

考虑延时效应的供应链动态合作广告策略研究^①

陈东彦^{1,2}, 于 浚¹, 侯 玲²

(1. 哈尔滨理工大学管理学院, 哈尔滨 150080; 2. 哈尔滨理工大学应用科学学院, 哈尔滨 150080)

摘要: 广告的延时效应是供应链广告过程中的普遍现象,对供应链合作广告策略的制定具有重要影响.文章研究当产品品牌信誉受广告延时效应影响时供应链的合作广告策略问题,建立了含有时间延迟的品牌信誉动态模型和考虑品牌信誉的产品销售量模型.运用极大值原理,得到了制造商和零售商在分散式决策和集中式决策下的最优广告投入、品牌信誉和利润,以及分散式决策下制造商的最优合作广告参与率.研究发现:在集中式决策下制造商和零售商的最优广告投入和产品销售量均高于分散式决策下的相应值;延迟时间存在一个阈值,当延迟时间低于该阈值时,集中式决策下的供应链利润较高,反之则分散式决策下的供应链利润较高.研究结果为供应链合作广告策略的制定及供应链决策机制的选择提供了一定的参考.最后,通过数值算例分析了广告延迟时间对供应链最优广告策略及决策机制的影响.

关键词: 合作广告; 延时效应; 动态模型; 微分对策

中图分类号: F270.5; F224.32 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2017)09-0025-11

0 引 言

如今是市场竞争激烈的时代,企业之间的竞争逐步转变成供应链间的竞争,广告和价格竞争是供应链竞争中最常见的两种方式.为了增强消费者的消费意识和产品的市场份额,制造商和零售商通常会投入大量广告宣传.一般地说,广告形式被分成全国性广告和地方性广告,制造商为了提高产品形象和品牌信誉进行全国性广告,而零售商为促进产品的销售量进行地方性广告^[1].合作广告是针对供应链广告行为的协调机制,制造商通过承担零售商的部分广告费用达到激励零售商投入更多广告的目的.统计数据表明,1970年美国大概花费90亿美元在合作广告上,2000年这个数字达到了150亿美元,而在2010年花费在合作广告项目上的费用已经达到500亿美元^[2,3].

在广告过程中,有时一定数量的广告投入并不会给产品的品牌信誉和销售量带来立竿见影的效果(即时效应),广告效果往往经过一段时间才有所体现,把这种现象称为广告的延时效应,它主要是指投资一定数量的广告费用在一段时间后才产生效果.例如雀巢咖啡在POCO网和猫扑网上进行广告宣传,广告版内容未引起消费者即时关注,而是经过一段时间后才吸引了广大消费者的目光.1994年,百事可乐花巨资聘请迈克尔·杰克逊拍摄广告片,在广告片开播后30天左右,百事可乐销售量才开始上升.事实上,在广告投放过程中其效应常常是延时的,如耐用品和医药产品等,而且不同类型产品广告效应的延时大小也不同.基于这样的背景,Tsurumi^[4]对8家日本制药公司进行了实证研究,证实了在医药行业广告投放中存在延时效应.产生广告延时效应的主要原因有:其一,不同的广告媒体形式会影响消费者

① 收稿日期: 2014-05-20; 修订日期: 2017-01-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271103; 71171069); 黑龙江省教育厅科学技术研究资助项目(12531138).

作者简介: 陈东彦(1964—),女,江西赣州人,博士,教授,博士生导师. Email: dychen_2004@hotmail.com

接受广告信息的时间,例如路牌、杂志和传单要比电视和广播等广告的时间间隔长;其二,消费者对产品品牌的认知、评价到产生购买欲望需要经历一个过程;其三,消费者将购买欲望转变成购买行为也需要一段时间.因此,延时效应在广告过程中是普遍存在的.

最早研究合作广告策略的是学者 Berger^[5]. 1972年他首次对单一制造商和单一零售商之间的静态合作广告模型进行了研究;随后,又对上述模型进行了改进^[6]. Roslow等^[7]侧重研究零售商广告投入对产品销售量的影响,研究表明合作广告能够提升整个供应链的利润. Huang和Li^[8]针对合作广告中零售势力由制造商转变成零售商这一市场结构变化进行了研究.不同于文献[7]的研究结果, Karray和Amin^[9]研究了在零售商竞争环境下供应链成员的合作广告和定价策略,发现当零售商间价格竞争相对较弱,而广告竞争相对较强时,合作广告不一定促进整个供应链利润的提升. Sheen等^[10]研究了消费者与零售商之间距离对合作广告计划的影响.另外, Karray^[11]、Hong等^[12]及Zhao等^[13]也对静态合作广告模型进行了深入的研究.

上述研究都是针对静态模型给出的,但合作广告计划一般随时间的变化而变化,是动态的,因此,一些学者也致力于研究动态合作广告问题. Nerlove和Arrow^[14]建立了经典的Nerlove-Arrow广告模型,刻画了品牌信誉的动态变化. Jørgensen等^[15]对Nerlove-Arrow模型进行了改进,将合作广告概念引入到供应链决策中,且将广告分为长期广告和短期广告两种类型,建立了供应链的动态合作广告模型;此外,当假设零售商广告对品牌信誉起负作用时,构造了基于零售商广告负效应的动态合作广告模型.不同于Jørgensen^[16]、张庶萍和张世英^[17]在假设零售商广告对品牌信誉起促进作用的基础上,利用微分对策理论研究供应链成员的动态合作广告策略,指出在合作条件下制造商和零售商的利润都会增加. He等^[18]及Zhou和Lin^[19]对此模型加以扩展,对多制造商和单一零售商之间的合作广告问题展开研究. 聂佳佳和熊中楷^[20]利用微分对策理论研究了零售商采用多种广告媒体宣传手段时的动态合作广告问题,给出了分散式决策和集中式决策下最优的广告策

略;之后,又将合作广告问题推广到供应链竞争的情形^[21-22].此外,Zhou和Lin^[23]、徐春秋等^[24]以及王素凤等^[25]将动态合作广告模型应用到分销渠道和供应链低碳化问题中.现有对合作广告研究都只考虑了广告效应的即时性,而未考虑广告效应的延时效应.对广告延时效应相关研究在文献[26]中有所报告,Luhta和Virtanen^[26]在经典的Nerlove-Arrow模型基础上,建立延迟微分方程描述了广告投入水平与品牌信誉的关系,应用混沌理论分析了市场中广告模型分类,并给出了当广告发生延时效应时品牌信誉上限解的稳定性条件.而利用动态模型刻画广告延时效应并分析延时效应对供应链决策影响的相关研究还未见报道.

本文将广告延时效应引入到供应链决策中,研究考虑延时效应的动态合作广告问题,基于Nerlove-Arrow模型,构建动态合作广告的延迟微分方程,利用微分对策理论分别给出制造商和零售商在分散式决策和集中式决策下的最优广告投入、品牌信誉、利润以及在分散式决策下制造商的最优合作广告参与率,并从供应链利润、产品品牌信誉以及延迟时间对制造商广告投入的影响等3个方面进行数值分析,验证供应链最优广告策略的有效性.

1 模型描述

假设所考虑的供应链由1个制造商M和1个零售商R组成.为了提高产品的品牌信誉和销售量,制造商和零售商分别进行全国性广告和地方性广告.制造商M在 t 时刻投入的全国性广告水平为 $U_M(t)$,零售商R在 t 时刻投入的地方性广告水平为 $U_R(t)$, ϕ 为制造商承担零售商地方性广告投入成本的支付比例,称为合作广告的参与率,且 $\phi \in [0, 1]$.基于Nerlove-Arrow广告模型^[14],建立如下延迟微分方程描述产品品牌信誉的动态变化

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= \gamma U_M(t - d(t)) - \delta G(t) \\ G(0) &= G_0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $G(t)$ 表示产品的品牌信誉; $d(t)$ 表示制造商全国性广告作用的延迟时间; γ 表示制造商投

入的广告水平对产品品牌信誉变化率的影响因子, $\gamma > 0$, δ 表示品牌信誉的衰减率, $\delta > 0$. 广告延时效应是由于消费者接触广告后需要经过一段时间才转化为购买行为所造成的, 商品的类型和产品的价格决定了延迟时间的长短. 产品品牌信誉的衰减通常是由于随着时间的变化产品会被消费者遗忘或消费者在该制造商(零售商)竞争者的广告吸引下转向其他品牌或转向新市场等所造成的. 制造商投入全国性广告的目的就在于提高产品的品牌信誉, 使消费者充分了解和关注产品, 激发消费者的购买欲望, 进而提高产品的销售量.

产品销售量 $S(t)$ 受零售商地方性广告投入和产品品牌信誉的共同影响, 零售商投入的地方性广告直接促进产品销售量, 而制造商投入的全国性广告则通过提升产品品牌信誉影响产品销售量^[17]; 此外, 产品销售量也受零售商品牌效应的影响, 较高的品牌效应意味着零售商能够为消费者提供高水平的服务质量(送货服务或者退货服务), 使消费者相信产品具有较高的质量保障, 进而提高了产品的销售量^[27]. 因此, 本文假设

$$S(t) = a + \alpha G(t) + \beta U_R(t) \quad (2)$$

其中 α 为产品品牌信誉对产品销售量的影响因子, $\alpha > 0$; β 为零售商投入的地方性广告水平对产品销售量的影响因子, $\beta > 0$, a 为零售商品牌效应对产品销售量的影响值. 由于本文不考虑零售商品牌效应随其广告投入的变化, 因此设 a 为常值. 根据文献[18]的分析, 广告投入成本是广告水平的增函数且呈现上凸的特点, 若记制造商和零售商的广告投入成本分别为 $C(U_M(t))$ 和 $C(U_R(t))$, 则假设

$$\begin{aligned} C(U_M(t)) &= \frac{1}{2} k_M U_M^2(t) \\ C(U_R(t)) &= \frac{1}{2} k_R U_R^2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 k_M 和 k_R 分别为制造商和零售商广告成本系数. 此外, 假设供应链可以无限期地运作下去, ρ_M 和 ρ_R 分别为制造商和零售商的边际利润, 并考虑他们拥有相同的贴现率 λ ($\lambda > 0$), 则制造商、零售商和整个供应链的利润函数分别表示为

$$J_M = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left\{ \rho_M [a + \alpha G(t) + \beta U_R(t)] - \frac{1}{2} k_M U_M^2(t) - \frac{1}{2} \phi k_R U_R^2(t) \right\} dt \quad (4)$$

$$J_R = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left\{ \rho_R [a + \alpha G(t) + \beta U_R(t)] - \frac{1}{2} (1 - \phi) k_R U_R^2(t) \right\} dt \quad (5)$$

$$J_{MR} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left\{ (\rho_M + \rho_R) [a + \alpha G(t) + \beta U_R(t)] - \frac{1}{2} k_M U_M^2(t) - \frac{1}{2} k_R U_R^2(t) \right\} dt \quad (6)$$

考虑到时变延迟时间 $d(t)$ 将对问题的求解造成困难, 为便于研究, 本文假设 $d(t) = d$ 为常值.

2 分散式决策下广告均衡策略

在分散式决策下, 制造商和零售商均以自身利润最大化为目标. 制造商首先对零售商的地方性广告给予支持, 承担零售商的部分广告费用, 制定自身的广告参与率; 在制造商确定广告参与率后, 制造商和零售商再独立地决策各自的广告策略. 这是一个由制造商主导的两期博弈问题, 可以利用逆向归纳法求解.

命题 1 在分散式决策下, 制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$\begin{aligned} U_M^*(t) &= \frac{\alpha \gamma \rho_M}{(\lambda + \delta) k_M} e^{\delta t} \\ U_R^*(t) &= \frac{\beta \rho_R}{(1 - \phi^*) k_R} \end{aligned}$$

产品的最优品牌信誉为

$$G^*(t) = e^{-\delta t} G_0 + \frac{\alpha \gamma^2 \rho_M}{\delta (\lambda + \delta) k_M} e^{\delta t} (1 - e^{-\delta t})$$

并且制造商的最优广告参与率为

$$\phi^* = \begin{cases} \frac{2\rho_M - \rho_R}{2\rho_M + \rho_R}, & \frac{\rho_M}{\rho_R} > \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{\rho_M}{\rho_R} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

证明 首先, 给定制造商广告参与率 ϕ , 确定制造商和零售商的最优广告投入.

制造商的最优决策问题刻画为最优控制问题

$$\max_{U_M > 0} J_M$$

s. t. 式(1)

利用极大值原理^[28] 构造 Hamilton 函数

$$H_M = e^{-\lambda t} \left\{ \rho_M [a + \alpha G(t) + \beta U_R(t)] - \frac{1}{2} k_M U_M^2(t) - \frac{1}{2} \phi k_R U_R^2(t) \right\} + q(t) [\gamma U_M(t-d) - \delta G(t)] \quad (7)$$

令

$$\frac{\partial H_M}{\partial U_M} = -e^{-\lambda t} k_M U_M(t) + \gamma q(t) \frac{\partial U_M(t-d)}{\partial U_M(t)} = 0$$

$$\dot{q}(t) = -\frac{\partial H_M}{\partial G} = \delta q(t) - \alpha \rho_M e^{-\lambda t}$$

不妨设 $\frac{\partial U_M(t-d)}{\partial U_M(t)} = M(t)$, 则制造商的最优广告策略满足

$$U_M^*(t) = \frac{\gamma}{k_M} e^{\lambda t} M(t) q(t) \quad (8)$$

其中

$$q(t) = c e^{\delta t} + \frac{\alpha \rho_M}{\lambda + \delta} e^{-\lambda t}, c \in \mathbb{R} \quad (9)$$

根据文献[28], $M(t) = \Phi(t-d) = e^{\delta d}$, 所以

$$U_M^*(t) = \frac{c \gamma}{k_M} e^{(\lambda + \delta)t + \delta d} + \frac{\alpha \gamma \rho_M}{(\lambda + \delta) k_M} e^{\delta d}$$

由于当 $t \rightarrow \infty$ 时, 制造商投入的全国性广告水平是有限的, 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_M^*(t) < \infty$$

由此可得 $c = 0$, 故制造商最优广告投入为

$$U_M^*(t) = \frac{\alpha \gamma \rho_M}{(\lambda + \delta) k_M} e^{\delta d} \quad (10)$$

将式(10)代入式(1), 得到产品品牌信誉延迟微分方程(1)的解

$$G^*(t) = e^{-\delta t} G_0 + \frac{\alpha \gamma^2 \rho_M}{\delta(\lambda + \delta) k_M} e^{\delta t} (1 - e^{-\delta t}) \quad (11)$$

零售商的最优决策问题刻画为最优控制问题

$$\max_{U_R > 0} J_R$$

s. t. 式(1)

构造 Hamilton 函数

$$H_R = e^{-\lambda t} \left\{ \rho_R [a + \alpha G(t) + \beta U_R(t)] - \frac{1}{2} (1 - \phi) k_R U_R^2(t) \right\} + \eta(t) [\gamma U_M(t-d) - \delta G(t)] \quad (12)$$

利用极大值原理, 类似地, 求得零售商的最优

广告投入满足

$$U_R^*(t) = \frac{\beta \rho_R}{(1 - \phi) k_R} \quad (13)$$

其次, 制造商制定最优广告参与率. 将式(10)、式(11)和式(13)代入式(4), 得到制造商在均衡解下的利润函数

$$J_M = \frac{\alpha \rho_M}{\lambda} + \frac{\alpha \rho_M G_0}{\lambda + \delta} + \frac{\beta^2 \rho_M \rho_R}{\lambda(1 - \phi) k_R} - \frac{\phi \beta^2 \rho_R^2}{2\lambda(1 - \phi)^2 k_R} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \rho_M^2}{\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{\delta d} - \frac{\alpha^2 \gamma^2 \rho_M^2}{2\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{2\delta d}$$

将 J_M 对 ϕ 求最大值, 得到制造商的最优广告参与率

$$\phi^* = \begin{cases} \frac{2\rho_M - \rho_R}{2\rho_M + \rho_R}, & \frac{\rho_M}{\rho_R} > \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{\rho_M}{\rho_R} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{证毕.}$$

由命题1, 当存在合作广告时制造商和零售商的最优利润为

$$J_M^* = \frac{\alpha \rho_M}{\lambda} + \frac{\alpha \rho_M G_0}{\lambda + \delta} + \frac{\beta^2 (2\rho_M + \rho_R)^2}{8\lambda k_R} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \rho_M^2}{\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{\delta d} - \frac{\alpha^2 \gamma^2 \rho_M^2}{2\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{2\delta d} \quad (14)$$

$$J_R^* = \frac{\alpha \rho_R}{\lambda} + \frac{\alpha \rho_R G_0}{\lambda + \delta} + \frac{\beta^2 (2\rho_M \rho_R + \rho_R^2)}{4\lambda k_R} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \rho_M \rho_R}{\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{\delta d} \quad (15)$$

性质1 (a) 若制造商或零售商的边际利润增加, 则不会减少相应的广告投入. (b) 当制造商的边际利润与零售商边际利润的比值大于 1/2 时, 制造商才会承担零售商的部分广告费用, 否则制造商不承担零售商的任何广告费用. (c) 当制造商的边际利润增加或者零售商的边际利润降低时, 制造商能够提高广告参与率.

性质1 说明边际利润是促进供应链成员广告投入的主要因素. 为了提高供应链成员的边际利润, 制造商可以在保证产品质量的基础上降低生产成本, 零售商可在保证产品服务的基础上提高产品价格或降低可压缩成本(人才、质控). 如果制造商的边际利润增加, 则其投入的全国性广告也会增多, 并且制造商也将提高广告参与率以激

励零售商更多地广告投入. 如果制造商的边际利润相对于零售商边际利润较低, 则制造商没有能力承担零售商的部分广告费用; 但是, 如果零售商的边际利润过低, 即使制造商愿意承担零售商较高的广告费用, 也无法激励零售商的广告投入.

性质2 (a) 制造商全国性广告投入是关于广告延迟时间的增函数, 零售商地方性广告投入与广告延迟时间无关. (b) 制造商最优利润函数是关于广告延迟时间的减函数, 而零售商最优利润函数则是关于广告延迟时间的增函数. (c) 当贴现率 λ 增加或衰减率 δ 减小(但满足 $\lambda + \delta > 1/d$) 时, 制造商的广告投入就会随之降低.

性质2 表明广告延迟时间越长, 制造商为提高产品的品牌信誉所投入的广告越多. 由于广告投资效果具有一定的延时性, 在期望时间内, 全国性广告投入往往不会使产品的品牌信誉和销售量达到预期效果. 因此, 广告延迟时间越长, 制造商的宣传费用就越高而获得的利润越低. 但是制造商广告投入在一定程度上提升了产品的品牌信誉和销售量, 使得零售商的利润增加.

性质3 零售商品牌效应对产品销售量的影响值不影响供应链成员的最优决策, 但会影响他们的最优利润且品牌效应越大利润越高.

零售商是将产品直接销售给最终消费者的中间商, 零售商拥有良好的品牌效应有助于增强消费者的购买欲望, 进而刺激需求提高企业利润. 零售商可以通过服务、促销、价格和氛围等因素提升其在顾客中的品牌形象, 从而影响到顾客的购买行为.

推论1 在分散式决策下, 当制造商广告不发生延时效应时, 即广告发生即时效应($d = 0$), 制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$U_M^*(t) = \frac{\alpha\gamma\rho_M}{(\lambda + \delta)k_M}, U_R^*(t) = \frac{\beta\rho_R}{(1 - \phi^*)k_R}$$

产品的最优品牌信誉为

$$G^*(t) = e^{-\delta t}G_0 + \frac{\alpha\gamma^2\rho_M}{\delta(\lambda + \delta)k_M}(1 - e^{-\delta t})$$

并且制造商的最优广告参与率为

$$\phi^* = \begin{cases} \frac{2\rho_M - \rho_R}{2\rho_M + \rho_R}, & \frac{\rho_M}{\rho_R} > \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{\rho_M}{\rho_R} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

由推论1 知, 当广告发生即时效应时制造商和零售商的最优广告策略以及产品的最优品牌信誉均与文献[17]一致. 因此, 命题1 将供应链动态合作广告策略研究推广到了具有延时效应的情形.

推论2 在分散式决策下, 当不考虑零售商品牌效应(即 $a = 0$) 时, 制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$U_M^*(t) = \frac{\alpha\gamma\rho_M}{(\lambda + \delta)k_M}e^{\delta t}, U_R^*(t) = \frac{\beta\rho_R}{(1 - \phi^*)k_R}$$

产品的最优品牌信誉为

$$G^*(t) = e^{-\delta t}G_0 + \frac{\alpha\gamma^2\rho_M}{\delta(\lambda + \delta)k_M}e^{\delta t}(1 - e^{-\delta t})$$

并且制造商的最优广告参与率为

$$\phi^* = \begin{cases} \frac{2\rho_M - \rho_R}{2\rho_M + \rho_R}, & \frac{\rho_M}{\rho_R} > \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{\rho_M}{\rho_R} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

当存在合作广告时制造商和零售商的最优利润为

$$J_M^* = \frac{\alpha\rho_M G_0}{\lambda + \delta} + \frac{\beta^2(2\rho_M + \rho_R)^2}{8\lambda k_R} + \frac{\alpha^2\gamma^2\rho_M^2}{\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M}e^{\delta t} - \frac{\alpha^2\gamma^2\rho_M^2}{2\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M}e^{2\delta t}$$

$$J_R^* = \frac{\alpha\rho_R G_0}{\lambda + \delta} + \frac{\beta^2(2\rho_M\rho_R + \rho_R^2)}{4\lambda k_R} + \frac{\alpha^2\gamma^2\rho_M\rho_R}{\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M}e^{\delta t}$$

比较命题1 和推论2 可知, 无论考虑零售商品牌效应与否, 制造商和零售商最优决策均相同; 而当考虑零售商品牌效应时供应链成员的最优利润较高, 且零售商品牌效应值越大则利润越高. 由于在购物过程中, 消费者往往倾向于高知名度的零售商, 若制造商与品牌效应较高的零售商合作, 可使合作双方均获得较高的利润; 若制造商与品牌效应较低的零售商合作, 虽然合作广告项目可使制造商和零售商获利, 但获得的利润仍低于前者. 因此, 制造商寻找合作伙伴时需考虑零售商的品牌效应.

3 集中式决策下广告均衡策略

在集中式决策下, 供应链成员均以整个供应

链利润最大化为目标,此时,供应链的决策变量只有 $U_M(t)$ 和 $U_R(t)$.

命题2 在集中式决策下,制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$U_M^{**}(t) = \frac{\alpha\gamma(\rho_M + \rho_R)}{(\lambda + \delta)k_M} e^{\delta t}$$

$$U_R^{**}(t) = \frac{\beta(\rho_M + \rho_R)}{k_R}$$

产品的最优品牌信誉为

$$G^{**}(t) = e^{-\delta t} G_0 + \frac{\alpha\gamma^2(\rho_M + \rho_R)}{\delta(\lambda + \delta)k_M} e^{\delta t} (1 - e^{-\delta t})$$

证明 最优决策问题刻画为最优控制问题

$$\max_{U_M > 0, U_R > 0} J_{MR}$$

s. t. 式(1)

构造 Hamilton 函数

$$H_{MR} = e^{-\lambda t} \left\{ (\rho_M + \rho_R) [a + \alpha G(t) + \beta U_R(t)] - \frac{1}{2} k_M U_M^2(t) - \frac{1}{2} k_R U_R^2(t) \right\} + \mu(t) [\gamma U_M(t-d) - \delta G(t)] \quad (16)$$

应用极大值原理,得

$$\frac{\partial H_{MR}}{\partial U_M} = -e^{-\lambda t} k_M U_M(t) + \gamma \mu(t) \left[\frac{\partial U_M(t-d)}{\partial U_M(t)} \right] = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_{MR}}{\partial U_R} = e^{-\lambda t} [(\rho_M + \rho_R)\beta - k_R U_R(t)] = 0 \quad (18)$$

类似于命题1的求解过程,得到

$$U_M^{**}(t) = \frac{\alpha\gamma(\rho_M + \rho_R)}{(\lambda + \delta)k_M} e^{\delta t}, U_R^{**}(t) = \frac{\beta(\rho_M + \rho_R)}{k_R}$$

由于 H_{MR} 关于 $U_M(t)$ 和 $U_R(t)$ 的 Hessian 矩阵

$$\begin{bmatrix} -e^{-\lambda t} k_M & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda t} k_R \end{bmatrix}$$
 是负定的,所以 (U_M^{**}, U_R^{**})

为 J_{MR} 的唯一最优解,即为制造商和零售商的最优广告投入.将 $U_M^{**}(t)$ 代入式(1),得到式(1)的解

$$G^{**}(t) = e^{-\delta t} G_0 + \frac{\alpha\gamma^2(\rho_M + \rho_R)}{\delta(\lambda + \delta)k_M} e^{\delta t} (1 - e^{-\delta t})$$

证毕.

由命题2,进一步可求得整个供应链的最优利润为

$$J_{MR}^{**} = \frac{a(\rho_M + \rho_R)}{\lambda} + \frac{\alpha(\rho_M + \rho_R)G_0}{\lambda + \delta} + \frac{\beta^2(\rho_M + \rho_R)^2}{2\lambda k_R} + \frac{\alpha^2\gamma^2(\rho_M + \rho_R)^2}{\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{\delta t} - \frac{\alpha^2\gamma^2(\rho_M + \rho_R)^2}{2\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{2\delta t} \quad (19)$$

推论3 在集中式决策下,当制造商广告不发生延时效应时,即广告发生即时效应($d = 0$),制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$U_M^{**}(t) = \frac{\alpha\gamma(\rho_M + \rho_R)}{(\lambda + \delta)k_M}, U_R^{**}(t) = \frac{\beta(\rho_M + \rho_R)}{k_R}$$

产品的最优品牌信誉为

$$G^{**}(t) = e^{-\delta t} G_0 + \frac{\alpha\gamma^2(\rho_M + \rho_R)}{\delta(\lambda + \delta)k_M} (1 - e^{-\delta t})$$

推论4 在集中式决策下,当不考虑零售商品牌效应(即 $a = 0$)时,制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$U_M^{**}(t) = \frac{\alpha\gamma(\rho_M + \rho_R)}{(\lambda + \delta)k_M} e^{\delta t}, U_R^{**}(t) = \frac{\beta(\rho_M + \rho_R)}{k_R}$$

产品的最优品牌信誉为

$$G^{**}(t) = e^{-\delta t} G_0 + \frac{\alpha\gamma^2(\rho_M + \rho_R)}{\delta(\lambda + \delta)k_M} e^{\delta t} (1 - e^{-\delta t})$$

整个供应链的最优利润为

$$J_{MR}^{**} = \frac{\alpha(\rho_M + \rho_R)G_0}{\lambda + \delta} + \frac{\beta^2(\rho_M + \rho_R)^2}{2\lambda k_R} + \frac{\alpha^2\gamma^2(\rho_M + \rho_R)^2}{\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{\delta t} - \frac{\alpha^2\gamma^2(\rho_M + \rho_R)^2}{2\lambda(\lambda + \delta)^2 k_M} e^{2\delta t}$$

比较命题1、命题2及相关推论,可以给出:

命题3 无论广告延时效应发生与否,制造商和零售商的最优广告投入、产品的销售量和品牌信誉均满足 $U_M^*(t) < U_M^{**}(t)$ 、 $U_R^*(t) < U_R^{**}(t)$ 、 $S^*(t) < S^{**}(t)$ 和 $G^*(t) < G^{**}(t)$.

命题3说明,无论广告发生延时效应还是即时效应,集中式决策下制造商和零售商的广告投入、产品的销售量均高于分散式决策下的相应值.集中式决策可以激励广告的投入,进而促进产品的销售和品牌信誉的积累.当存在合作广告时,整个供应链利润的比较结果如下.

命题4 无论考虑零售商品牌效应与否,当延迟时间 $d \leq \frac{\ln[(3 - \phi^*)/4 + K]}{\delta}$ 时,集中式决策下整个供应链的利润均不低于分散式决

策下整个供应链的利润; 当延迟时间 $d > \frac{\ln [(3 - \phi^*) / 4 + K]}{\delta}$ 时, 分散式决策下整个供应链的利润均高于集中式决策下整个供应链的利润。

证明 由式(14)、式(15)和式(19)可知

$$J_{MR}^{**} - J_M^* - J_R^* = \frac{\beta^2 \rho_R^2}{8\lambda k_R} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 (\rho_M \rho_R + \rho_R^2)}{\lambda (\lambda + \delta)^2 k_M} e^{\delta d} - \frac{\alpha^2 \gamma^2 (2\rho_M \rho_R + \rho_R^2)}{2\lambda (\lambda + \delta)^2 k_M} e^{2\delta d} \quad (20)$$

于是 $J_{MR}^{**} \geq J_M^* + J_R^*$ 当且仅当

$$e^{\delta d} \leq \frac{3 - \phi^*}{4} + K \quad (21)$$

其中 $K = \sqrt{\frac{\beta^2 (\lambda + \delta)^2 k_M (1 - \phi^*) + (3 - \phi^*)^2}{8\alpha^2 \gamma^2 k_R}}$

由于 $\phi^* \in (0, 1)$, 有 $K > \frac{3 - \phi^*}{4}$, 所以 $\frac{3 - \phi^*}{4} + K > \frac{3 - \phi^*}{2} > 1$, 因此不等式(21)对延迟时间 d 的解存在 并且

$$d \leq \frac{\ln [(3 - \phi^*) / 4 + K]}{\delta}$$

故, 当 $d \leq \frac{\ln [(3 - \phi^*) / 4 + K]}{\delta}$ 时 $J_{MR}^{**} \geq J_M^* + J_R^*$, 反之, 则有 $J_{MR}^{**} < J_M^* + J_R^*$. 证毕.

命题 4 说明在合作广告下广告延迟时间是供应链成员选择决策机制的重要因素. 延迟时间存在一个阈值, 当延迟时间小于等于阈值时, 集中式决策下整个供应链的利润不低于分散式决策下的值, 且利润差的大小依赖于广告的延迟时间. 当广告延迟时间大于阈值时, 制造商和零售商投入的广告未达到期望效果, 此时供应链成员会倾向于以自身利益最大化为目标, 致使分散式决策下整个供应链的利润偏高.

4 数值分析

本节从分散式决策和集中式决策下供应链利润、产品品牌信誉以及延迟时间对制造商广告投入的影响三个方面进行数值分析, 以验证上述理论结果, 并从供应链决策角度予以解释.

4.1 供应链利润比较

制造商和零售商在分散式决策和集中式决策下的最优利润依赖于模型中各个外因参数的选取. 假设模型中各参数的取值分别为: 贴现率 $\lambda = 0.1$, 衰减率 $\delta = 0.1$, 边际利润 $\rho_M = 8$ 和 $\rho_R = 5$; 影响因子 $\alpha = 1.2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$, $k_M = 2$, $k_R = 1$; 品牌信誉初值 $G(0) = 3$, 零售商品品牌效应对产品销售量的影响值 $a = 2.5$. 在分散式决策和集中式决策下延迟时间对供应链成员利润的影响如图 1 和图 2 所示.

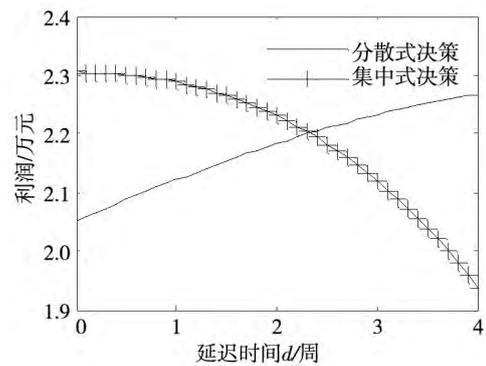


图 1 分散式和集中式决策下供应链的利润对比

Fig. 1 Supply chain profit comparison in the decentralized and centralized decisions

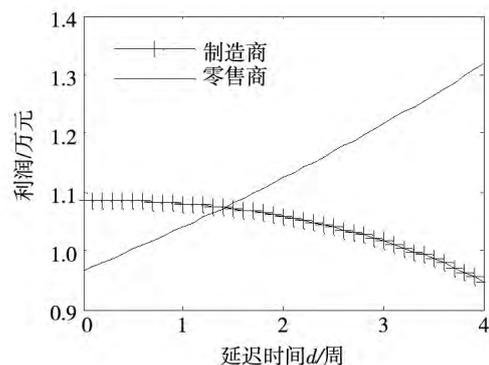


图 2 分散式决策下制造商和零售商的利润对比

Fig. 2 Profit comparison of manufacturer and retailer in the decentralized decision

由图 1 得知, 当广告延迟时间比较短或广告发生即时效应时, 集中式决策下供应链成员更高水平的广告投入会给供应链带来更高的利润, 此时制造商和零售商更倾向于集中式决策, 这与以往文献的结论一致; 而当广告延迟时间比较长时, 制造商和零售商进行集中式决策虽然会促进供应链成员广告投入, 但不会给整个供应链带来更高

的利润.因此,当广告延迟时间比较长时,制造商和零售商更倾向于分散式决策.由图2可知,分散式决策下零售商的利润随广告延迟时间的增加而呈现递增趋势,而制造商的利润却随广告延迟时间的增加而呈现递减趋势.因此,分散式决策下广告延时效应对零售商有利而对制造商不利.

4.2 产品品牌信誉比较

选取延迟时间 $d = 1$,令时间参数在区间 $[0, 50]$ 内变化,但保持4.1中其他参数不变,则当广告发生即时效应或延时效应时,两种决策机制下产品品牌信誉的比较由图3和图4所示.

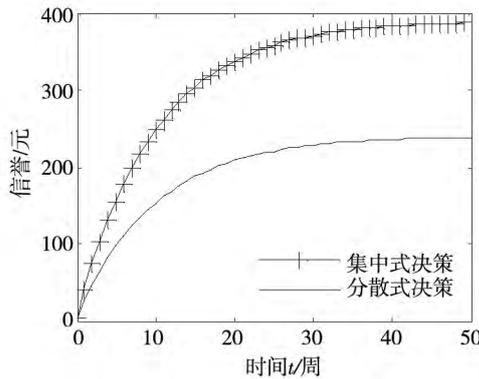


图3 广告发生即时效应时两种决策下品牌信誉对比

Fig. 3 Brand goodwill comparison in two decisions when existing advertising immediate effect

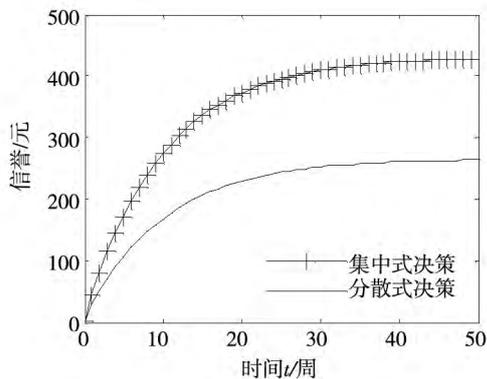


图4 广告发生延时效应时两种决策下品牌信誉对比

Fig. 4 Brand goodwill comparison in two decisions when existing advertising lagged effect

由图3和图4得知,无论发生延时效应与否,分散式决策下各个时刻品牌信誉值均低于集中式决策下的相应值.这说明集中式决策较分散式决策更有利于产品品牌信誉的积累.当广告发生延

时效应时,两种决策机制下产品的品牌信誉均高于广告发生即时效应时.这说明广告的短效行为(例如打折、促销、抽奖)能够暂时刺激消费、提高产品销售量,却不利于树立产品品牌信誉,而一次性的宣传行为往往是盲目的,对产品的销售和品牌持久发展并没有益处.

4.3 制造商全国性广告投入比较

令延迟时间在区间 $[0, 4]$ 内变化,采用4.1节所给出的参数,利用命题1、2和推论1、3,分别得到分散式决策和集中式决策下广告发生即时效应或延时效应时制造商最优的广告投入,从而给出广告延迟时间对全国性广告投入的影响如图5所示.

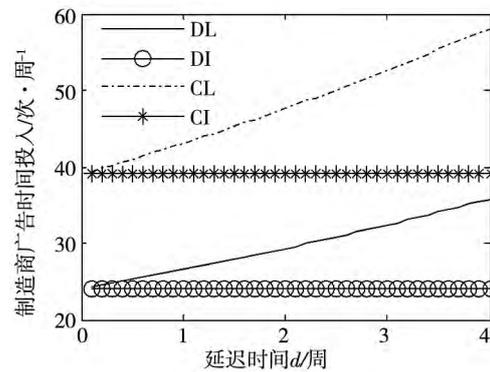


图5 制造商全国性广告投入随延迟时间的变化

Fig. 5 National advertising effort of manufacturer changes with delay time

在图5中,D、C分别表示分散式决策、集中式决策,I、L分别表示即时效应、延时效应.由图5得知,无论广告发生即时效应还是延时效应,集中式决策下制造商的广告投入均高于分散式决策.当广告发生延时效应时,在两种决策机制下全国性广告延迟时间越长,制造商投入的广告也越多,说明在一定范围内,广告延迟时间能够有效地激励制造商投入较高的全国性广告.当广告发生即时效应时,两种决策下制造商广告投入均为常值并且均低于广告发生延时效应的相应值.

5 结束语

利用微分对策研究当产品品牌信誉受广告延时效应影响时的广告策略问题,建立了考虑延时

效应的合作广告动态模型,给出了制造商和零售商在分散式决策和集中式决策下最优广告投入、产品品牌信誉、供应链利润以及分散式决策下最优的合作广告参与率.得到如下结论.

1) 集中式决策下制造商和零售商的最优广告投入和产品的销售量分别高于分散式决策下的值,但是集中式决策下整个供应链的利润不一定高于分散式决策下的值,利润的高低取决于广告延迟时间的长短.

2) 无论制造商承担零售商地方性广告成本的支付比例是多少,制造商的最优广告策略始终是常值.在一定范围内,广告延迟时间能够有效地激励制造商投入较高的全国性广告.

3) 较高的边际利润可以激励合作双方的广告投入.如果制造商拥有较高的边际利润,其投入的全国性广告也就越多;同时,若制造商有能力为

零售商提供较高的广告参与率,则零售商相应的广告投入也会提升.如果零售商的边际利润越多,其广告投入也越多.

本文揭示出:当广告延迟时间较短时,集中式决策优于分散式决策,这与在模型式(1)中忽略延时效应的结论一致,延时效应影响可以忽略;而当广告延迟时间较长时,分散式决策则优于集中式决策,这与模型式(1)中忽略延时效应的结论恰好相反,此时不能忽略广告延时效应的影响.今后可从两个方面深入考虑延时效应的问题:其一,在产品品牌信誉受制造商和零售商广告促销的双重影响下,考虑两种形式广告均发生延时效应的供应链动态合作广告问题;其二,将考虑延时效应的动态合作广告问题推广到供应链竞争(制造商之间竞争、零售商之间竞争或供应链之间竞争)的情形.

参 考 文 献:

- [1]Zhang J, Gou Q, Liang L, et al. Supply chain coordination through cooperative advertising with reference price effect[J]. *Omega*, 2013, 41(2): 345-353.
- [2]Nagler M G. An exploratory analysis of the determinants of cooperative advertising participation rates[J]. *Marketing Letters*, 2006, 17(2): 91-102.
- [3]Yan R. Cooperative advertising, pricing strategy and firm performance in the e-marketing age[J]. *Journal of the Academy of Marketing Science*, 2010, 38(4): 510-519.
- [4]Tsurumi H. A comparison of alternative optimal models of advertising expenditures: Stock adjustment vs. control theoretic approaches[J]. *The Review of Economics and Statistics*, 1973, 55(2): 156-168.
- [5]Berger P D. Vertical cooperative advertising ventures[J]. *Journal of Marketing Research*, 1972, 9(3): 309-312.
- [6]Berger P D, Magliozzi T. Optimal co-operative advertising decisions in direct-mail operations[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1992, 43(11): 1079-1086.
- [7]Roslow S, Laskey H A, Nicholls J A F. The enigma of cooperative advertising[J]. *Journal of Business & Industrial Marketing*, 1993, 8(2): 70-79.
- [8]Huang Z, Li S X. Co-op advertising models in manufacturer-retailer supply chains: A game theory approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 135(3): 527-544.
- [9]Karray S, Amin S H. Cooperative advertising in a supply chain with retail competition[J]. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(1): 88-105.
- [10]Sheen G J, Wang S Y, Yeh Y. The impact of the distance-dependent promotional effect on the promotion cost sharing decision[J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(3): 544-560.
- [11]Karray S. Cooperative promotions in the distribution channel[J]. *Omega*, 2015, 51(3): 49-58.
- [12]Hong X, Xu L, Du P, et al. Joint advertising, pricing and collection decisions in a closed-loop supply chain[J]. *International Journal of Production Economics*, 2015, 167: 12-22.

- [13] Zhao L, Zhang J, Xie J. Impact of demand price elasticity on advantages of cooperative advertising in a two-tier supply chain [J]. *International Journal of Production Research*, 2016, 54(9): 2541–2551.
- [14] Nerlove M, Arrow K J. Optimal advertising policy under dynamic conditions [J]. *Economica*, 1962, 29(114): 129–142.
- [15] Jørgensen S, Siguré S P, Zaccour G. Dynamic cooperative advertising in a channel [J]. *Journal of Retailing*, 2000, 76(1): 71–92.
- [16] Jørgensen S, Taboubi S, Zaccour G. Retail promotions with negative brand image effects: Is cooperation possible? [J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 150(2): 395–405.
- [17] 张庶萍, 张世英. 基于微分对策的供应链合作广告决策研究 [J]. *控制与决策*, 2006, 21(2): 153–162.
Zhang Shuping, Zhang Shiyong. Dynamic cooperative advertising strategies based on differential games in a supply chain [J]. *Control and Decision*, 2006, 21(2): 153–162. (in Chinese)
- [18] He Y, Gou Q, Wu C, et al. Cooperative advertising in a supply chain with horizontal competition [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, article ID 607184, 2013: p16.
- [19] Zhou M, Lin J. Optimal advertising model in a dynamic marketing with competing brands [J]. *International Journal of Manufacturing Technology and Management*, 2015, 29(1/2): 116–137.
- [20] 聂佳佳, 熊中楷. 多种广告媒体下纵向合作广告的微分对策模型 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(5): 1–10, 61.
Nie Jiajia, Xiong Zhongkai. Differential game models of vertical cooperative advertising with multiple advertising media [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(5): 1–10, 61. (in Chinese)
- [21] 熊中楷, 聂佳佳, 熊榆. 零售商竞争下纵向合作广告的微分对策模型 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(6): 11–22, 32.
Xiong Zhongkai, Nie Jiajia, Xiong Yu. Vertical cooperative advertising model with competing retailers in supply chains with stochastic differential game [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(6): 11–22, 32. (in Chinese)
- [22] 聂佳佳. 供应链竞争下基于微分对策的合作广告模型 [J]. *系统管理学报*, 2011, 20(5): 578–588.
Nie Jiajia. Cooperative advertising model with competing supply chains with differential game [J]. *Journal of Systems Management*, 2011, 20(5): 578–588. (in Chinese)
- [23] Zhou M, Lin J. Cooperative advertising and pricing models in a dynamic marketing channel [J]. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 2014, 23(1): 94–110.
- [24] 徐春秋, 赵道致, 原白云, 等. 上下游联合减排与低碳宣传的微分博弈模型 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(2): 53–65.
Xu Chunqiu, Zhao Daozhi, Yuan Baiyun, et al. Differential game model on joint carbon emission reduction and low-carbon promotion in supply chains [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(2): 53–65. (in Chinese)
- [25] 王素凤, 杨善林, 彭张林. 面向多重不确定性的发电商碳减排投资研究 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(2): 31–41.
Wang Sufeng, Yang Shanlin, Peng Zhanglin. Research on the power producer's carbon abatement investment in view of multiple uncertainties [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(2): 31–41. (in Chinese)
- [26] Luhta I, Virtanen I. Non-linear advertising capital model with time delayed feedback between advertising and stock of goodwill [J]. *Chaos, Solutions & Fractals*, 1996, 7(12): 2083–2104.
- [27] 刘易斯·卡布罗. 产业组织导论 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2002: 178–189.
Cabral L M B. *Introduction to Industrial Organization* [M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2002: 178–189. (in Chinese)
- [28] Basin M, Gonzalez J R. Optimal control for linear systems with multiple time delays in control input [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 91–97.

Dynamic cooperative advertising strategies in a supply chain with lagged effect

CHEN Dong-yan^{1,2}, YU Hui¹, HOU Ling²

1. School of Management, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;

2. School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China

Abstract: The lagged effect is a common phenomenon in the process of supply chain advertising, which plays an important role in making cooperative advertising strategy of supply chains. This paper studies cooperative advertising strategy in a supply chain having lagged effect on the product's brand goodwill and develops a dynamic brand goodwill model with time-delay and a product sales model with brand goodwill. By applying the Maximum principle, the optimal advertising strategies of both the manufacturer and the retailer, the brand goodwill of product, and the entire supply chain profit are obtained in the decentralized and centralized decisions, respectively. Also, the optimal advertising cost sharing rate is given in the decentralized decision. The results indicate that the optimal advertising investment and the sales of products are higher in the centralized decision than in the decentralized decision, yet the entire supply chain profit is higher in the centralized decision when the delay time is less than a given threshold value. The results also offer a reference for making advertising strategy and choosing decision mechanism in a supply chain. Finally, numerical examples illustrate the impact of delay time on the optimal advertising strategy and decision mechanism.

Key words: cooperative advertising; lagged effect; dynamic model; differential game