

# 基于次梯度投影的泛投资组合选择策略<sup>①</sup>

李 斌, 张 迪, 唐松慧

(武汉大学经济与管理学院金融系, 武汉 430072)

**摘要:** 在线投资组合选择(online portfolio selection)问题是当前量化投资领域一个重要的研究问题. 近些年来,可投资标的的爆炸式增长急需能够有效计算的投资组合选择策略,而现有高绩效算法大多具有指数级或多项式级的时间复杂度,不利于在实际中应用. 由此,本文提出了一种基于次梯度投影的泛投资组合选择策略 SGP. 将次梯度投影的思想应用到资产组合构建的过程中,得到策略的再平衡规则. 理论上,本文分析了次梯度投影算法的竞争性能,证明了该策略是一个泛投资组合选择策略;并发现该算法具有线性时间复杂度. 实证上,验证了 SGP 策略在美国与中国市场的表现. 结果表明,SGP 策略能够实现和最新的泛投资组合选择策略相当的收益率,而算法运行时间短于现有策略. 参数敏感性分析表明 SGP 策略对参数选择不敏感;交易成本敏感性分析表明 SGP 策略能够承受合理的交易成本.

**关键词:** 在线投资组合选择; 泛投资组合选择; 次梯度投影; 最优定常再调整策略

**中图分类号:** F069    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1007-9807(2018)03-0094-11

## 0 引 言

在线投资组合选择<sup>[1]</sup>通过在一系列资产间分配财富,来实现确定的长期目标,比如风险收益或收益的最大化,是量化投资领域的一个研究重点. 当前学术界提出了两种理论来解决该问题. 均值方差理论<sup>[2,3]</sup>通过权衡组合期望收益和风险来构建投资组合,适合于单期投资;而资本增长理论<sup>[4,5]</sup>通过最大化组合的期望对数收益率来构建组合,适用于多期投资. 由于实际情况中均为多期投资<sup>[6]</sup>,在线投资组合选择策略主要按照资本增长理论来设计. 在线投资组合选择的一类研究问题是建立在定常再调整策略 CRP (constant rebalanced portfolios) 上的. CRP 是固定投资比例的投资选择策略,也是资本增长理论的一个特例. Cover<sup>[7]</sup>证明了最优定常再调整策略 BCRP (best constant rebalanced portfolios) 存在的一系列

特性,并提出了第一个泛投资组合选择策略 UP (universal portfolios) 来追踪 BCRP 策略的绩效. 值得注意的是,BCRP 策略是离线策略,只能在获得所有股票信息之后才能确定,不具有可操作性. 在这之后,一系列文章均提出了泛投资组合选择策略来追踪 BCRP 的绩效<sup>[8,9]</sup>.

当前的可投资标的呈指数增长,投资组合优化的时间成本逐渐成为策略设计中一个重要的问题. 如果时间复杂度较高,比如指数级或多项式级,则策略的实际应用会存在计算的瓶颈. 当前的策略,具有较紧后悔度边界的策略,比如 UP 和 ONS 策略,具有较高的时间复杂度. 比如 UP 具有指数级时间复杂度,而 ONS 具有三次时间复杂度. 另一方面,具有较低时间复杂度的策略,比如 EG,具有较松的边界. 比如 EG 策略具有线性时间复杂度,而其后悔度边界却弱于 UP

① 收稿日期: 2016-07-14; 修订日期: 2017-06-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71401128; 91646206); 武汉大学人文社科青年学者学术团队建设计划项目(WHU2016012); 武汉大学自主科研学科交叉类项目(2042017k0225).

作者简介: 李 斌(1983—),男,江苏扬州人,博士,副教授. Email: binli.whu@whu.edu.cn

和 ONS. 如何实现后悔度边界和计算时间复杂度之间的权衡, 这是在线投资组合选择研究中一个非常重要的问题.

由此, 本文提出了两种遵循趋势交易思想的次梯度投影策略 SGP (sub-gradient projection). 理论上, 本文证明了这两个算法的后悔度边界, 并证明了所提出的算法均为泛投资组合选择策略. 同时, 所提出的算法具有线性时间复杂度, 能够满足资产数量增加所带来的计算需求. 实证上对 SGP 策略及现有策略在 Cover 的双股票数据集及收集的 A 股数据集进行了回测. 结果显示, SGP 策略能够在绩效上与现有最新策略比拟, 但其回测时间显著优于最新策略, 从而可以在时间要求较高的场景中使用, 比如高频交易. 同时, SGP 策略受参数值的影响较小, 非常稳健, 因此在实际应用中易于选择到有效的参数值.

## 1 问题设定和文献综述

本文采用 Cover 所设定的投资场景<sup>[7]</sup>. 假定金融市场上有  $m$  个可投资标的, 投资期限为  $n$  个交易期. 在交易期  $t$ , 资产价格变化用正的相对价格向量表示  $x_t \in \mathfrak{R}_+^m$ . 整个交易期市场序列为  $x^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ , 第  $t$  个向量第  $i$  个元素  $x_{t,i}$  表示第  $i$  种资产在第  $t$  期的收盘价与前一日收盘价的比值, 即第  $i$  种资产在第  $t$  期的收益为  $x_{t,i}$ . 基于市场信息, 每一期开市前策略会构建并再平衡至一个投资组合. 每项投资用投资组合向量  $\Delta$ :

$b_t = (b_{t,1}, \dots, b_{t,m})$ ,  $b_{t,i} \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m b_{t,i} = 1$  来表示,

其中  $b_{t,i}$  表示第  $t$  期投资于资产  $i$  的比例. 这样, 一种策略在整个投资期的决策就可用序列  $b^n = \{b_1, \dots, b_n\}$  来表示. 那么, 投资者在第  $t$  期的投资回报为  $s_t = b_t^T x_t = \sum_{i=1}^m b_{t,i} x_{t,i}$ . 由于投资者将所有财富再投资, 那么  $n$  个投资期以后, 投资者的累积财富为  $S_n = S_0 \prod_{t=1}^n b_t^T x_t$ , 其中  $S_0$  表示初始财富, 一般设为 1. 同以前的文献类似<sup>[1-7]</sup>, 上述问题设定暗含着三项假设: 1) 交易成本为零; 2) 市场具有完全流动性; 3) 市场冲击为零. 这些假设对于策略的实用性具有重要的作用, 本文将在

第 3.4 节针对上述假设进行讨论.

在泛投资组合选择的研究中, BCRP 策略可以最大化组合的对数期望收益率, 因此在线投资组合策略将 BCRP 策略作为逼近目标<sup>[1,7]</sup>. 假设所有价格信息  $x^n$  已知时, 存在投资期内每期相同的组合  $b^*$ , 使得

$$b^* = \operatorname{argmax}_{b \in \Delta} \sum_{i=1}^n \ln(b \cdot x_i) \quad (1)$$

其中  $b^*$  即为最优定常再调整策略的投资组合 BCRP. Cover<sup>[7]</sup> 证明了 BCRP 存在一系列特性, 并将 BCRP 作为在线投资组合策略的目标策略. 定义一种策略  $Alg$  的后悔度为

$$\operatorname{Regret}_n(Alg) = \sum_{i=1}^n \ln(b^* \cdot x_i) - \sum_{i=1}^n \ln(b_i \cdot x_i) \quad (2)$$

如果有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Regret}_n(Alg) \rightarrow 0$ , 那么称算法  $Alg$  为泛投资组合策略.

Cover<sup>[7]</sup> 提出第一种泛投资组合策略 UP (universal portfolios). 其本质是将定常再调整取值域内的所有策略按照买入并持有的方式组合起来. Helmbold 等<sup>[8]</sup> 提出 EG (exponential gradient) 策略, 其本质是追踪上期表现最好的股票但不过多偏离当前投资组合. EG 策略的后悔度边界为  $O(\sqrt{n \ln m})$ , 运行时间为  $(mn)$ . 后悔度并没有 UP 那样紧, 但其线性运行时间显著优于 UP 策略. Agarwal 等<sup>[9]</sup> 提出了 ONS (online newton step), 该方法通过在线凸优化技术来解决优化问题, 组合的时间成本为  $(m^3 n)$ . Das 和 Banerjee<sup>[10]</sup> 提出了元优化算法, 即 OGU 和 ONU, 它们是 EG 和 ONS 的自然拓展, 并证明了任何包含泛策略的混合策略依然是泛策略. Zhang 和 Yang<sup>[11]</sup> 利用 WAA 算法综合考虑所有专家的意见, 提出了具有泛特性的 WAAS 和 WAAC 策略. 实证结果表明, WAAC 策略能够达到与最优投资专家相当的最终累计收益. 刘善存等<sup>[12]</sup> 从双向交易费用的角度出发, 设计了考虑交易费用的在线投资组合策略. 张卫国等<sup>[13]</sup> 利用集成算法的思想, 从单一集成策略 SAS 出发, 设计了混合集成策略 MAS, 并进行了算例分析. 该算法没有统计信息假设, 理论上具有较好的性质. 张永等<sup>[14]</sup> 结合线性学习

函数,对 UP 算法进行了改进,提出了 LFM 策略. 该算法既减小了 UP 的计算时间,又提高了收益. 罗勇和朱波<sup>[5]</sup>根据大数定理推导了对数效用函数情形下的最优资金配置比例,并利用 14 种交易活跃的中国商品期货合约进行了实证,认为 Kelly 模型在高频交易情形下具有较高的使用价值. 高丽<sup>[15]</sup>利用包括动量效应和反转效应在内的市场异象,结合 PA 分类学习算法,构建了 PACS 等策略,并利用中国沪深股票市场的数据进行了实证.

除了泛投资组合策略,在线投资组合选择理论的其他分支认为最优定常再调整策略并非事后最优,因此不以追踪 BCRP 策略为目标. Borodin 等<sup>[16]</sup>基于均值回归的特性,提出了 Anticor 策略来挖掘收益数据中的正滞后互相关和负自相关. Anticor 虽无理论上的贡献,但其实证结果远超之前的策略. Györfi 等<sup>[17]</sup>基于模式识别的思想,提出 BK 策略来挖掘收益数据中的模式,并证明了在未知分布下的最优增长策略. Ormos 和 Urbán<sup>[18]</sup>在 BK 策略的基础上,考虑了交易成本. Li 等<sup>[19]</sup>在 BK 策略的基础上,提出使用相关系数来识别模式,显著地提升了实证效果. 由于均值受数据序列的噪声和异常点较大,Huang 等<sup>[20]</sup>利用稳健中位数回归提出了 RMR 算法. 算例结果显示,RMR 算法能够克服现存均值回归算法的缺点,并且能够取得更好的绩效. 近年来, Li 等<sup>[21,22]</sup>利用在线学习及股票市场的均值回归特性,设计了一系列启发式的在线投资组合选择策略. 虽不以 BCRP 策略为追踪目标,但这些策略挖掘了股票收益的特性,因此实证效果非常突出.

## 2 基于次梯度投影的泛投资组合策略

### 2.1 策略设计

Zinkevich<sup>[23]</sup>针对凸性规划问题,从梯度下降的角度出发,提出了贪婪投影算法. 该算法比专家算法设定更加一般化,可以解决目前还没有解决的凸函数任意序列问题,并且证明了梯度下降可以解决在线凸问题. 与专家算法相比,梯度下降方法有助于改善后悔度边界. 另一方面,金融市场交易,尤其在程序化交易中,交易速度是一

个非常关键的指标. 凸性优化的时间复杂度较高<sup>[9]</sup>,而线性优化时间复杂度通常为线性,显著优于凸性优化. 因此,本文采用线性优化函数,基于次梯度投影算法来构建最优组合.

首先,定义两个损失函数,并通过投资者获得对数收益率来衡量投资者对其决策的后悔程度. 通常而言,收益率与损失函数值成反比关系. 投资收益率越高,投资者越不后悔,则损失函数值越小. 优化的目标是最小化策略的后悔度,即与 BCRP 策略的累计对数收益率的差值. 因此,定义第一个损失函数为策略单期对数收益率的负数

$$\ell_t^1(\mathbf{b}) = -\ln(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_t) \tag{3}$$

最小化损失函数能够实现逼近 BCRP 策略对数收益率的目的. 为了防止过拟合,权重向量的二次模作为正则项被加入到损失函数中<sup>[9]</sup>. 第二个损失函数定义为

$$\ell_t^2(\mathbf{b}) = -\ln(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_t) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{b}\|^2 \tag{4}$$

当参数  $\lambda$  取 0 值时,第二个损失函数退化为第一个损失函数,因此第二个损失函数是第一个损失函数的推广. 在策略设计中,参数  $\lambda$  的影响是两个方面的. 一方面,参数  $\lambda$  控制着优化过程中最终投资组合向最优对数投资组合的趋近程度. 其取值越大,最终投资组合越趋近于最优对数投资组合,策略表现得越激进. 另一方面,过于激进的策略可能会在再平衡过程中引发较大的交易成本. 这是因为过于激进的投资组合权重波动较大,由此产生的交易成本会降低策略的实用性. 因此,合理设定参数  $\lambda$  能够在一定程度上实现策略激进程度与交易成本间的权衡取舍.

接着,基于梯度下降的思想,本文定义一个中间资产组合

$$\mathbf{b}_{t+1/2} = \mathbf{b}_t - \eta_t \nabla_t \ell_t(\mathbf{b}_t) \tag{5}$$

其中第二项表示上述损失函数  $\ell_t$  在  $\mathbf{b}_t$  上的次梯度投影. 对于第一个损失函数  $\ell_t^1$ ,投影算子为  $\nabla_t^1 = -\frac{\mathbf{x}_t}{\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t}$ ,参数  $\eta_t = t^{-1/2}$ . 对于第二个损失函数  $\ell_t^2$ ,投影算子为  $\nabla_t^2 = \lambda \mathbf{b}_t - \frac{\mathbf{x}_t}{\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t}$ ,并取  $\eta_t = 1/(\lambda t)$ .  $\lambda$  控制着策略的激进程度,决定了策略从  $\mathbf{b}_{t-1}$  到  $\mathbf{b}$  的移动速度. 其取值越大,最终

投资组合越接近最优投资组合, 但过大的再平衡可能会引发较大的交易成本. 第二步, 将  $b_{t+1/2}$  投影到投资组合单域集上<sup>[24]</sup>, 即  $b_{t+1} = \operatorname{argmin}_{b \in \Delta} \| b - b_{t+1/2} \|$  其中  $\Delta = \{ b: 1 \cdot b = 1, b \geq 0 \}$ . 算法 1 总结了 SGP 的具体流程.

该算法从梯度下降的角度出发, 采用财富对数的相反数作为损失函数, 进行优化来解决在线组合问题. 本文的创新之处在于次梯度投影算子采用了线性算子, 整个策略是线性的, 从而大大节省了优化时间. 随后的章节将从理论和实证两个方面证明, 与其他策略相比, 该策略可以达到相同绩效表现, 时间复杂度更小, 运行时间也更短.

### 2.2 策略泛特性分析

在符合独立同分布的市场中, BCRP 策略能够实现最大的对数增长率. 能够达到收敛于 BCRP 策略对数增长率的策略被称为泛投资组合策略. 本节从后悔度的角度证明两个 SGP 策略是泛投资组合策略. 本文的证明思路如下: 定理 1 给出了 SGP-1 的后悔度. 定理 2 给出了 SGP-2 的后悔度. 根据定理 1 和定理 2, 结合泛投资组合特性得到推论 1 和推论 2, 由此证明 SGP 算法为泛投资组合策略.

#### 次梯度投影策略 (SGP)

输入:  $x^n$ : 历史市场相对价格序列

输出:  $S^n$ : 期末累积财富

参数:  $\lambda$ : 策略激进程度

1: 初始化  $b_1 = \{ \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \}$ ,  $S_0 = 1$ .

2: 在每个投资期  $t = 1, 2, \dots, n$  进行如下决策:

3: 接收第  $t$  期的相对价格向量:  $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{tm})$

4: 更新累积财富:  $S_t = S_{t-1} \times (b_t \cdot x_t)$

5: 计算次梯度投影算子

$$\nabla_t = \begin{cases} -\frac{x_t}{b_t \cdot x_t} & (SGP-1) \\ \lambda b_t - \frac{x_t}{b_t \cdot x_t} & (SGP-2) \end{cases}$$

6: 计算中间资产组合:  $b_{t+1/2} = b_t - \eta_t \nabla_t$

7: 投影计算最终资产组合

$$b_{t+1} = \operatorname{argmin}_{b \in \Delta_m} \| b - b_{t+1/2} \|$$

8: 重复步骤 3-7, 直至投资期末.

算法 1: 基于次梯度投影的在线投资组合策略

Alg. 1: Sub-gradient projection based online portfolio selection strategy

定理 1 SGP-1 算法有如下绩效保证: 假定市

场有正参数  $\alpha$ . 对于任意  $\eta_t$ , 那么  $Regret_n(SGP-1) \leq (2 + \frac{m}{\alpha^2}) \sqrt{n}$ .

证明 为得到贪婪投影函数算法的边界, 需要计算单域和损失函数的直径  $\| F \| = \max_{x, y \in \Delta_m} d(x, y) \leq \| x \| + \| y \| \leq 2$  和  $\| \nabla_t \| = \frac{\| x \|}{b \cdot x} \leq \frac{\sqrt{m}}{\alpha}$ .

引用 Zinkevich<sup>[23]</sup> 的定理 1, 可得

$$\begin{aligned} Regret_n(SGP-1) &\leq 2\sqrt{n} + (\sqrt{n} - \frac{1}{2}) \frac{m}{\alpha^2} \\ &= (2 + \frac{m}{\alpha^2}) \sqrt{n} - \frac{m}{2\alpha^2} \\ &\leq (2 + \frac{m}{\alpha^2}) \sqrt{n} \end{aligned}$$

接下来分析 SGP-2 算法.

定理 2 假定市场有正参数  $\alpha$ , 则 SGP-2 算法产生的投资组合向量的后悔度有如下的边界

$$\begin{aligned} Regret_n(SGP-2) &= \sum_{t=1}^n \ln(b \cdot x_t) - \sum_{t=1}^n \ln(b_t \cdot x_t) \\ &\leq \lambda \frac{(1 + \ln(n+n))}{2} + \frac{m}{\lambda} \frac{(1 + \ln n)}{2\alpha^2} \end{aligned}$$

当  $\lambda = \sqrt{\frac{m(1 + \ln n)}{\alpha^2(1 + \ln(n+n))}}$  时, 则有

$$\begin{aligned} Regret_n(SGP-2) &\leq \sqrt{(1 + \ln n)(1 + \ln(n+n))} \frac{\sqrt{m}}{\alpha} \end{aligned}$$

证明 再平衡过程可以写为  $b_{t+1} = \prod_{\Delta_m} (b_t - \eta_t \nabla_t)$ . 因此, 证明该引理的关键是使得再平衡条件满足 Shalev-Shwartz 等<sup>[25]</sup> 的引理 1 中列示的条件. 由于  $f_i$  是一个关于  $\lambda$  的凸函数.

接下来, 划定  $\| \nabla_t \|$  的边界

$$\begin{aligned} \| \nabla_t \|^2 &= \left\| \lambda b_t - \frac{x_t}{b_t \cdot x_t} \right\|^2 \\ &\leq \lambda^2 \| b_t \|^2 + \frac{\| x_t \|^2}{(b_t \cdot x_t)^2} \\ &\leq \lambda^2 + \frac{m}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{6}$$

引用 Shalev-Shwartz 等<sup>[25]</sup> 的引理 1, 结合后悔度定义, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \ell_i^2(\mathbf{b}_i) - \sum_{i=1}^n \ell_i^2(\mathbf{b}) \\ & \leq (\lambda^2 + \frac{m}{\alpha^2}) \frac{(1 + \ln n)}{2\lambda} \\ & = (\lambda + \frac{m}{\lambda\alpha^2}) \frac{(1 + \ln n)}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

分开损失函数和正则项，并整理各项，由式(7)得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \ln(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^n \ln(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i) \\ & \leq (\lambda + \frac{m}{\lambda\alpha^2}) \frac{(1 + \ln n)}{2} + \frac{\lambda n}{2} \|\mathbf{b}\|^2 - \\ & \quad \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{b}_i\|^2 \\ & \leq (\lambda + \frac{m}{\lambda\alpha^2}) \frac{(1 + \ln n)}{2} + \frac{\lambda n}{2} \\ & = \lambda \frac{(1 + \ln(n+n))}{2} + \frac{m(1 + \ln n)}{2\alpha^2\lambda} \end{aligned} \quad (8)$$

不妨设定  $\lambda = \sqrt{\frac{m(1 + \ln n)}{\alpha^2(1 + \ln(n+n))}}$ ，则

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \ln(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^n \ln(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i) \\ & \leq \lambda \frac{(1 + \ln(n+n))}{2} + \frac{m(1 + \ln n)}{2\alpha^2\lambda} \\ & = \frac{\sqrt{m}}{2\alpha} \sqrt{(1 + \ln n)(1 + \ln(n+n))} + \\ & \quad \frac{\sqrt{m}}{2\alpha} \sqrt{(1 + \ln n)(1 + \ln(n+n))} \\ & = \frac{\sqrt{m}}{\alpha} \sqrt{(1 + \ln n)(1 + \ln(n+n))} \end{aligned} \quad (9)$$

由此得证。

**推论 1** SGP-1 和 SGP-2 策略均为泛投资组合选择策略。

证明 根据定理 1 和泛投资组合特性，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Regret_n(\text{SGP} - 1)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{m}{\alpha^2}) \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

由此证明 SGP-1 是泛投资组合选择策略。

根据定理 2 和泛投资组合特性，

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Regret_n(\text{SGP} - 2)}{n} \leq \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m}}{\alpha} \frac{\sqrt{(1 + \ln n)(1 + \ln(n+n))}}{n} = 0 \end{aligned}$$

由此证明 SGP-2 是泛投资组合选择策略。

因为 SGP-1 算法中没有参数与投资期数  $n$  有关，因此推论 1 可以保证 SGP-1 是泛投资组合策略。而 SGP-2 策略中参数  $\lambda$  取值与投资期数  $n$  有关，同时，推论 1 并不能完全保证 SGP-2 策略是泛投资组合策略。采用文献 [8] 中的分阶段技巧可以证明：在  $n$  未知的情况下，SGP-2 是泛投资组合策略。分阶段技巧证明选取一个足够大的投资期数  $n(n > m^8)$ ，并将第一个和第二个含有  $m^8$  期的连续阶段视为第零个和第一个阶段。并将接下来包含  $2^i m^8$  期的连续投资期视为第  $i(i \geq 2)$  个阶段。在每个投资阶段重新初始化在线组合模型，将  $2^i m^8$  视为定理 2 中的  $n$  取值，并按照 SGP-2 策略完成参数更新投资组合，称为分阶段 SGP-2 策略。

**推论 2** 分阶段 SGP-2 策略为泛投资组合选择策略。

证明 当  $n > 12$  时，因为  $0 < 1 + \ln n < \sqrt{n}$  和  $0 < 1 + \ln(n+n) < n^{11/8}$ ， $\sqrt{1 + \ln n} < n^{1/4}$  和  $\sqrt{1 + \ln(n+n)} < n^{11/16}$  成立。

根据定理 2，有

$$\begin{aligned} & Regret_n(\text{SGP} - 2) \leq \\ & \frac{\sqrt{m}}{\alpha} \sqrt{1 + \ln(n+n)} \sqrt{1 + \ln n} < \\ & \frac{\sqrt{m}}{\alpha} n^{15/16} \leq \frac{1}{\alpha} (m^8) 1/16n^{15/16}. \end{aligned}$$

随后的证明过程同文献 [13] 定理 3 和文献 [14] 定理 4 类似。首先计算出最后一个阶段的上界  $b$ ，从分阶段 SGP-2 策略的实施过程知  $b = \ln_2(n/m^8)$ 。其次，有

$$Regret_n(\text{SGP} - 2) \leq \frac{m^8}{\alpha} [1 + 4(n/m^8)^{15/16}]$$

即有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Regret_n(\text{SGP} - 2)}{n} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^8}{\alpha} \frac{[1 + 4(n/m^8)^{15/16}]}{n} = 0 \end{aligned}$$

则分阶段 SGP-2 策略能够追踪 BCRP 策略得证。

为了实现累积收益的最大化，本文实证部分采用有限个投资专家混合的方式，即将不同参数的 SGP-2 策略混合。根据文献 [23]，任何一个泛投资组合策略和启发式策略混合组成的 MLA 系统，既可以保持泛特性，也能够保证高性能。这

样,混合后得到的策略依然是泛投资组合策略,理论上依然能够实现和 BCRP 策略相当的收益率.

### 2.3 后悔度与时间复杂度分析

本节从理论上进一步比较 SGP 算法与几种现存的泛投资组合的理论后悔度边界和时间复杂度,对应的后悔度和计算时间复杂度如表 1 所示.

表 1 SGP 算法和现有策略的后悔度与时间复杂度比较  
Table 1 Comparison of regret and time complexity for SGP and existing strategies

策略	后悔度	时间复杂度
UP	$m \ln n$	$n^m$
EG	$\sqrt{n \ln m}$	$mn$
ONS	$m^{1.5} \ln(mn)$	$m^3 n$
SGP-1	$\sqrt{nm}$	$mn$
SGP-2	$\sqrt{mn \ln n}$	$mn$

SGP 策略在后悔度上弱于采用凸性优化的 ONS 策略. 从表 1 中可以看出,SGP 策略的后悔度边界并非最优.SGP-1 为  $\sqrt{nm}$ ,而对应地 SGP-2 为  $\sqrt{mn \ln n}$ ,弱于 UP 算法和 EG 算法的后悔度. 另一方面,SGP 算法具有线性时间复杂度,优于 UP 策略的  $n^m$  和 ONS 的  $m^3 n$ ; 与 EG 相同. 这一假设建立在每日向单域上进行有效投影的时间花费为  $O(m)$  或者  $O(m \ln n)$ . 总而言之,SGP 算法在后悔度和时间复杂度上面做了一定的取舍,丰富了泛投资组合选择的研究.

## 3 数值运算

本节采用回溯测试来验证策略的样本外收益. 回溯测试采用历史数据来测试策略的表现和稳定性,是泛投资组合研究中不可缺少的一步. 需要强调的是,回溯测试并不能预测策略在未来未知市场下的表现,但可以作为参考. 本节将选取纽约交易所和中国沪深市场的股票数据来回测,并进一步分析 SGP 策略的参数和交易成本的影响.

### 3.1 数据与设置

本文实证部分选用美国市场和中国市场分别进行. 为了和现有研究<sup>[7-9]</sup>进行比较,美国市场采用标准的 NYSE 数据集,时间区间为 1963 年到 1985 年,共 5 652 个交易日. 该数据

由 Cover<sup>[7]</sup> 首先采用,并逐渐成为在线投资组合选择的标杆数据集. Helmbold 等<sup>[8]</sup> 和 Agarwal 等<sup>[9]</sup> 均沿用了这些数据集,本文也采用相同的数据集.

与发达国家股票市场相比,中国股票市场存在着个人投资者居多,市场不健全,风险更高等结构性差异<sup>[26]</sup>,因此利用中国市场数据进行实证具有一定的现实意义. 与高丽<sup>[15]</sup> 类似,本文同时收集了中国沪深股市的数据来进行实证研究. 中国市场选用 2014 年 4 月 30 日观测到的沪深 300 成分股,时间从 2000 年 1 月 1 日到 2014 年 4 月 30 日. 数据来源是 iFind 同花顺金融数据库. 考虑上市公司必须存续一段时间以保证股价是稳定的,本文将 2000 年 1 月以后上市的股票剔除,保留了 89 只成份股. 股票价格的缺失值采用前一天的收盘价代替. 随后用当日收盘价除以前日收盘价,即得到数据集 HS89. 值得注意的是,数据中存在着 67 个相对价格变动超 10% 的异常点. 经核实,这 67 个异常点中,河北钢铁(000709) 于 2009 年 12 月 15 日的异常现象是源于其重组事宜,其余 66 个异常点均是由于落实中国的股权分置改革政策造成的. 这两类原因造成的股价超涨跌幅限制均能真实反映股价波动,故本文保留这些异常点. 现有文献中,高丽<sup>[15]</sup> 也曾采用过中国市场的数据进行实证,分别从上海证券交易所和深圳证券交易所上市股票随机抽取 9 只,18 只,10 只和 26 只股票作为测试数据集,样本区间为 1997 年至 2012 年.

SGP-2 策略有一个参数  $\lambda$ . 根据定理 2,SGP-2 策略的泛投资组合特性与参数  $\lambda$  有关,而且参数  $\lambda$  的合理取值范围并不能事先决定,而是依赖于资产数目  $m$ ,投资期数  $n$  和市场正参数  $\alpha$ ,其中,市场正参数  $\alpha$  近似等于最优组合收益率的上界值. 但是在构建最优组合之前,市场正参数  $\alpha$  并不能准确估计. 为了不失一般性,同时考虑到参数  $\lambda$  对策略的影响,混合 SGP 算法的参数  $\lambda$  取  $\{2^{-5}, 2^{-4}, \dots, 2^{14}\}$ , 共计 20 个投资专家,进一步根据指数加权方法将所有投资专家的意见综合. 每个投资专家依据绩效赋予指数权重,权重公式为  $w_{j,t} = \frac{\exp(S_{j,t-1})}{\sum_i \exp(S_{i,t-1})}$ ,  $j = 1, \dots, 20$ , 对应

着 20 个不同参数的投资专家,那么第  $t$  期累积财富  $S_{j,t-1} = \sum_j (S_{j,t} w_{j,t})$  . 另外,选用的比较策略有三种基准策略 Market, BEST 和 BCRP, 以及 UP, EG, ONS 三种泛投资组合策略,所有策略的参数均按照原作来取值. BCRP 是事后策略,在现实中不能实现.

### 3.2 结果比较

表 2 比较了策略 Market, BEST, BCRP, UP, EG, ONS, SGP-1 和 SGP-2 在 5 个不同数据集上的期末累积收益. 除了作为基准策略的 Market, BEST 和 BCRP 策略以外,期末累积收益最高的两个策略绩效用黑体标出. 结果显示,SGP-2 策略表现均好于 SGP-1 策略,说明正则项的加入能够改善 SGP-2 策略的绩效;同时 SGP-1 和 SGP-2 策略均超越了基准策略中的事前策略 Market,在除了 HS89 组合以外的 4 个数据集上,其最终累

积收益均超越了 BEST 策略. 与现有的泛投资组合策略相比,SGP-2 策略在所有资产组合上表现均好于 UP 策略和 EG 策略. 在 COM\_MEI 和 IRO\_KIN 数据集上表现好于 ONS 策略,在余下的三个数据集上的表现弱于 ONS 策略. 考虑到任何一种策略很难绝对占优另一种策略,因此 SGP-2 策略在经典的双股票数据集和中国市场的数据集上表现良好. 另外,泛投资组合策略在理论上追踪 BCRP 策略的对数增长率,所以,理论上它们的绩效会弱于 BCRP 策略. 但是在泛投资组合选择策略的实证上,策略绩效也受到样本数据的影响. 因此在表 2 中,ONS 策略优于对应 BCRP 策略的绩效.

为了进一步比较 SGP 策略的和现有策略,表 3 列示了在线投资组合策略 UP, EG, ONS 和 SGP-2 在 5 个数据集上的运行时间.

表 2 不同策略在数据集上的最终累积收益

Table 2 Final cumulative wealth achieved by various strategies on the five datasets

组合	COM_KIN	COM_MEI	IBM_CO	IRO_KIN	HS89
Market	28.07	37.47	12.79	6.52	4.76
BEST	52.02	52.02	13.36	8.92	25.97
BCRP	144.01	102.96	15.07	73.70	37.53
UP	78.40	74.00	14.20	40.00	7.29
EG	110.96	<b>94.28</b>	14.90	64.43	7.21
ONS	<b>314.75</b>	89.10	<b>18.18</b>	24.71	<b>8.48</b>
SGP-1	83.03	89.51	14.89	<b>64.65</b>	6.71
SGP-2	<b>118.65</b>	<b>98.75</b>	<b>15.01</b>	<b>72.52</b>	<b>7.33</b>

表 3 不同策略在数据集上的运行时间(sec)

Table 3 Running times ( in seconds) of various strategies on datasets

组合	COM_KIN	COM_MEI	IBM_CO	IRO_KIN	HS89
UP	31.81	31.37	31.47	32.01	295.52
EG	1.02	1.09	1.01	1.22	4.07
ONS	302.60	304.39	311.40	318.34	747.90
SGP-2	1.16	1.05	1.11	1.13	0.63

结果显示,随着资产数目的增加,除了 SGP-2 策略以外的其他泛投资组合策略运行时间均增加. 一种可能的解释是 SGP-2 策略的运行时间受到交易期数的影响更大,而 HS89 数据集的交易期数比其余 4 个数据集更少. SGP 和 EG 策略均为线性复杂度,因此在所有数据集上,SGP-2 策略的运行时间与 EG 策略相近; UP 和 ONS 策略的时间复杂度均高于线性,实证上,SGP-2 策略

的运行速度均大幅度快于 UP 和 ONS 策略. 这与表 1 中的时间复杂度是一致的. 结合表 2 可发现,SGP 和 ONS 策略的性能相近,但 ONS 策略耗时远大于 SGP 策略; SGP 和 EG 策略的运行时间相当,但 SGP 策略绩效均好于 EG 策略. 这也印证了 2.3 节的观点: SGP 的后悔度边界并不是最优的,但是其线性运行时间优于 UP 和 ONS 策略.

### 3.3 参数与交易成本的敏感性分析

为说明参数对于 SGP 策略的影响, 图 1 展示了采用不同参数值  $\lambda$  时 SGP-2 策略在五个数据集上的绩效. 其中,  $\lambda$  的取值域为  $\{2^{-5}, 2^{-4}, \dots, 2^{14}\}$ . 为了便于比较, 本文也列出了 Market 和 BCRP 策略的绩效值. 如图 1 所示, 在事后看, 本文没法找到一个最优的参数值使得 SGP-2 策略在所有数据集上都有最大的绩效. 可能的原因是不同的数据集上有着不同的资产数目  $m$ , 投资期数  $n$  和市场正参数  $\alpha$ . 但总的说来, SGP-2 策略在不同参数情形下表现非常地稳健, 受参数的影响不大. 由此, 在实际使用中, 本文可以方便地为 SGP-2 策略取到一个有效的参数值.

SGP-2 策略的提出没有考虑交易成本, 为了更好地研究 SGP-2 策略在存在交易成本时的表现, 图 2 展示了在不同交易成本时 SGP-2 策略的绩效. 其中, 交易成本采用比例交易成本, 取值域为 0% 到 1%. 结果显示, 随着交易成本的上升, BCRP 和 SGP-2 策略的绩效是下降的, Market 受交易成本影响最小. 但即使成本较高时, SGP-2 策略依然表现优于市场策略. 考虑到当前 A 股市场上个人投资者的交易成本一般在 0.1% 左右, 本文发现交易成本对 SGP-2 绩效的影响不大. 总而言之, 在合理的交易成本下, SGP-2 策略依然可以保持高于市场的投资绩效.

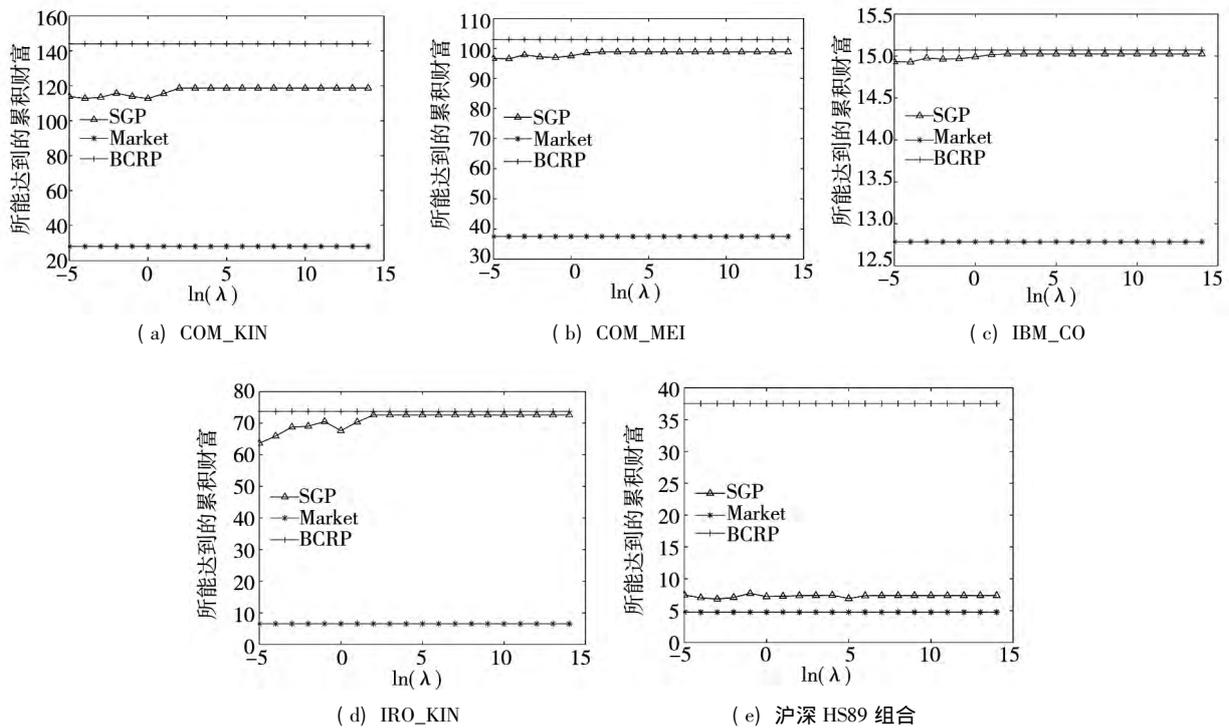


图 1 SGP 策略的参数敏感性分析

Fig. 1 Parameter sensitivity for SGP strategy

### 3.4 讨论

与既有的研究一致, 本文的研究主要基于三个假设: 零交易成本, 完全流动性, 零市场冲击. 这些假设与实际存在差异<sup>[27, 28]</sup>, 因此, 在回溯测试中采取了一些措施来尽量减少这些假设的影响. 针对零交易成本, 在第 3.3 节中, 测试了 SGP 策略在不同交易成本时的表现. 结果显示, SGP 策略可以承受合理的交易成本. 针对完全流

动性和零市场冲击, 在构建 HS89 数据集时, 选取了沪深 300 成分股中流动性强的蓝筹股进行测试. 这些股票均交易活跃, 具有较强的流动性, 同时这些股票难以受到单笔资金的冲击. 注意到在仿真环境中, 设法测试市场冲击的影响是不现实的. 另外四个数据是在线投资组合选择研究的标准数据集. 这些股票是 NYSE 上较大的蓝筹股, 也具有较高流动性. 因此, 虽然完全流动性

和零市场冲击的假设在回溯测试中没法完全模拟,本文也尽量减少了这些假设对策略的影响.

SGP 策略更好地实现了策略绩效和时间复杂度之间的权衡取舍. 一方面,理论上与其他泛投资组合策略一样,SGP 策略能够渐进地逼近最优定常再调整策略的累计收益率. 实证上,SGP 策略绩效表现良好,在某些数据集上超过了现有的泛投资组合策略. 另一方面,投资者选用时间最快还是收益最优的策略取决于投资者的类型和其投资情景. 对于大部分散户投资者,他们对计算时间要求并不迫切,会选用收益最高的策略. 对于一些机构投资者,尤其是高频交易商,他们可以挖掘更高频率的交易数据,会选用时间最快的策略. 时间成本较小的策略,帮助机构投资者获得更多交易机会及获利. 本文数值分析中考虑了相同的投资期,而现实中高频交易策略会带来更多的交易机会,从而会有更多获利. 这在 Li

等<sup>[21]</sup>的研究中也有所体现.

### 4 结束语

本文提出了一个全新的基于次梯度投影的在线投资组合选择策略 SGP. 理论上,推导了 SGP 策略的后悔度边界,证明了 SGP 策略是一个泛投资组合选择策略,并发现 SGP 策略具有线性时间复杂度. 实证上,分别研究了 SGP 策略在美国市场和中国的表现. 实证结果显示,SGP 策略在美国数据集上和中国数据集上均表现优异. 本文从理论和实证上进一步丰富了泛投资组合选择的研究. 未来比较好的研究方向是在策略设计中加入交易成本、税收等实际摩擦系数,设计能够主动考虑市场摩擦的泛投资组合选择策略,进一步提升泛投资组合选择策略的实用性.

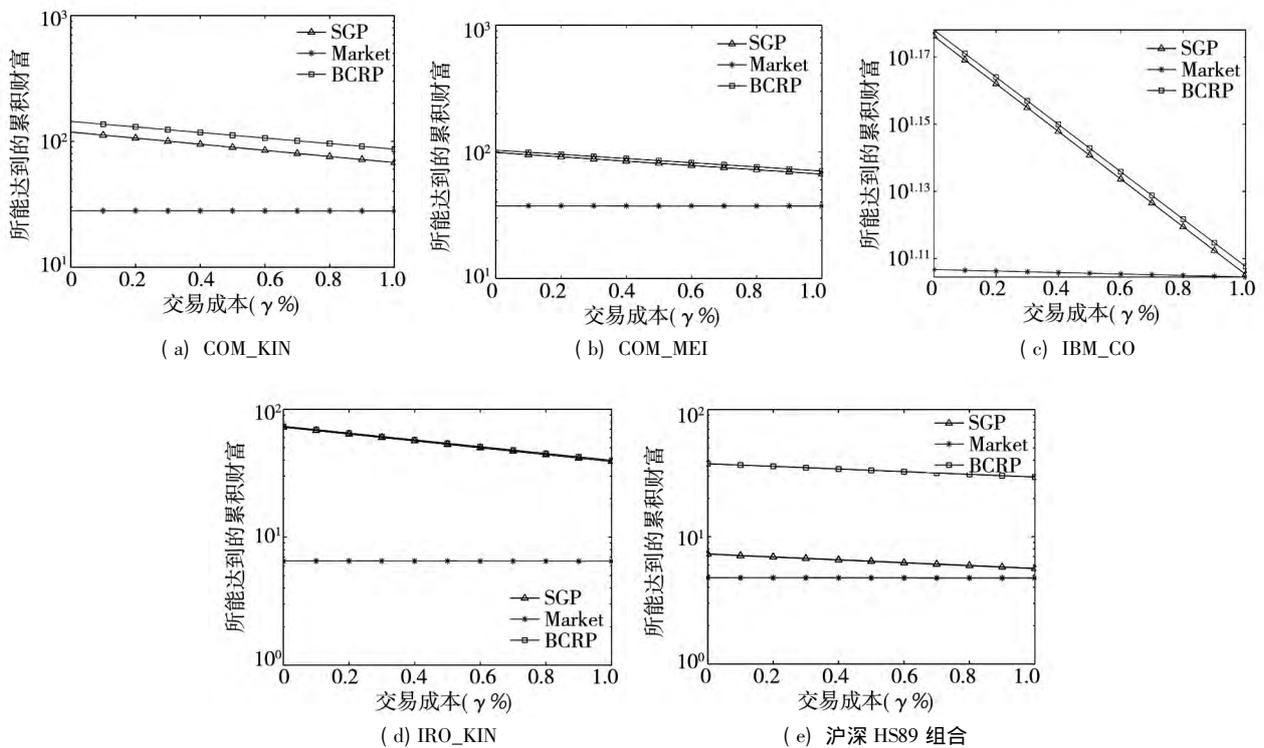


图2 交易成本对 SGP 策略影响分析

Fig. 2 Effects of transaction costs on SGP strategy

### 参考文献:

[1] Li B, Hoi S C. Online portfolio selection: A survey [J]. ACM Computing Surveys, 2014, 46(3): 1-35.  
 [2] Markowitz H. Portfolio selection [J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.

- [3]曾 燕,黄金波. 基于均值-AS模型的资产配置[J]. 管理科学学报,2016,19(2):95-108.  
Zeng Yan, Huang Jinbo. Asset allocation based mean-AS model[J]. Journal of Management Sciences in China,2016,19(2):95-108. (in Chinese)
- [4]Kelly J L. A new interpretation of information rate[J]. Bell Systems Technical Journal,1956,35(4):917-926.
- [5]罗 勇,朱 波. Kelly模型及其在高频交易中的应用[J]. 系统工程理论与实践,2016,36(3):569-580.  
Luo Yong, Zhu Bo. Kelly model and its application in high frequency trading[J]. Systems Engineering: Theory & Practice,2016,36(3):569-580. (in Chinese)
- [6]张 鹏,张卫国,张逸菲. 具有最小交易量限制的多阶段均值-半方差投资组合优化[J]. 中国管理科学,2016,24(7):11-17.  
Zhang Peng, Zhang Weiguo, Zhang Yifei. Multi-period mean-variance portfolio selection with minimum transaction lots constraints[J]. Chinese Journal of Management Science,2016,24(7):11-17. (in Chinese)
- [7]Cover T M. Universal portfolios[J]. Mathematical Finance,1991,1(1):1-29.
- [8]Helmbold D P, Schapire R E, Singer Y, et al. On-line portfolio selection using multiplicative updates[J]. Mathematical Finance,1998,8(4):325-347.
- [9]Agarwal A, Hazan E, Kale S, et al. Algorithms for Portfolio Management Based on the Newton Method[C]. Proceedings of the 23rd International Conference on Machine Learning. ACM,2006:9-16.
- [10]Das P, Banerjee A. Meta Optimization and its Application to Portfolio Selection[C]. Proceedings of the 17th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, ACM,2011:1163-1171.
- [11]Zhang Y, Yang X. Online portfolio selection strategy based on combining experts' advice[J]. Computational Economics,2017,50(1):141-159.
- [12]刘善存,汪寿阳,邱苑华. 带交易费用的泛证券组合投资策略[J]. 系统工程理论与实践,2003,23(1):22-25.  
Liu Shancun, Wang Shouyang, Qiu Wanhua. Universal portfolio selection with transaction costs[J]. Systems Engineering: Theory & Practice,2003,23(1):22-25. (in Chinese)
- [13]张卫国,张 永,徐维军,等. 基于线性学习函数的泛证券投资组合策略[J]. 系统工程理论与实践,2012,32(8):1647-1654.  
Zhang Weiguo, Zhang Yong, Xu Weijun, et al. Universal portfolio based on on-line learning of linear function[J]. Systems Engineering: Theory & Practice,2012,32(8):1647-1654. (in Chinese)
- [14]张 永,张卫国,徐维军,等. 集成有限个专家意见的在线投资组合策略[J]. 系统工程理论与实践,2015,35(1):57-66.  
Zhang Yong, Zhang Weiguo, Xu Weijun, et al. Online portfolio selection strategy by aggregating finite expert advices[J]. Systems Engineering: Theory & Practice,2015,35(1):57-66. (in Chinese)
- [15]高 丽. 在线投资组合策略及算法研究[D]. 广州:华南理工大学,2013.  
Gao Li. Research on Strategies and Algorithms for Online Portfolio Selection[D]. Guangzhou: South China University of Technology,2013. (in Chinese)
- [16]Borodin A, El-Yaniv R, Gogan V. Can we learn to beat the best stock? [J]. Journal of Artificial Intelligence Research,2004,21:579-594.
- [17]Györfi L, Lugosi G, Udina F. Nonparametric kernel-based sequential investment strategies[J]. Mathematical Finance,2006,16(2):337-357.
- [18]Ormos M, Urbán A. Performance analysis of log-optimal portfolio strategies with transaction costs[J]. Quantitative Finance,2013,13(10):1587-1597.
- [19]Li B, Hoi S C, Gopalkrishnan V. CORN: Correlation-driven nonparametric learning approach for portfolio selection[J]. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology,2011,2(3):1-21.
- [20]Huang D, Zhou J, Li B, et al. Robust median reversion strategy for online portfolio selection[J]. IEEE Transactions on Knowledge & Data Engineering,2016,28(9):2480-2493.

- [21] Li B, Hoi S C. Online Portfolio Selection: Principles and Algorithms [M]. Boca Raton: CRC Press, 2015.
- [22] Li B, Hoi S C, Zhao P, et al. Confidence weighted mean reversion strategy for online portfolio selection [J]. ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data, 2012, 9(4): 1–34.
- [23] Zinkevich M. Online Convex Programming and Generalized Infinitesimal Gradient Ascent [C]. Proceedings of the International Conference on Machine Learning, 2003: 928–936.
- [24] Duchi J, Shalev-Shwartz S, Singer Y, et al. Efficient Projections onto the  $l_1$ -Ball for Learning in High Dimensions [C]. Proceedings of the International Conference on Machine Learning, 2009: 272–279.
- [25] Shalev-Shwartz S, Singer Y, Srebro N, et al. Pegasos: Primal estimated sub-Gradient solver for SVM [J]. Mathematical Programming, 2011, 127(1): 3–30.
- [26] Yang J, Yang Z, Zhou Y. Intraday price discovery and volatility transmission in stock index and stock index futures markets: Evidence from China [J]. Journal of Futures Markets, 2012, 32(2): 99–121.
- [27] 李宏, 王刚, 路磊. 股票流动性能够解释收益反转之谜吗? [J]. 管理科学学报, 2016, 19(8): 84–101.  
Li Hong, Wang Gang, Lu Lei. Does stock liquidity explain stock return reversal puzzle? [J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(8): 84–101. (in Chinese)
- [28] 董晨昱, 刘维奇, Liu Wei-min, 等. 股票收益反转效应及与买卖价差关系研究 [J]. 管理科学学报, 2016, 19(6): 171–182.  
Dong Chenyu, Liu Weiqi, Liu Wei-min, et al. Research on reversal effect and the relationship between reversal effect and bid-ask spread [J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(6): 171–182. (in Chinese)

## Universal portfolio selection strategy based on sub-gradient projection

LI Bin, ZHANG Di, TANG Song-hui

Department of Finance, Economics and Management School, Wuhan University, Wuhan 430072, China

**Abstract:** Online portfolio selection is important in the field of quantitative investment. Recently, the emerging investment opportunities call for portfolio selection strategies that can be efficiently computed. However, online portfolio selection strategies with high performance often require exponential or polynomial computation, which hinders their practical applications. This paper proposes a novel universal portfolio selection strategy: the “Sub-Gradient Projection” (SGP). This paper first applies the SGP idea to portfolio construction and gains the rebalance rule. Its competitive performance is analyzed theoretically, which shows that SGP is a universal portfolio selection strategy. Moreover, SGP strategy needs linear computational time, which is quite efficient. Empirically, SGP strategy is back-tested using the datasets from US and China. The results show that SGP strategy can achieve a similar cumulative wealth equivalent to that of the latest strategies with much shorter computational time. The experiments on parameter sensitivity show that SGP is insensitive to its parameters. Moreover, it can sustain reasonable transaction costs.

**Key words:** online portfolio selection; universal portfolio selection; sub-gradient projection; best constant rebalanced portfolio