径时间集合;
- $T_{ij}(\mu(t))$ :  $t$  时刻 OD 对  $(i, j)$  间的交通需求;
- $T(\mu(t)) = (T_{ij}(\mu(t)) : i \in N_o, j \in N_d)$ : 交通需求集合;
- $K$ : 路段或路径通行能力集合;
- $\kappa_{ij}$ : OD 对  $(i, j)$  间最短路径时间  $\mu_{ij}$  的微分近似系数;
- $\omega_{ij}$ : OD 对  $(i, j)$  间最大路径剩余容量  $\nu_{ij}$  的微分近似系数;
- $\eta_p$ : OD 对  $(i, j)$  间路径流  $h_p$  的微分近似系数;
- $\alpha$ :  $t$  时刻 OD 对  $(i, j)$  间超额交通需求对  $(t + \Delta t)$  时刻最短路径时间  $\mu_{ij}$  的影响系数;
- $\beta$ :  $t$  时刻路径上的超额时间对  $(t + \Delta t)$  时刻路径流  $h_p$  的影响系数;
- $\vartheta$ :  $t$  时刻路径上的超额需求对  $(t + \Delta t)$  时刻最大剩余容量  $\nu_{ij}$  的影响系数;
- $\varphi$ :  $t$  时刻路径上的剩余容量对  $(t + \Delta t)$  时刻

路径流  $h_p$  的影响系数;

$\lambda$ : 价格和数量共同调节时的权重,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

### 1.2 路径选择行为

经典的交通分配模型和动态演化模型一般均以路径出行时间为决策变量来选择路径,总是优先选择出行时间最短的路径,也就是说出行价格是唯一的决策变量.根据非瓦尔拉斯均衡理论提出的价格-数量调节原理,假设出行者在进行路径选择行为决策过程中,不仅考虑路径出行时间的长短,而且还会考虑出行路径上的剩余容量.出行路径上的剩余容量多并不意味着该路径的出行时间就短,但路径剩余容量越多则意味着该路径的自由行驶机会越多,驾驶舒适性越好.将价格-数量调节原理应用于个体出行路径选择,则意味着个体将综合考虑路径出行时间和路径舒适性做出路径决策,应用于群体则表现为部分出行者选择时间最短路径出行,部分出行者选择最舒适路径出行.

### 1.3 价格-数量调节用户均衡

不同的路径选择行为假设,将导致不同的均衡流模式.假设出行者在路径选择过程中,依据可选路径上的出行价格(费用或时间)和数量(剩余容量)综合进行路径选择.出行者在可选路径上经历的综合费用为路径行驶时间  $c_p$  和剩余容量感知时间  $c_p'$  的加权组合

$$\gamma = \lambda_1 c_p + \lambda_2 c_p' \tag{1}$$

式中  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ .

定义 价格-数量调节用户均衡(PQUE)为 OD 对间所有被使用路径上的综合费用最小,且小于或等于其它任何未被使用路径上的综合费用.

当  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$  时,出行者仅仅根据路径出行费用的大小选择路径,PQUE 变成单纯的价格调节用户均衡(PUE)——OD 对间的所有被使用路径上出行费用最小,且小于或等于其它任何未被使用路径上的出行费用.显然 PUE 即为众所周知的 Wardrop 用户均衡.

当  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  时,出行者仅仅根据路径剩余容量的大小选择路径,PQUE 变成单纯的数量

调节用户均衡(QUE)——OD 对间的所有被使用路径上剩余容量最小.

## 2 价格-数量调节交通流演化

### 2.1 价格调节交通流演化模型

采用经济学中市场摸索过程模拟出行者路径选择过程.市场中的需求方为各 OD 对间的交通需求,供给方为连接各 OD 对之间道路网络,出行信息系统则扮演“拍卖人”的角色.

定义  $t$  时刻 OD 对  $(i, j)$  间的超额需求为

$$ETD_{ij}(\mu(t), h(t)) = T_{ij}(\mu(t)) - \sum_{p \in P_{ij}} h_p(t) \tag{2}$$

定义  $t$  时刻 OD 对  $(i, j)$  间路径  $p \in P_{ij}$  上的超额时间为

$$ETC_p(\mu_{ij}(t), h(t)) = c_p(h(t)) - \mu_{ij}(t) \tag{3}$$

假设  $u_{ij}$  关于时间  $t$  连续可微,则有

$$\frac{d\mu_{ij}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_{ij}(t + \Delta t) - \mu_{ij}(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

近似值表示为

$$\frac{d\mu_{ij}}{dt} \approx \kappa_{ij}(\mu_{ij}(t + \Delta t) - \mu_{ij}(t)) \kappa_{ij} \in \mathfrak{R}_+ \tag{5}$$

根据蛛网模型,假定下式成立

$$\mu_{ij}(t + \Delta t) = \mu_{ij}(t) + \alpha ETD_{ij}(\mu(t), h(t)) \tag{6}$$

其中  $\alpha \in \mathfrak{R}_+$ ,由于  $(t + \Delta t)$  时刻的路径时间不能为负,将上式修改为

$$\mu_{ij}(t + \Delta t) = \{\mu_{ij}(t) + \alpha ETD_{ij}(\mu(t), h(t))\}_+ \tag{7}$$

式中  $\{z\}_+ = \max(0, z)$ ,将式(7)代入式(5),得到路径时间的动态式为

$$\frac{d\mu_{ij}(t)}{dt} = \kappa_{ij}(\{\mu_{ij}(t) + \alpha ETD_{ij}(\mu(t), h(t))\}_+ - \mu_{ij}(t)) \quad \alpha \in \mathfrak{R}_+ \tag{8}$$

同理可得路径流动态式为

$$\frac{dh_p(t)}{dt} \approx \eta_p(h_p(t + \Delta t) - h_p(t)) \quad \eta_p \in \mathfrak{R}_+ \tag{9}$$

在  $(t + \Delta t)$  时刻的路径流为

$$h_p(t + \Delta t) = h_p(t) - \beta ETC_p(\mu_{ij}(t) h(t)) \quad (10)$$

其中  $\beta \in \mathfrak{R}_+$ , 由于  $(t + \Delta t)$  时刻的路径流不能为负, 将上式修改为

$$h_p(t + \Delta t) = \{h_p(t) - \beta ETC_p(\mu_{ij}(t) h(t))\}_+ \quad (11)$$

参数  $\beta$  前面取负号是因为当出行时间高于最小平均时间时, 出行者的出行欲望会降低从而导致流量减少, 即流量与时间函数为负相关函数. 将式 (11) 代入式 (9) 得到

$$\frac{dh_p(t)}{dt} = \eta_p(\{h_p(t) - \beta ETC_p(\mu_{ij}(t) h(t))\}_+ - h_p(t)) \quad \eta_p \in \mathfrak{R}_+ \quad (12)$$

综合式 (8) 和式 (12) 给定初始条件  $\mu(t = 0) = \mu^0$  以及  $h(t = 0) = h^0$  可得价格调节模型为  $(t \in [0, T])$

$$\begin{cases} \frac{d\mu(t)}{dt} = \kappa(\{\mu(t) + \alpha ETD(\mu(t) h(t))\}_+ - \mu(t)) \\ \frac{dh(t)}{dt} = \eta(\{h(t) - \beta ETC(\mu(t) h(t))\}_+ - h(t)) \\ \mu(0) = \mu^0 \\ h(0) = h^0 \end{cases} \quad (13)$$

其中  $\kappa = \text{diag}(\kappa_{ij} : i \in N_o, j \in N_d)$   $\eta = \text{diag}(\eta_p : p \in P)$ .

### 2.2 数量调节交通流演化模型

定义  $t$  时刻 OD 对  $(i, j)$  间路径  $p \in P_{ij}$  上的剩余容量为 (由于考虑的是交通流演化短期行为, 因此假定路径通行能力不变)

$$REV_p(h(t)) = K_p - h_p(t) \quad (14)$$

OD 对  $(i, j)$  间各路径  $p \in P_{ij}$  中的最大剩余容量为

$$v_{ij}(t) = \max_{p \in P_{ij}} \{REV_p(h(t))\} \quad (15)$$

定义 OD 对  $(i, j)$  间各路径  $p \in P_{ij}$  上超额剩余容量为

$$ETV_p(h(t)) = REV_p(h(t)) - v_{ij}(t) \quad (16)$$

假设  $v_{ij}$  关于时间  $t$  连续可微, 则有

$$\frac{dv_{ij}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{ij}(t + \Delta t) - v_{ij}(t)}{\Delta t} \quad (17)$$

近似值表示为

$$\frac{dv_{ij}}{dt} \approx \omega_{ij}(v_{ij}(t + \Delta t) - v_{ij}(t)) \quad \omega_{ij} \in \mathfrak{R}_+ \quad (18)$$

根据蛛网模型, 同样假定下式成立

$$v_{ij}(t + \Delta t) = v_{ij}(t) - \vartheta ETD_{ij}(\mu(t) h(t)) \quad (19)$$

其中  $\vartheta \in \mathfrak{R}_+$ , 参数  $\vartheta$  前面的负号是因为随着超额需求的增加, 最大剩余容量将减小. 由于  $(t + \Delta t)$  时刻的剩余容量不能为负, 将上式修改为

$$v_{ij}(t + \Delta t) = \{v_{ij}(t) - \vartheta ETD_{ij}(\mu(t) h(t))\}_+ \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (18), 得到路径剩余容量的动态式为

$$\frac{dv_{ij}}{dt} = \omega_{ij}(\{v_{ij}(t) - \vartheta ETD_{ij}(\mu(t) h(t))\}_+ - v_{ij}(t)) \quad (21)$$

同理假设在  $(t + \Delta t)$  时刻

$$h_p(t + \Delta t) = \{h_p(t) + \varphi ETV_p(h(t))\}_+ \quad (22)$$

其中  $\varphi \in \mathfrak{R}_+$ , 参数  $\varphi$  前面的正号是因为路径存在超额剩余容量时, 出行者的出行欲望会增加从而导致流量增加, 即流量与剩余容量正相关. 将式 (22) 代入式 (9), 得到

$$\frac{dh_p(t)}{dt} = \eta_p(\{h_p(t) + \varphi ETV_p(h(t))\}_+ - h_p(t)) \quad \eta_p \in \mathfrak{R}_+ \quad \varphi \in \mathfrak{R}_+ \quad (23)$$

综合式 (21) 和式 (23), 给定初始条件  $v(t = 0) = v^0$  以及  $h(t = 0) = h^0$ , 可得数量调节模型为  $(t \in [0, T])$

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = \omega(\{v(t) - \vartheta ETD(\mu(t) h(t))\}_+ - v(t)) \\ \frac{dh(t)}{dt} = \eta(\{h(t) + \varphi ETV(h(t))\}_+ - h(t)) \\ v(0) = v^0 \\ h(0) = h^0 \end{cases} \quad (24)$$

其中  $\omega = \text{diag}(\omega_{ij} : i \in N_o, j \in N_d)$   $\vartheta > 0$   $\varphi > 0$ .

### 2.3 价格-数量混合调节交通流演化模型

价格调节模型和数量调节模型分别刻画了价格和数量单独对 OD 对各路径流的调节过程. 根据非均衡理论, 出行者在出行过程中, 不但获取了出行路径的价格信息, 而且也获得了出行路径

上的数量信息,价格和数量信息将共同影响出行者的路径选择.

基于非均衡理论,假设出行者在做出路径选择决策时综合考虑路径的出行时间和路径剩余容量两个因素,因此,路径流动态演化过程可以通过下式刻画.

$$\frac{dh(t)}{dt} = \eta(\{h(t) - \beta\lambda_1 ETC(\mu(t), h(t))\}_+ - h(t) + \varphi\lambda_2 ETV(h(t))) \quad (25)$$

给定初始条件  $\mu(t=0) = \mu^0, \nu(t=0) = \nu^0$  及  $h(t=0) = h^0$ , 可得加权价格-数量混合调节模型为 ( $t \in [0, T]$ )

$$\begin{cases} \frac{d\mu(t)}{dt} = \kappa(\{\mu(t) + \alpha ETD(\mu(t), h(t))\}_+ - \mu(t)) \\ \frac{d\nu(t)}{dt} = \omega(\{\nu(t) - \vartheta ETD(\mu(t), h(t))\}_+ - \nu(t)) \\ \frac{dh(t)}{dt} = \eta(\{h(t) - \beta\lambda_1 ETC(\mu(t), h(t)) + \varphi\lambda_2 ETV(h(t))\}_+ - h(t)) \\ \mu(0) = \mu^0 \\ \nu(0) = \nu^0 \\ h(0) = h^0 \end{cases} \quad (26)$$

### 3 模型性质及求解

#### 3.1 模型稳定状态与均衡的等价性

定理 当路段综合费用为正、连续,且需求函数连续时,价格-数量演化模型的稳定状态与价格-数量调节用户均衡流模式等价.

演化模型(26)稳定时,令  $\frac{d\mu(t)}{dt} = 0, \frac{d\nu(t)}{dt} = 0$ ,

$\frac{dh(t)}{dt} = 0$  则出行时间、剩余容量和路径流动态演化式稳定状态形式为

$$\mu(t) = \{\mu(t) + \alpha ETD(\mu(t), h(t))\}_+ \quad (27)$$

$$\nu(t) = \{\nu(t) - \vartheta ETD(\mu(t), h(t))\}_+ \quad (28)$$

$$h(t) = \{h(t) - (\beta\lambda_1 ETC(\mu(t), h(t)) + \varphi\lambda_2 ETV(h(t)))\}_+ \quad (29)$$

上述三个不动点问题,可化为如下变分不等式.

$$\sum_{ij} (-ETD_{ij}(\mu(t), h(t))) (\mu_{ij} - \mu_{ij}^*) + \sum_{ij} (ETD_{ij}(\mu(t), h(t))) (\nu_{ij} - \nu_{ij}^*) + \sum_{p \in P_{ij}} \{\beta\lambda_1 [ETC_p(\mu(t), h(t))] + \varphi\lambda_2 [ETV_p(h(t))]\} (h_p - h_p^*) \geq 0 \quad (30)$$

将式(2)、式(3)、式(16)代入式(30)得

$$\sum_{ij} (\sum_{p \in P_{ij}} h_p^* - T_{ij}(\mu^*)) (\mu_{ij} - \mu_{ij}^*) + \sum_{ij} (T_{ij}(\mu^*) - \sum_{p \in P_{ij}} h_p^*) (\nu_{ij} - \nu_{ij}^*) + \sum_{ij} \sum_{p \in P_{ij}} \{\beta\lambda_1 [c_p(h^*) - \mu_{ij}^*] + \varphi\lambda_2 [\nu_{ij}^* - REV_p(h^*)]\} (h_p - h_p^*) \geq 0 \quad (31)$$

变分不等式(31)的KKT条件<sup>[22]</sup>为

$$\beta\lambda_1 [c_p(h^*) - \mu_{ij}^*] + \varphi\lambda_2 [\nu_{ij}^* - REV_p(h^*)] - \xi_p = 0, \xi_p \geq 0, \xi_p h_p^* = 0 \quad (32)$$

$$\sum_{p \in P_{ij}} h_p^* - T_{ij}(\mu^*) - \varepsilon_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} \geq 0, \varepsilon_{ij} \mu_{ij}^* = 0 \quad (33)$$

$$T_{ij}(\mu^*) - \sum_{p \in P_{ij}} h_p^* - \psi_{ij} = 0, \psi_{ij} \geq 0, \psi_{ij} \nu_{ij}^* = 0 \quad (34)$$

式中  $\xi_p, \varepsilon_{ij}$  和  $\psi_{ij}$  为非负约束的对偶变量向量.

下面分情况讨论上述KKT条件的含义

1) 若  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$  则式(32)变为  $\beta[c_p \times (h^*) - \mu_{ij}^*] - \xi_p = 0$ . 当均衡流  $h_p^* > 0$  时  $\xi_p = 0$  则  $c_p(h^*)$

$= \mu_{ij}^*$ ; 当均衡流  $h_p^* = 0$  时,  $\xi_p > 0$  则  $c_p(h^*) > \mu_{ij}^*$ . 式(32)等价于Wardrop用户均衡. 由于  $\mu_{ij}^* = \min_{p \in P_{ij}} c_p(h^*) > 0$  故  $\varepsilon_{ij} = 0$ , 式(33)为流量守恒约束.

2) 若  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ , 则式(32)变为  $\varphi[\nu_{ij}^* - REV_p(h^*)] - \xi_p = 0$ . 当均衡流  $h_p^* > 0$  时, 则  $\nu_{ij}^* = REV_p(h^*)$ ; 当均衡流  $h_p^* = 0$  时, 则  $\nu_{ij}^* > REV_p(h^*)$ . 式(32)等价于单一数量约束. 又由于  $K_p \geq h_p$  则  $\nu_{ij} = \max [REV_p(h^*)] > 0$ , 由此可得  $\psi_{ij} = 0$ , 则式(34)为流量守恒约束.

3) 若  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  在  $(0, 1)$  范围内时, 则式(32)

等价于价格和数量混合约束,式(33)和式(34)为流量守恒约束.

### 3.2 模型求解

价格调节交通流演化模型的求解步骤如下,数量调节及价格-数量调节模型求解过程与之类似.

**步骤 0** 初始化.令  $t=0$ ,给定时间步长  $\Delta t$ ,OD 对间初始最小路径行驶时间  $\mu(t=0)$ ,初始路径流量  $h(t=0)$ ,模型参数  $\alpha, \beta, \kappa_{ij}, \eta, \vartheta$ ,调整参数  $\gamma$  及终止条件  $\zeta$ .

**步骤 1** 分别用式(2)和式(3)计算  $t$  时刻 OD 对间的超额需求及超额费用.

**步骤 2** 分别用式(5)和式(9)计算  $t$  时刻费用对时间的微分及路径流量对时间的微分.

**步骤 3** 采用欧拉法计算  $t+\Delta t$  时刻的费用和流量

$$\mu(t+\Delta t) = \mu(t) + \gamma \frac{d\mu(t)}{dt},$$

$$h(t+\Delta t) = h(t) + \gamma \frac{dh(t)}{dt}.$$

**步骤 4** 收敛性检验.如果  $\left\| \frac{\mu(t+\Delta t) - \mu(t)}{\mu(t)} \right\| \leq \zeta$  且  $\left\| \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{h(t)} \right\| \leq \zeta$ ,则输出  $\mu(t+\Delta t)$  和  $h(t+\Delta t)$  否则令  $t=t+\Delta t$  转入步骤 1.

## 4 数例演算

给定一测试交通网络如图 1 所示.路段-路径关联矩阵  $\Delta$  如图 2 所示.模型参数如表 1 所示,时间函数参数如表 2.

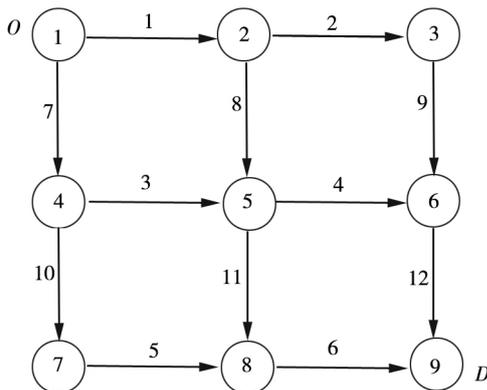


图 1 测试交通网络  
Fig.1 Test traffic network

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图 2 路段-路径关联矩阵

Fig.2 Arc-path incidence matrix

表 1 演化模型参数

Table 1 Tatonnement regulation parameters

| 参数       | 取值  | 参数          | 取值  |
|----------|-----|-------------|-----|
| $\alpha$ | 0.5 | $\eta$      | 1.0 |
| $\beta$  | 2.0 | $\vartheta$ | 0.5 |
| $\kappa$ | 1.0 | $\varphi$   | 2.0 |

表 2 路段行驶时间函数参数

Table 2 Arc cost function parameters

| 路段 | $t_a^0$ | $c_a$ | 路段 | $t_a^0$ | $c_a$ |
|----|---------|-------|----|---------|-------|
| 1  | 8       | 600   | 7  | 12      | 600   |
| 2  | 16      | 600   | 8  | 14      | 800   |
| 3  | 10      | 800   | 9  | 10      | 600   |
| 4  | 8       | 600   | 10 | 10      | 800   |
| 5  | 8       | 400   | 11 | 8       | 400   |
| 6  | 12      | 400   | 12 | 8       | 600   |

单一 OD 对(1,9)间有六条路径

$$p_1 = \{a_1, a_2, a_9, a_{12}\}, p_2 = \{a_1, a_4, a_8, a_{12}\},$$

$$p_3 = \{a_1, a_6, a_8, a_{11}\}, p_4 = \{a_3, a_4, a_7, a_{12}\},$$

$$p_5 = \{a_3, a_6, a_7, a_{11}\}, p_6 = \{a_5, a_6, a_7, a_{10}\}.$$

路段行驶时间函数采用 BPR 函数

$$t_a(f_a(t)) = t_a^0 \left[ 1 + 0.15 \left( \frac{f_a(t)}{c_a} \right)^4 \right], \forall a \in A \quad (35)$$

路段流与路径流的关系如下

$$f_a(t) = \Delta h_p(t), \forall a \in A, \forall p \in P \quad (36)$$

给定需求  $T=2400$ ,初始路径流  $h(0) = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ ,初始时间  $\mu(0)$  通过  $h(0)$  确定,演化  $t \in [0, 200]$ ,  $\Delta t$  取 0.05,  $\zeta$  取 0.001,  $\gamma$  取 0.05, 分别对上述三个模型进行数值计算.

### 4.1 单一价格调节

单一价格调节情况下,  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$  的路径流演化过程如图 3、图 4 所示.稳定后各路径流和路径时间如表 3 所示.

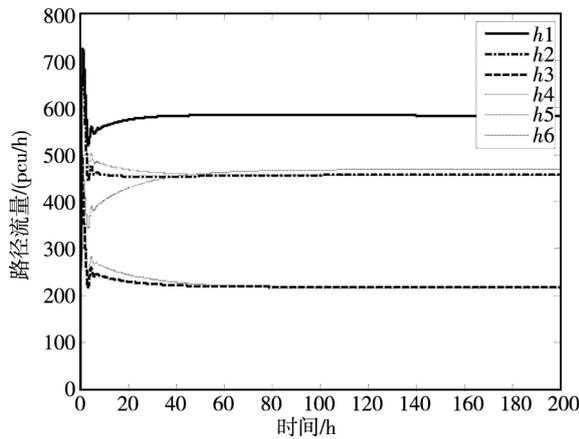


图3 动态调节过程图

Fig.3 Dynamic regulation process

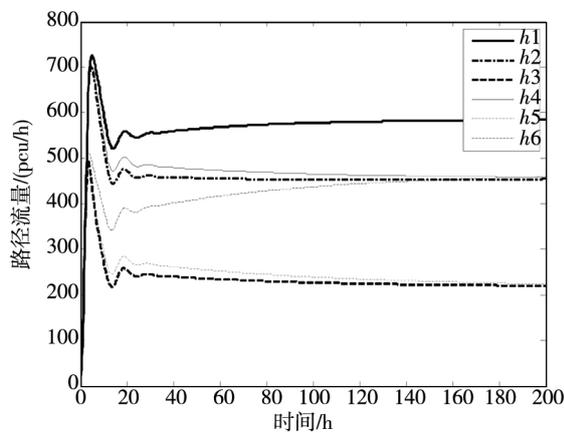


图4 动态调节过程局部图

Fig.4 Local dynamic regulation process

表3 固定需求均衡网络路径流及时间

Table 3 Fixed demand equilibrium network path flow and cost

| 路径    | 包含路段     | 路径流量 / (pcu/h) | 路径时间 / h |
|-------|----------|----------------|----------|
| $h_1$ | 1、2、9、12 | 583            | 115.05   |
| $h_2$ | 1、4、8、12 | 457            | 115.05   |
| $h_3$ | 1、6、8、11 | 219            | 115.05   |
| $h_4$ | 3、4、7、12 | 455            | 115.05   |
| $h_5$ | 3、6、7、11 | 217            | 115.05   |
| $h_6$ | 5、6、7、10 | 469            | 115.05   |

4.2 单一数量调节

单一数量调节情况下,路径流演化过程如图5、图6所示,图中黑色实线代表路径 $h_1$ 、 $h_2$ 和 $h_4$ 上的路径流,黑色虚线代表路径 $h_3$ 、 $h_5$ 和 $h_6$ 上的路径流.稳定后各路径流和剩余容量如表4所示.

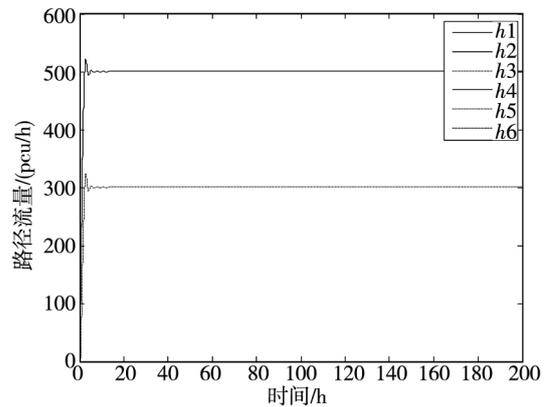


图5 动态调节过程图

Fig. 5 Dynamic regulation process

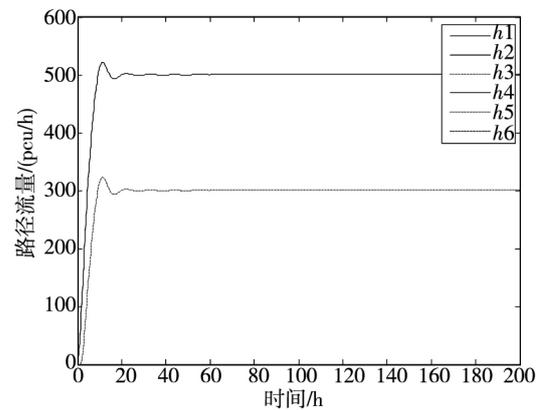


图6 动态调节过程局部图

Fig.6 Local dynamic regulation process

表4 固定需求均衡网络路径流及剩余通行能力

Table 4 Fixed demand equilibrium network path flow and surplus capacity

| 路径    | 包含路段     | 路径流量 / (pcu/h) | 剩余容量 / (pcu/h) |
|-------|----------|----------------|----------------|
| $h_1$ | 1、2、9、12 | 500            | 100            |
| $h_2$ | 1、4、8、12 | 500            | 100            |
| $h_3$ | 1、6、8、11 | 300            | 100            |
| $h_4$ | 3、4、7、12 | 500            | 100            |
| $h_5$ | 3、6、7、11 | 300            | 100            |
| $h_6$ | 5、6、7、10 | 300            | 100            |

4.3 价格 - 数量混合调节

价格 - 数量混合调节情况下,假设价格因素影响所占权重 $\lambda_1$ 取10%、数量因素影响所占权重 $\lambda_2$ 取90%, $h_1$ 、 $h_2$ 、 $h_3$ 、 $h_4$ 、 $h_5$ 、 $h_6$ 的路径流演化过程如图7、图8所示.稳定后各路径流、路径时间和剩余容量如表5所示.

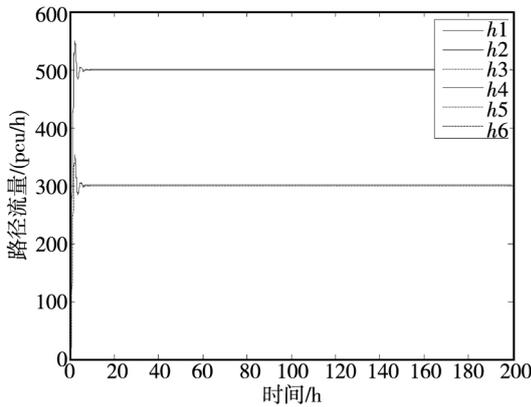


图 7 动态调节过程图

Fig. 7 Dynamic regulation process

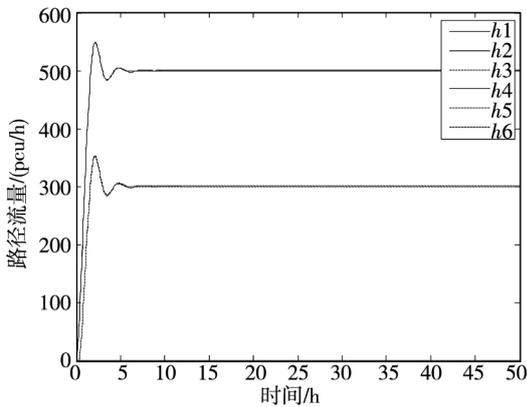


图 8 动态调节过程局部图

Fig. 8 Local dynamic regulation process

表 5 固定需求均衡网络路径流、时间及剩余通行能力

Table 5 Fixed demand equilibrium network path flow, cost and surplus capacity

| 路径    | 路径流量 / (pcu/h) | 路径时间 / h | 剩余容量 / (pcu/h) |
|-------|----------------|----------|----------------|
| $h_1$ | 500            | 117.05   | 99.98          |
| $h_2$ | 500            | 122.50   | 100.58         |
| $h_3$ | 299            | 122.71   | 100.61         |
| $h_4$ | 500            | 115.99   | 99.86          |
| $h_5$ | 300            | 116.20   | 99.88          |
| $h_6$ | 301            | 109.05   | 99.09          |

#### 4.4 结果分析

模型的演算结果表明,三种调节模型都能比较理想的模拟路径流随时间变化的过程,且由图 3、图 5、图 7 可得,在经过一定时间的波动后,所有路径流量最终均会维持在一个稳定的状态。由表 3 可知在单一价格调节下,达到稳定状态时,不同路径上的时间达到一致,网络流为 Wardrop 用户均衡流;由表 4 可知在单一数量调节下,达到

稳定状态时,不同路径的剩余通行能力相等,相对于单一价格,其演化过程波动性很小,收敛速度较快;而表 5 则反映了价格-数量共同调节下的交通流的动态演化过程,其波动性和速度介于前两者之间。

由表 3 与表 5 中路径流的不同可以看出,在考虑价格因素影响的同时考虑数量因素,会使路径流向剩余通行能力较大的路径上进行调节,由表 4 与表 5 中路径流的不同可以看出,在考虑数量因素影响的同时考虑价格因素,会使路径流向行驶时间较小的路径上进行调节。

## 5 结束语

以经济学非瓦尔拉斯均衡理论为基础,采用经济学中市场摸索过程模拟出行者路径选择过程,分别建立了价格调节、数量调节以及价格-数量共同调节三个交通流动态演化模型。价格调节模型的演化结果符合交通规划中的经典的 Wardrop 第一原理,在经过一段时间的波动后,路网中的路径流将维持一稳定状态而不发生变化,网络交通系统处于均衡状态;数量调节的结果是交通流将在整个路网上分布,OD 间各路径上的剩余容量基本接近,相比较价格调节模型的演化过程,其波动性小,收敛速度很快,这与模型假定的各路段通行能力不发生变化有关;价格-数量共同调节的结果是价格调节均衡模式和数量调节均衡模式的混合均衡,这种混合均衡模式的成分根据权重的设置变化而变化,克服了现有 DTD 交通分配模型局限,可以较为灵活的考虑出行者出行行为的异质性或有限理性。

由于价格调节模型的稳态交通流模式等价于用户均衡流模式,结果很容易被学者们接受,但需要指出的是,用户均衡流模式的形成有严格的假设前提,现实交通出行中难以满足,因此用户均衡流模式是一个理想“参照点”,就像经济学中的瓦尔拉斯均衡一样。实际交通出行过程中,即便人们完全掌握各种交通信息,也不一定所有的人都按照时间最短选择路径,出行者行为存在一定的异质性,比如驾驶的舒适性及安全性也是出行者经常考虑的因素,尤其在高峰期,很多人不愿意走拥

挤的路段,宁愿多花费点时间绕道服务水平较高(剩余容量较大)的道路行驶.因此,价格-数量调节模型能更好地解释交通出行行为,真实交通流模式也许就是考虑出行者路径选择异质性的某一特定权重组合的混合均衡.因此,该模型的提出不仅灵活客观地描述了实际路网交通流动态演化过程,而且可以快速有效地得到路网系统的稳态流量,为制定网络交通流控制策略和交通建设方案等提供了依据.

随着我国城市化进程的加快,目前很多城市正开展大规模的城市基础设施建设,道路网络的改扩建以及新的交通格局的产生等,导致交通流

经常处在非均衡状态之中,掌握交通流从非均衡向均衡的动态演变过程,对于加深对网络交通流的理解和把握,提高城市交通管理水平具有良好的促进作用.本文研究是利用经济学原理对路网交通流动态演变过程模拟的创新尝试,但后续还有很多工作有待进一步开展.例如,如何考虑道路的容量限制,对模型进行改进;建立数量调节机制时,如何考虑道路本身的等级、功能、服务水平等因素,选择最合适的数量信号;如何考虑扰动因素对固有经验判断的影响;如何对流量演变轨迹的不变性、稳定性进行分析以及实际应用等,这将是下一步工作研究的方向.

#### 参考文献:

- [1] Kumar A, Peeta S. A Day-to-day dynamical model for the evolution of the path flows under disequilibrium of traffic networks with fixed demand [J]. *Transportation Research Part B*, 2015, 80: 235-256.
- [2] Cantarella G E. Day-to-day dynamics in transportation networks: Stability and limits of equilibrium in a two-link network [J]. *Sistemi Urbani* 1, 1993, 27-50.
- [3] Cantarella G E, Cascetta E. Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: Towards a unifying theory [J]. *Transportation Science*, 1995, 29(4): 305-329.
- [4] 陈星光. 交通流演化动力学研究的一般框架及性质分析 [J]. *管理科学学报*, 2015, 18(6): 58-69.  
Chen Xingguang. Traffic flow evolutionary dynamics: General research framework and its properties analysis [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2015, 18(6): 58-69. (in Chinese)
- [5] 吴文祥, 黄海军. 固定需求交通网络的一般系统最优模型与性质 [J]. *管理科学学报*, 2015, 18(12): 58-67.  
Wu Wenxiang, Huang Haijun. Generalized system optimal model and properties in traffic networks with fixed demand [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2015, 18(12): 58-67. (in Chinese)
- [6] Watling D P, Cantarella G E. Model representation and decision-making in an ever-changing world: The role of stochastic process models of transportation systems [J]. *Networks and Spatial Economics*, 2015, 15(3): 843-882.
- [7] Iryo T. Day-to-day dynamical model incorporating an explicit description of individuals' information collection behaviour [J]. *Transportation Research Part B*, 2016, 92: 88-103.
- [8] Cantarella G E, David P, Watling D P. A general stochastic process for day-to-day dynamic traffic assignment: Formulation, asymptotic behaviour, and stability analysis [J]. *Transportation Research Part B*, 2016, 92: 3-21.
- [9] Yang F, Zhang D. Day-to-day stationary link flow pattern [J]. *Transportation Research Part B Methodological*, 2009, 43(1): 119-126.
- [10] 徐红利, 于新莲, 周晶. 诱导信息下考虑路段容量退化的流量演化研究 [J]. *管理科学学报*, 2015, 18(7): 39-47.  
Xu Hongli, Yu Xinlian, Zhou Jing. Day-to-day travel choice dynamics with guidance information in degradable transport network [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2015, 18(7): 39-47. (in Chinese)
- [11] Wang J, He X Z, Peeta S. Sensitivity analysis based approximation models for day-to-day link flow evolution process [J]. *Transportation Research Part B Methodological*, 2015, 92: 35-53.
- [12] He X Z, Liu H X. Modeling the day-to-day traffic evolution process after an unexpected network disruption [J]. *Transportation Research Part B Methodological*, 2012, 46(1): 50-71.
- [13] Jing B, Hong K L. Stability and attraction domains of traffic equilibria in a day-to-day dynamical system formulation [J]. *Transportation Research Part B Methodological*, 2010, 44(1): 90-107.
- [14] Guo R Y, Yang H, Huang H J. A discrete rational adjustment process of link flows in traffic networks [J]. *Transportation*

- Research Part C Emerging Technologies , 2013 , 34( 9) : 121-137.
- [15] Ben-Akiva M. Dynamic network equilibrium research [J]. Transportation Research Part A General , 1985 , 19( 5-6) : 429-431.
- [16] He X , Guo X , Liu H X. A link-based day-to-day traffic assignment model [J]. Transportation Research Part B Methodological , 2010 , 44( 4) : 597-608.
- [17] Zhang D , Nagurney A , Wu J. On the equivalence between stationary link flow patterns and traffic network equilibria [J]. Transportation Research Part B Methodological , 2001 , 35( 8) : 731-748.
- [18] Guo R Y , Yang H , Huang H J , et al. Link-based day-to-day network traffic dynamics and equilibria [J]. Transportation Research Part B Methodological , 2015 , 71: 248-260.
- [19] Xiao F , Yang H , Ye H. Physics of day-to-day network flow dynamics [J]. Transportation Research Part B Methodological , 2016 , 86: 86-103.
- [20] He X , Liu H X. Modeling the day-to-day traffic evolution process after an unexpected network disruption [J]. Transportation Research Part B , 2012 , 46( 1) : 50-71.
- [21] Tan Z , Yang H , Guo R Y. Dynamic congestion pricing with day-to-day flow evolution and user heterogeneity [J]. Transportation Research Part C Emerging Technologies , 2015 , 61: 87-105.
- [22] Tobin R L. Sensitivity analysis for variational inequalities [J]. Journal of Optimization Theory and Applications , 1986 , 48( 1) : 191-204.

## An evolution model for network traffic flow based on price-quantity regulation

*HUANG Zhong-xiang , JIANG Xiang-jun , WU Jian-hui*

School of Traffic and Transportation Engineering , Changsha University of Science & Technology , Changsha 410114 , China

**Abstract:** In this paper , a novel network flow dynamic model is developed based on the price-quantity regulation method of non-Walrasian equilibrium theory in Economics. In addition to the common notion that a traveler's route choice is only influenced by the travel time ( price ) , the presented model also considers the impact of the surplus capacity ( quantity ) . A price regulation model and a quantity regulation model are established separately to form the basis of a price-quantity regulation evolution model. The stable traffic flow pattern resulting from such route choice behavior is defined as the price-quantity mixed user equilibrium. It is found that the stable state of the price-quantity model is equivalent to the price-quantity mixed user equilibrium. Moreover , both the separated price regulation and quantity regulation models are the special cases of the combined price-quantity regulation model. At last , a numerical example is conducted to analyze the proposed model. The results show that the proposed three models can describe the variation of route flow perfectly and the stable states of these models are corresponding to three types of equilibrium traffic flow patterns , respectively.

**Key words:** disequilibrium theory; disequilibrium traffic flow pattern; traffic flow evolution; price regulation; quantity regulation