第 22 卷第 1 期
2019 年 1 月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 22 No. 1
Jan. 2019

Lévy 过程驱动非高斯 OU 随机波动率下的期权定价①②

刘志东，刘雯宇，阮禹铭
（中央财经大学管理科学与工程学院，北京 100081）

摘要：考虑金融时间序列发生的跳跃、随机波动率和“杠杆效应”，建立由不同 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动模型. 通过结构保持等价鞅测度变换和 FFT 技术，对不同 Lévy 过程驱动下的非高斯 OU（non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process）期权定价问题进行研究. 同时，在结构保持等价鞅测度下，推导出不同 Lévy 过程驱动下 BNS 模型离散化表达形式，并构建了基于 SMC（sequential Monte Carlo）的极大似然估计、联合样本估计、梯度 - SMC 估计的非高斯 OU 期权定价模型参数估计方法. 实证研究中，采用近 470 万个 S&P500 期权价格数据，从样本内拟合效果、样本外预测、模型稳定性、综合矫正风险几个方面，对不同 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 期权定价模型、参数估计方法以及期权定价效果进行全面系统研究. 实证研究表明，所有模型对实值期权的定价效果要优于虚值期权. 本文基于联合样本估计和梯度 - SMC 估计的非高斯 OU 期权定价模型具有明显的优势.

关键词：Lévy 跳跃过程；非高斯 OU 过程；结构保持等价鞅测度；梯度序贯蒙特卡洛；期权定价
中图分类号：F830　　文献标识码：A　　文章编号：1007 - 9807(2019)01 - 0017 - 27

0 引 言

经典 Black-Scholes（BS）[1] 期权模型假设过于理想化，其收益对数正态分布、连续交易过程、常波动率等假设条件在现实中都很难满足. 关于金融资产收益和衍生品价格时间序列的研究表明，至少有三方面与布朗运动存在明显的偏离：第一，资产价格跳跃（jump）导致收益的非正态分布. 第二，资产收益波动率随着时间随机变化. 第三，存在“杠杆效用”，表现为资产收益和其波动率具有关联性，对于股票类金融资产，这种相关性通常是负的. 同时，研究发现 BS 模型对股票指数期权定价存在系统的偏差，尤其是虚值状态（out-of-the-money，OTM）的期权. Merton [2] 用跳跃尺度（jump size）符合正态分布的复合泊松过程对布朗运动扩展，得到具有跳跃—扩散（jump-diffusion）的资产价格随机过程，简称 MJD. MJD 模型一直在连续时间金融中处于主导地位. 在 Merton 采用复合泊松过程模拟资产价格中的跳跃之后，Hull 和 White [3]，Heston [4] 采用均值回复平方根过程（mean reverting square-root process）模拟随机波动率. 这些具有跳跃和随机波动率的期权定价模型均可以被认为是在 Duffie 等 [5] 仿射跳跃扩散（affine jump diffusion，AJD）框架下的应用. 其中，仿射扩散部分捕捉资产价格中的连续运动，复合泊松跳跃部分捕捉资产价格中大幅度不连续跳跃. 然而，仿射跳跃扩散模型（AJD）单独使用复合泊松过程模拟跳跃存在一些不足. 在有限时间间隔，

① 收稿日期：2016 - 11 - 14；修订日期：2018 - 06 - 18.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（71271223；70971145）；教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目（NCET - 13 - 1054）；中央财经大学青年创新团队项目；中央财经大学博士研究生重点选题支持计划.
作者简介：刘志东（1973—），男，内蒙赤峰人，博士，教授，博士生导师，Email：liu_phd@163.com
② 感谢 Imperial College London 金融系 Li Zaici 博士为本文提供的宝贵建议和指导，感谢第十四届金融系统工程与风险管理国际年会专家的宝贵意见和评论.

仿射跳跃扩散过程生成有限次数跳跃，属于有限活动跳跃过程（finite activity jump processes）. Eraker 等[6] 的双跳跃模型（double-jump model）属于比较高级的 AJD 模型，模型中包括随机波动率、"杠杆效应"，以及在收益和波动率中都有复合泊松跳跃. 尽管该模型能捕捉到标的资产价格很多重要的行为特征，但是，Li 等[7] 通过仿真研究发现，资产价格中存在很多小幅度的跳跃不能被 AJD 模型捕捉到，AJD 模型不能充分近似无限活动（infinite activity）跳跃过程.

通常 Lévy 过程是具有平稳和独立增量的连续时间随机过程. 除了布朗运动和复合泊松过程，还包括更能灵活反映资产价格动态变化的其他随机过程. 无限活动 Lévy 跳跃过程具有无限次数跳跃发生率，除了能够生成大幅度跳跃，还能在任何有限时间间隔之内生成很多无限多次数的小幅度跳跃. 通过对金融资产价格序列的研究可以发现，在既定的时间范围，资产价格其实具有许多不同尺度小幅度跳跃，这需要采用无限活动 Lévy 跳跃过程（infinite activity Lévy jump）来描述资产价格运动.

一些研究直接采用无限活动 Lévy 跳跃过程研究期权定价，包括 Barndorff-Nielsen[8] 的正态逆高斯模型（Normal inverse Gaussian model），Eberlein 等[9] 的广义双曲模型（generalized hyperbolic model），Madan 等[10] 的方差伽玛（variance-gamma，VG）模型，Carr 等[11] 的有限矩对数 LS 模型（finite moment log-stable model）等. 尽管这些研究采用更符合现实的 Lévy 跳跃过程表示资产价格过程，能生成范围更广的分布，但通常都假设波动率独立于资产收益变化，没有考虑跳跃发生的随机性，只是在特列条件下才考虑"杠杆效应".

吴恒煜等[12] 对离散时间波动率 GARCH 模型框架下，对带"杠杆效应"的无限跳跃 Lévy 过程期权问题进行研究，研究发现带"杠杆效应"的条件 Lévy 过程联合刻画了资产价格的时变漂移率、条件方差、非高斯随机新息因子及非对称波动率，无限纯跳跃调和稳态模型更好地捕获了随机因子的尖峰、厚尾等特征. 考虑杠杆效应后，极大改善了条件 Lévy 过程的期权定价能力，速降调和稳态过程期权综合定价能力依然更稳健.

通过对 Lévy 过程不同组成部分（扩散项和跳跃项）进行随机时间变换，可以明显发现随机波动率是由多方面原因引起的. 可以由收益扩散部分的瞬时随机方差率，或跳跃部分的随机发生率（或发生强度），以及两者共同决定. Huang 等[13]，Carr 等[14] 考虑收益中包括扩散部分和跳跃部分，基于时间变换 Lévy 过程，对 S&P500 指数收益率进行建模和参数估计. 然而，Huang 等只是假设瞬时波动率服从 CIR 过程，并没有考虑瞬时波动率服从更广泛的期限结构模型. 当瞬时波动率中存在跳跃时候，或符合非高斯 OU 过程（non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process）时候，不同时间变换 Lévy 过程下的期权定价问题还没有得到很好的解决.

Barndorff-Nielsen 等[15] 建议使用 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 过程对随机波动率建模，假设瞬时波动率服从 OU 过程，其增量由背景 Lévy 过程驱动（background driving Lévy process，BDLP），其模型简写为 BNS 模型. 对于 BNS 模型，波动率的边缘分布完全由驱动 OU 方程的 Lévy 过程决定，与波动率过程的指数衰减速率相独立，这可以使研究人员和从业者选择不同的边缘分布. Nicolato 等[16] 采用有限活动 Lévy 过程（Gamma 过程）驱动的非高斯 OU 随机波动率模型，对期权定价问题进行研究，从理论上给出欧式期权理论价格的边界.

尽管 BNS 随机波动模型具有一定的吸引力，但这类模型的统计推断非常复杂，传统关于连续时间模型的极大似然统计推断方法很难应用. Eraker[17]，Jones[18] 最早开始采用贝叶斯方法对连续时间金融模型的统计推断问题进行研究，采用仿真的高频数据，基于数据增强（data augmentation）马尔科夫蒙特卡洛（MCMC）方法进行参数估计. 但 Roberts 和 Stramer[19] 指出这样的数据增强方法可能导致 MCMC 算法收敛性较差，提出对缺失数据参数化的估计方法. Li 等[7] 设计了关于无限活动 Lévy 过程的 MCMC 估计方法，但是其随机波动率还是由高斯驱动或扩散项驱动，同时计算效率也很低.

在基于贝叶斯统计的参数估计中，传统 MCMC 算法一般不能解决参数估计中后验分布可能出现的维度变化问题. 为此，Green（1995）[20] 提出了 RJMCMC（reversible jump MCMC）算法解决贝

叶斯参数估计中的维度变化问题. 在此基础上，Robert 等[21]，Griffin 和 Steel[22,23] 对 RJMCMC 算法的改进，设计了关于 OU 过程的 MCMC 估计方法，通过回顾抽样(retrospective sampling)，重新参数化来减少数据和过程之间的相关性. 由于参数和潜在变量(latent variable)高度相关，未观测波动率模型的贝叶斯统计推断非常复杂. 由于参数之间互相更新速度较慢，这些改进的 MCMC 估计方法也很难应用.

Robert 等、Griffin 和 Steel 同时也采用 MCMC 方法对具有 Gamma 边缘分布的非高斯 OU 随机波动模型进行统计推断，发现该模型比传统高斯分布驱动的 OU 随机波动率模型更能反映现实金融资产收益率的统计特征. 但是，Gamma 边缘分布只是 Lévy 过程的一个特例，没有理论和实证表明驱动因子选择 Gamma 边缘分布是最佳的选择. 建立由不同 Lévy 驱动，并对具有不同类型 Lévy 边缘分布的非高斯 OU 随机波动模型进行统计推断，以及通过金融市场真实数据来对不同 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动率模型进行评价和比较的研究还很少. 刘志东和刘雯宇(2015)[24] 根据标的金融资产市场数据，建立由不同 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动模型，在此基础上，采用 RJMCMC 算法，设计了一种关于 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动模型的贝叶斯统计推断方法. 但并没有结合期权价格数据进行统计推断等方面的研究.

由于期权价格中包含标的资产价格波动率等方面信息，可以利用期权市场价格信息对标的资产价格随机波动率进行统计推断. Pan[25] 首次使用标的资产和期权样本数据对随机波动率进行估计，Eraker 对该算法进行拓展并利用实证数据对其准确性进行验证. Yu 等[26]，Li[27] 分别使用基于 MCMC 法和无迹卡尔曼滤波法(unscented Kalman filter)的联合样本估计法对不同类型随机波动率模型进行参数估计. Ornthanalai[28] 利用联合样本算法估计时变含跳跃的随机波动率模型参数. Hurn 等[29] 比较基于不同的期权定价误差分布的联合样本估计算法的优劣. 刘杨树等[30]、陈淼鑫和武晨[31] 通过对期权价格中所隐含的波动率风险、跳跃风险进行了详细的研究，发现了关于跳跃风险及其风险溢价之间的关系.

然而与基于全部历史数据估计参数的统计推断方法不同，在金融应用中，当新的信息发生时，我们对序贯参数学习和状态估计(sequential parameter learning and state estimation)更感兴趣，必须对潜在因子和参数进行实时(real-time)或在线的(on-line)估计，进行序贯分析或决策. 每当新的数据发生，传统的 SMM(simulated method of moments)或 MCMC 必须重复传统的估计，计算强度非常大，对于复杂模型不可行. 与之相比序贯估计的计算成本明显减轻. 然而，理论和实际中都发现经典的 SMC(sequential monte carlo)方法也有一定的缺陷. 首先均较大程度上依赖初始值以及可能陷入局部最优，其次建议密度的选择也会影响算法的实际效果. 同时 SMC 算法存在粒子退化枯竭的问题. 为此，很多学者结合 SMC 算法和 MCMC 算法的优点，对传统的贝叶斯参数学习方法进行扩展，如：Chopin 等[32]，Fulop 和 Li[33] 提出了 SMC^2 的参数学习方法，Andrieu[34] 提出 PMCMC 算法，Fearnhead[35] 提出自适应粒子滤波法，Duan 和 Fulop[36] 提出边际调和密度(Density-Tempered Marginalized)SMC 算法等. 本文首先考虑此类参数学习方法，但是经过研究发现利用 SMC^2 和 PMCMC 估计 Lévy 过程驱动的 BNS 模型参数并不太合适. 由于非高斯过程驱动的 BNS 模型本身比较复杂，利用 SMC^2 和 PMCMC 等算法进行参数估计结果稳定性和收敛性都较差，同时计算成本非常大，很难通过计算机编程实现.

从大样本角度看，与贝叶斯参数估计方法相比较，极大似然估计(MLE)具有一致性和渐进有效性，收敛速度较快. 在 MLE 估计中，参数不是被看成随机变量，因此潜在变量(latent variable)和参数之间的相互依赖关系对收敛速度没有影响. 但是，由于随机波动率和跳跃的存在，采用极大似然方法对连续时间模型参数估计时，Euler 离散化方法存在很大的误差. 同时，通过极大似然函数值最大化估计参数的关键是得到似然函数的梯度，但是对于 BNS 模型，似然函数的梯度很难求. Peng 等[37] 把对数似然函数分解为条件期望之和，然后利用 SMC 方法得到模型梯度估计，再根据基于梯度的随机近似方法(Stochastic Approximation，SA)得到最大化的对数似然值，通过数值模拟研究表明，使用 SA 法能够得到 Lévy 过程驱

动的 BNS 模型对数似然函数的近似全局最优点.

为此,本文面向金融资产价格过程的随机跳跃、随机波动率和“杠杆效应”,以无限活动 Lévy 跳跃过程为基础,同时考虑金融时间序列的“杠杆效应”等,对 Barndorff-Nielsen 和 Shephard 提出的非高斯 OU 模型进行扩展,对基于 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 期权定价模型及其参数估计方法进行研究. 本文主要贡献为: (1) 通过结构保持等价鞅测度变换,推导出风险中性测度下,不同 Lévy 驱动源下对数价格的特征指数,并在此基础上,通过 FFT 技术,给出欧式看涨期权和看跌期权的定价公式. (2) 在结构保持等价鞅测度下,对不同 Lévy 过程驱动下,BNS 模型离散化方法进行研究,推导出了高斯过程、Gamma 过程及 CGMY 过程驱动的 BNS 模型具体离散化形式. (3) 针对 BNS 模型的统计推断难题,综合 SMC 方法和 MLE 的优点,构建了基于 SMC 极大似然估计、联合样本估计、梯度-SMC 估计的非高斯 OU 期权定价模型参数估计方法. (4) 最后,实证研究中,采用近 470 万个 S&P500 期权价格数据,从样本内拟合、样本外价格预测、模型稳定性、综合矫正风险等几个方面,对不同 Lévy 过程驱动的 BNS 模型参数估计方法和期权定价效果进行全面系统研究.

1 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动模型

通常连续时间随机波动率模型是由具有瞬时波动率过程 $\sigma^2(t)$ 的布朗运动驱动,资产的对数价格 y^* 由以下随机微分方程决定

$$\mathrm{d}\, y^*(t) = \{\mu + \beta\sigma^2(t)\}\mathrm{d}\, t + \sigma(t)\,\mathrm{d}\, W_t \quad (1)$$

式中 W_t 表示布朗运动. 漂移项参数 μ 和风险溢价参数 β 定义在实数域 R 上, $\sigma^2(t)$ 表示潜在波动率,假设其平稳并与 W_t 相互独立. 根据式(1),在长度为 Δ 时间内,金融资产总收益为

$$y_i(t) = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mathrm{d}\, y^*(t) = y^*(i\Delta) - y^*\{(i-1)\Delta\} \quad (2)$$

$y_i(t)$ 为资产对数收益的观测值, $i = 1,\ldots, T$, 服从独立正态分布,即

$$y_i \sim N(\mu\Delta + \beta\sigma_i^2, \sigma_i^2) \quad (3)$$

式中 $\sigma_i^2 = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta}\sigma^2(u)\,\mathrm{d}\, u$. Barndorff-Nielsen 和 Shephard 称之为实际波动率. 通过对 μ 和 $\sigma^2(t)$ 选取不同的随机过程并组合在一起,可以得到满足不同金融时间序列统计特征的模型. 本文采用 Barndorff-Nielsen 和 Shephard 的研究思路,假设波动率服从非高斯 OU 过程(non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process) ,这样可以较容易和准确地计算积分波动率(integrated volatility) ,而积分波动率是推导期权定价公式解析解的主要变量. 非高斯 OU 过程的随机微分方程形式为

$$\mathrm{d}\,\sigma^2(t) = -\lambda\sigma^2(t)\,\mathrm{d}\, t + \mathrm{d}\, Z(\lambda t) \quad (4)$$

式中 $\lambda > 0$,控制波动率中跳跃发生速度和跳跃衰减速度. Barndorff-Nielsen 和 Shephard 的研究证明,任何关于 $\sigma^2(t)$ 的自可分解(self-decomposable) 边缘分布可以由平稳 OU 过程和 Lévy 过程 $Z(t)$ 组合在一起表示. 在 $Z(t)$ 的 Lévy-Khintchine 表达式中,Lévy 测度表示为 W ,其在原点不能取值,并且满足

$$\int_{\Re_+}\min\{1, x^2\}\, W(\mathrm{d}\, x) < \infty \quad (5)$$

令 $Z(t)$ 的 Lévy 密度表示为 w, $\sigma^2(t)$ 的 Lévy 密度表示为 u ,二者具有如下关系

$$w(x) = -u(x) - xu'(x) \quad (6)$$

假设 u 是可微的,具有导数 u'. $Z(t)$ 中的跳跃,即背景 Lévy 驱动过程(background driving Lévy process, BDLP) 导致瞬时波动率 $\sigma^2(t)$ 不连续,发生跳跃. $Z(t)$ 是非递减的 Lévy 过程,时间 t 前的系数 λ 与 $\sigma^2(t)$ 的边缘分布无关.

$\sigma^2(t)$ 的微分方程解为

$$\sigma^2(t) = \exp\{-\lambda t\}\sigma^2(0) + \int_0^t \exp\{-\lambda(t-s)\}\,\mathrm{d}\, Z(\lambda s) \quad (7)$$

$$\sigma^{2^*}(t) = \int_0^t \sigma^2(u)\,\mathrm{d}\, u = \lambda^{-1}\{Z(\lambda t) - \sigma^2(t) + \sigma^2(0)\} \quad (8)$$

这些模型满足无套利条件,使期权定价具有简单解析式,详细思路可以参考 Nicolato 和 Venardos.

可以利用式(6),通过选择 $\sigma^2(t)$ 的边缘分布来确定 $Z(t)$ 的 Lévy 密度,进而确定 $Z(t)$ 随机过程. Gander 和 Stephen[38,39] 给出了一些 $\sigma^2(t)$ 边缘分布的具体例子. Griffin 和 Steel 只是假设 $\sigma^2(t)$ 的边缘

分布符合 Gamma 分布，而本文假设 $\sigma^2(t)$ 边缘分布为更一般化情况下的 CGMY 分布③. 对于 $\sigma^2(t) \sim$ CGMY(κ, ϖ, o)，其 Lévy 密度为

$$u(x) = Cx^{-1-Y}\mathrm{e}^{-Mx} \tag{9}$$

其中 $C>0, M>0, 0<Y<2, Y\neq 1, C=\varpi\times\kappa 2^{\kappa}/\Gamma(1-\kappa), Y=\kappa, M=o^{1/\kappa}/2$.

当 $\sigma^2(t)$ 边缘分布为 CGMY 分布且 Lévy 密度为式(9)时，可以推导出其对应的 $Z(t)$ 的 Lévy 密度 $w(x)$ 为

$$w(x) = CYx^{-1-Y}\mathrm{e}^{-Mx} + CMx^{-Y}\mathrm{e}^{-Mx} \tag{10}$$

可以在非高斯 OU 过程的随机波动率模型中引入"杠杆效用"，式(1)的收益率模型加入"杠杆效用"后模型为

$$\mathrm{d}y(t) = \{\mu+\beta\sigma^2(t)\}\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_t + \rho Z(\lambda t) \tag{11}$$

杠杆系数 ρ 为负数，表示波动率中发生跳跃发生会导致负的收益率. 对应的收益率服从的分布为

$$y_n \sim N(\mu\Delta+\beta\sigma_n^2+\rho Z_n, \sigma_n^2) \tag{12}$$

其中 $\sigma_n^2 = \sigma^{2^*}(n\Delta) - \sigma^{2^*}((n-1)\Delta)$

$$Z_{n+1} = Z_n + \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta}\mathrm{d}Z(\lambda s)$$

2　结构保持测度变换与期权定价

在满足无套利条件下，BNS 模型下的期权定价属于不完备市场下的期权定价，风险中性测度不唯一. 这些与真实概率测度等价的鞅测度大致分为两类：即基于 Esscher 定理的测度变换和基于最短距离的等价鞅测度变换. 基于 Esscher 定理的测度变换主要有指数 Esscher 测度变换和线性 Esscher 测度变换. 而基于最短距离的等价鞅测度变换主要有最小 Hellinger 鞅测度变换，最小 q 熵鞅测度变换和结构保持测度变换. 本文分别对于 BNS 模型的各种等价鞅测度进行研究，发现结构保持等价鞅测度下(structure preserving martingale measures)，对数价格过程有确定的表达式(不会出现近似数值表达式)，同时结构保持等价鞅测度下 Z 服从的分布不变，进而在参数估计过程中不用考虑对数价格过程服从的分布会发生变化. 因此，本文主要采用结构保持等价鞅测度.

2.1　结构保持测度变换

如果 $\mathbf{Q}^y$ 是 BNS 模型的所有等价鞅测度中，能够保持 BDLP 概率分布族(如 P 测度下是 Gamma 过程，$\mathbf{Q}^y$ 测度下依旧是 Gamma 过程)的等价鞅测度，称 $\mathbf{Q}^y$ 为结构保持等价鞅测度. 定义 M 是 BNS 模型的等价鞅测度的集合. 在 BNS 模型中，令 $\mathbf{Q}\in M$，则 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}P} = \varepsilon(\tilde{N}_t)$

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \psi_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t\int (Y(s,x)-1)(\mu_Z - v_Z)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \tag{13}$$

其中 $\varepsilon(\tilde{N}_t)$ 代表 $\tilde{N}_t$ 的 Doléans-Dade 指数过程. ψ 是一个预测过程，$Y=Y(t,x)$ 是一个严格为正的预测函数，并满足

$$\int_0^t \mathrm{d}s\int_{\mathbf{R}_+}(\sqrt{Y(s,x)}-1)w(x)\mathrm{d}x < \infty$$

则函数 Y 和过程 ψ 之间关系式为

$$\mu + \left(\beta+\frac{1}{2}\right)\sigma^2(t) + \sigma_t\psi_t + \lambda\int_{\mathbf{R}_+}Y(s,x)(e^{\rho x}-1)w(x)\mathrm{d}x - r = 0 \tag{14}$$

其中过程 ψ 表示与布朗运动相关的风险溢价，预测函数 $Y-1$ 是与 BDLP 相关的风险溢价，r 为无风险利率. 对于 BNS 模型，在任意等价鞅测度 Q 下，不能保证 BDLP 是 Lévy 过程，$(W^{\mathbf{Q}}, Z)$ 不一定彼此独立，这时在 Q 测度下对数价格过程不再符合 BNS 模型. 为解决上述问题，定义 M' 是 BNS 模型等价鞅测度集 M 的一个子集，BNS 模型在这个子集内的等价鞅测度下具有结构保持的特征. 在 M' 下定义一类函数 $Y' = \{y: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \mid \int(\sqrt{y(x)}-1)^2 w(x)\mathrm{d}x < \infty\}$. 当 $y\in Y'$，有 $w^y(x) = y(x)w(x)$. 如果 $\int_{\mathbf{R}_+}(1\wedge x)w^y(x)\mathrm{d}x < \infty$ 同时成立，则有 $\kappa^y(\theta) = \int_{\mathbf{R}_+}(e^{\theta x}-1)w^y(x)\mathrm{d}x$，其中 $\mathrm{Re}(\theta) < 0$. 则对于任何 $y\in Y'$，过程 $\varepsilon\left(\int_0^t\int(y-1)(\mu_Z - v_Z)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)\right)$ 不但是上鞅

③　关于 CGMY 的具体形式和参数的含义，详见本文 3.1(3) 中 CGMY 过程驱动的 BNS 模型离散化部分.

而且是一个鞅. 即

$$\mathrm{E}\left(\varepsilon\left(\int_0^t\int(y-1)(\mu_Z-v_Z)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s)\right)\right)=1 \quad (15)$$

命题 1 令 $y \in Y'$，过程

$$\psi_t^y=\sigma^{-1}(t)\left(r-\mu-(\beta+\frac{1}{2})\sigma^2(t)-\lambda\kappa^y(\rho)\right) \quad (16)$$

同时有

$$P\left(\int_0^{\hat{T}}\psi_s^2\mathrm{d}s<\infty\right)=1 \quad (17)$$

$$\tilde{N}_t^y=\int_0^t\psi_s^y\mathrm{d}W_s+\int_0^t\int(y-1)(\mu_Z-v_Z)(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s)$$
$$0\leqslant t\leqslant\hat{T} \quad (18)$$

则概率测度 $\mathbf{Q}^y$ 定义为 $\mathrm{d}\mathbf{Q}^y=\varepsilon(\tilde{N}_t^y)\mathrm{d}P$，是一个等价鞅测度(EMM)，在 $\mathbf{Q}^y$ 下 BNS 模型为

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y_t=\left(r-\lambda\kappa^y(\rho)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)\mathrm{d}t+\\ \qquad\sigma(t)\mathrm{d}W^y+\rho\mathrm{d}Z(\lambda t)\\ \mathrm{d}\sigma_t^2=-\lambda\sigma^2(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}Z(\lambda t)\end{cases} \quad (19)$$

其中 r 为无风险利率，$W_t^y=W_t-\int_0^t\psi_s\mathrm{d}s$ 在 $\mathbf{Q}^y$ 测度下为布朗运动，$Z(\lambda t)$ 在 $\mathbf{Q}^y$ 测度下为 Lévy 过程，具有 Lévy 密度 $w^y(x)$ 和累积量生成函数 $\kappa^y(\theta)$，在 $\mathbf{Q}^y$ 测度下，W^y 过程和 Z 独立，因此 $\mathbf{Q}^y\in M'$. 具体证明可参考 Nicolato 和 Venardos(2003)、Hubalek 和 Sgarra(2008)[40].

由于结构保持等价鞅测度下对数价格过程有确定的表达式(不会出现近似数值表达式)，进而利用傅里叶变换技术能够得到欧式期权定价的闭合解; 同时结构保持等价鞅测度下 Z 服从的分布不变，进而在参数估计过程中不用考虑对数价格过程服从的分布会发生变化. 基于以上两点，本文的期权定价中主要采用结构保持等价鞅测度.

2.2 BNS 模型下的 FFT 期权定价

BNS 模型本身比较复杂，直接对其进行蒙特卡洛模拟得出标的资产价格误差较大，可能导致其模拟分布与其实际分布相差很大. Carr 和 Madan[41] 提出的 FFT(Fast Fourier Transform) 期权定价方法，该方法主要利用资产价格过程的特征函数，不用模拟标的资产的未来价格，因此可以克服 BNS 模型本身复杂性和蒙特卡洛方法不稳定性对期权定价的影响; 更重要的是 FFT 算法计算效率较高，所消耗的时间远小于蒙特卡洛模拟方法. 因此本文主要研究在 BNS 模型框架下，使用 FFT 方法研究期权定价问题.

令 k 为执行价格 K 的对数价格，$C_T(k)$、$P_T(k)$ 分别表示剩余到期期限为 T，执行价格为 $\exp(k)$ 的看涨欧式期权价格和看跌期权价格. 如果对数价格 Y 的风险中性密度为 $q_T(s)$，其特征函数为 $\phi_T'(u)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{ius}q_T(s)\mathrm{d}s$，则有 $\phi_T'(u)=\phi_T(iu)$，ϕ_T 表示特征指数. 根据 Carr 和 Madan 关于用 FFT 求期权价格的方法，欧式看涨期权和欧式看跌期权定价公式分别为

$$C_T(k)=\frac{\exp(-\alpha k-rT)}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{e}^{v-ivk}\frac{\phi_T(iv+(\alpha+1))}{(iv+\alpha)(iv+\alpha+1)}\mathrm{d}v \quad (20)$$

$$P_T(k)=\frac{\exp(\alpha k-rT)}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{v_j-iv_jk}\frac{\phi_T(iv_j+(\alpha-1))}{(iv_j-\alpha)(iv_j-\alpha+1)}w_j \quad (21)$$

因此，BNS 模型下的 FFT 期权定价问题关键就是求出对数价格 Y_T 特征指数 ϕ_T，把 ϕ_T 代入式(20)、式(21)中就可以求出对应模型的期权价格.

由于 $\phi_T(u)\equiv E[\exp(uY_T)\mid F_t]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{us}q_T(s)\mathrm{d}s$，可以推导出以下命题与结论.

命题 2 若风险中性测度下 Lévy 过程驱动下 BNS 模型如式(19)所示，则可推导出风险中性测度下，不同 Lévy 驱动源下对数价格的特征指数 ϕ_T. 由于篇幅限制，这里只给出结果，具体推导和证明过程省略，需要可以和作者索取.

1) 带杠杆率的高斯过程驱动的 BNS 模型对数价格特征指数为

$$\phi(z)=\exp\begin{bmatrix}z\left(Y_t+\left(r-\lambda(\mu\rho+\delta\rho^2)\right)(T-t)\right)+\\ (z^2-z)\dfrac{\varepsilon(t,T)}{2}\sigma_t^2+\\ \int_t^T\lambda\kappa^y(f(s,z))\mathrm{d}s\end{bmatrix} \quad (22)$$

其中

$$\varepsilon(s,T) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

$$\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,ds = \mu(\rho z - f_1) + \lambda\mu f_2(T-t) + \frac{\delta}{2}(g^2(T) - g^2(t)) + 2\delta f_2(g(T) - g(t)) + \delta f_2^{\,2}\left(\ln\left(\frac{g(T)}{g(t)}\right)\right)$$

$$f(s) = z\rho + \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)}),$$

$$f(t) = f_1 = z\rho + \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-t)}),$$

$$f_2 = z\rho + \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}$$

$$g(T) = f(T) - f_2 = \rho z - f_2$$

$$g(t) = f(t) - f_2 = f_1 - f_2$$

2) 不带杠杆率的高斯过程驱动的 BNS 模型对数价格特征指数为

$$\phi(z) = \exp\left[\begin{array}{l} z(Y_t + r(T-t)) + \\ (z^2 - z)\dfrac{\varepsilon(t,T)}{2}\sigma_t^2 + \\ \displaystyle\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,ds \end{array}\right] \tag{23}$$

其中

$$\varepsilon(s,T) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

$$\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,ds = -\mu(f_1) + \lambda\mu f_2(T-t) + \frac{\delta}{2}(g^2(T) - g^2(t)) + 2\delta f_2(g(T) - g(t)) + \delta f_2^{\,2}\left(\ln\left(\frac{g(T)}{g(t)}\right)\right)$$

$$f(s) = \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-t)})$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}$$

$$g(T) = f(T) - f_2 = \rho z - f_2,$$

$$g(t) = f(t) - f_2 = f_1 - f_2$$

3) 带杠杆率的 CGMY 过程驱动的 BNS 模型对数价格特征指数为

$$\phi(z) = \exp\left\{\begin{array}{l} z[Y_t + (r - 2\lambda\rho\alpha\kappa(\beta^{\frac{1}{\kappa}} - 2\rho)^{\kappa-1})(T-t)] + \\ (z^2 - z)\dfrac{\varepsilon(t,T)}{2}\sigma_t^2 + \displaystyle\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,ds \end{array}\right\} \tag{24}$$

其中

$$\varepsilon(s,T) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

$$\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,ds = -\frac{\delta}{2}((\gamma^{\frac{1}{\kappa}} - 2f(T))^{\kappa} - (\gamma^{\frac{1}{\kappa}} - 2f(t))^{\kappa}) + \lambda\delta\kappa f_2\frac{T-t}{2}\sum_i \omega_i\left(\gamma^{\frac{1}{\kappa}} - 2f\left(\frac{T-t}{2}x_i + \frac{T+t}{2}\right)\right)^{\kappa-1}$$

$$f(s) = z\rho + \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

$$f_1 = z\rho + \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-t)})$$

$$f_2 = z\rho + \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}$$

4) 不带杠杆率的 CGMY 过程驱动的 BNS 模型对数价格特征指数为

$$\phi(z) = \exp\left[\begin{array}{l} z(Y_t + r(T-t)) + \\ (z^2 - z)\dfrac{\varepsilon(t,T)}{2}\sigma_t^2 + \displaystyle\int_t^T \lambda\kappa(f(s,z))\,ds \end{array}\right] \tag{25}$$

其中

$$\varepsilon(s,T) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

$$\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,ds = -\frac{\delta}{2}((\gamma^{\frac{1}{\kappa}} - 2f(T))^{\kappa} - (\gamma^{\frac{1}{\kappa}} - 2f(t))^{\kappa}) + \lambda\delta\kappa f_2\frac{T-t}{2}\sum_i \omega_i(\gamma^{\frac{1}{\kappa}} - 2f(\frac{T-t}{2}x_i + \frac{T+t}{2}))^{\kappa-1}$$

$$f(s) = \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-t)})$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(z^2 - z)\lambda^{-1}$$

5) 带杠杆率的 Gamma 过程驱动的 BNS 模型对数价格特征指数为

$$\phi(z) = \exp\left[\begin{array}{l} z\left(Y_t + \left(r - \lambda\left(\frac{a\rho}{b-\rho}\right)\right)(T-t)\right) + \\ (z^2 - z)\frac{\varepsilon(t,T)}{2}\sigma_t^2 + \int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,\mathrm{d}s \end{array}\right] \tag{26}$$

其中

$$\varepsilon(s,T) = \lambda^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(T-s)})$$

$$\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,\mathrm{d}s = \left(\begin{array}{l}\alpha\ln\left[\frac{\alpha - f_1}{\alpha}\right] + \\ f_2\lambda(T-t)\end{array}\right) \times \frac{\nu}{\lambda(\alpha - f_2)}$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(z^2 - z)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(T-t)})$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(z^2 - z)$$

6) 不带杠杆率的 Gamma 过程驱动的 BNS 模型对数价格特征指数为

$$\phi(z) = \exp\left[\begin{array}{l} z(Y_t + r(T-t)) + \\ (z^2 - z)\frac{\varepsilon(t,T)}{2}\sigma_t^2 + \\ \int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,\mathrm{d}s \end{array}\right] \tag{27}$$

其中

$$\varepsilon(s,T) = \lambda^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(T-s)})$$

$$\int_t^T \lambda\kappa^y(f(s,z))\,\mathrm{d}s = \left(\begin{array}{l}\alpha\ln\left[\frac{\alpha - f_1}{\alpha}\right] + \\ f_2\lambda(T-t)\end{array}\right) \times \frac{\nu}{\lambda(\alpha - f_2)}$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(z^2 - z)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}),\ f_2 = \frac{1}{2}(z^2 - z)$$

3 风险中性测度下 BNS 模型参数估计方法

3.1 结构保持测度下 BNS 模型的离散化

在金融市场中，只能够观测到资产对数价格的离散时间序列，随机波动率 σ_t^2 是潜在的随机过程，需要根据离散观测价格序列，采用一定的参数估计方法估计式(19)中的参数. 可以对 BNS 模型中的对数价格过程进行离散化处理.

在时间段 Δ 上，对数价格过程的积分为

$$Y_n = \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} \mathrm{d}Y_t = Y(n\Delta) - Y((n-1)\Delta) \tag{28}$$

$n = 1, 2, \ldots,$

离散化后变为

$$\begin{aligned} Y_n = {} & (r\Delta - \lambda\kappa^y(\rho) - \frac{1}{2}\sigma_n^2\Delta) + \\ & \rho(Z(\lambda n\Delta) - Z(\lambda(n-1)\Delta)) + \sigma_n\varepsilon_n \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\varepsilon_n \sim N(0,1)$. 下文为了简化说明，令 $Z_n = Z(\lambda n\Delta)$，则上式可简化为

$$\begin{aligned} Y_n = {} & (r\Delta - \lambda\kappa^y(\rho) - \frac{1}{2}\sigma_n^2\Delta) + \\ & \rho(Z_n - Z_{n-1}) + \sigma_n\varepsilon_n \end{aligned} \tag{30}$$

随机波动率过程的离散化却非常困难，使用散粒噪声(shot noise)方法对 BNS 模型的随机波动率过程进行离散化的计算成本较大. 本文在 Valdivieso 等[42]的研究基础上，给出一种更容易编程实现的离散化方法.

根据前文有

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 & = \sigma^{2^*}(n\Delta) - \sigma^{2^*}((n-1)\Delta) \\ & = \lambda^{-1}[Z_n - \sigma^2(n\Delta) - Z_{n-1} + \sigma^2((n-1)\Delta)] \end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned} & (\sigma^2(n\Delta), Z_n) \\ & = (\exp(-\lambda\Delta)\sigma^2((n-1)\Delta), Z_{n-1}) + \eta_n \end{aligned}$$

$$\eta_n \doteq$$

$$\left(\exp(-\lambda\Delta)\int_0^\Delta \exp(\lambda u)\,\mathrm{d}Z(\lambda u), \int_0^\Delta \mathrm{d}Z(\lambda u)\right)$$

这时对随机波动率的离散化问题转化为 η_n 的离散化问题，根据 Valdivieso 等的研究，随着 $h \to 0$

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\Delta}{h}\right]} \exp(jh) Z(h) \xrightarrow{d} \int_0^{\lambda\Delta} \exp(s)\,\mathrm{d}Z(s) \tag{32}$$

因此，如果令 $Z^*(\Delta) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\Delta}{h}\right]} \exp(jh)\,\mathrm{d}Z(h)$，则有

$$\begin{aligned} \sigma^2(n\Delta) & = \exp(-\lambda\Delta)(\sigma^2((n-1)\Delta) + Z^*(\Delta)) \\ & = \exp(-\lambda\Delta)\left(\sigma^2((n-1)\Delta) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\Delta}{h}\right]} \exp(jh) Z(h)\right) \end{aligned} \tag{33}$$

$$Z(n\Delta) = Z((n-1)\Delta) + Z(\lambda\Delta) \tag{34}$$

其中 $\lceil x \rceil$ 表示小于 x 的最小整数，$\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛.

令 $\kappa^D(\theta)$ 表示随机波动率 σ_t^2 的累积量生成函数，$\kappa^D(\theta)=\ln E\left[e^{\theta\sigma_t^2}\right]$. $\kappa^y(\theta)$ 表示 Z 的累积量生成函数，可以推导出，$\kappa^D(\theta)$ 与 $\kappa^y(\theta)$ 之间的关系为 $\kappa^y(\theta)=\theta\dfrac{\mathrm{d}\,\kappa^D}{\mathrm{d}\,\theta}(\theta)$. Lévy 过程可以分为有限活动 Lévy 过程和无限活动 Lévy 过程，对应的非高斯 OU 过程驱动的随机波动率也可以分为两类，一类是由有限活动 Lévy 过程驱动的 BNS 模型，如 Gamma 过程驱动的 BNS 模型；另一类是由无限活动 Lévy 过程驱动的 BNS 模型，如 CGMY 过程驱动的 BNS 模型. 对于不同分布驱动的 BNS 模型，随机波动率服从的分布不同，离散化的具体过程也不同. 本文分别就高斯过程、Gamma 过程及 CGMY 过程驱动的 BNS 模型离散化形式进行推导，为了节省篇幅，这里只给出具体结果.

1) 高斯过程驱动的 BNS 模型离散化

高斯过程驱动的 BNS 模型中，如果波动率过程服从 $\sigma_t^2\sim N(\mu,\delta^2)$，则 Z 的累积量生成函数为：$\kappa(\theta)=\mu\theta+\delta\theta^2$，式(19)的离散化形式为

$$\begin{cases}Y_n=\left(r\Delta-\lambda(\mu\rho+\delta\rho^2)-\dfrac{1}{2}\sigma_n^2\Delta\right)+\\ \rho(Z_n-Z_{n-1})+\sigma_n\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n\sim N(0,1)\\ \sigma_n^2=\lambda^{-1}\begin{bmatrix}Z_n-\sigma^2(n\Delta)-Z_{n-1}+\\ \sigma^2((n-1)\Delta)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{35}$$

其中

$$\sigma^2(n\Delta)=\exp(-\lambda\Delta)\begin{pmatrix}\sigma^2((n-1)\Delta)+\\ \exp(u\lambda\Delta)Z(\lambda\Delta)\end{pmatrix}$$

$$Z(n\Delta)=Z((n-1)\Delta)+Z(\lambda\Delta)$$

2) Gamma 过程驱动的 BNS 模型离散化

随机变量 X 服从 Gamma 过程 $\Gamma(a,b)$，其概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{b^a x^{a-1}}{\Gamma(a)}\exp(-bx),\ \forall x>0$$

其中 Γ 是 Gamma 函数，参数为 $a>0$，$b>0$. Z(BDLP)的累积量生成函数为

$$\kappa^y(\theta)=\theta\frac{d\kappa^D(\theta)}{d\theta}=\frac{a\theta}{b-\theta},$$

则 Z 服从跳跃强度参数(intensity parameter)为 a，跳跃幅度为 Y 的复合泊松过程，即 $Z(t)=\sum_{j=1}^{N(t)}Y_j$. 其中 Y 服从参数为 b 的指数分布.

Gamma 过程驱动的 BNS 模型中，如果波动率过程服从 $\Gamma(a,b)$，则式(19)的离散化形式为

$$\begin{cases}Y_n=\left(r\Delta-\lambda\dfrac{a\rho}{b-\rho}-\dfrac{1}{2}\sigma_n^2\Delta\right)+\\ \rho(Z_n-Z_{n-1})+\sigma_n\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n\sim N(0,1)\\ \sigma^2(n\Delta)=\lambda^{-1}\begin{bmatrix}Z_n-\sigma^2(n\Delta)-Z_{n-1}+\\ \sigma^2((n-1)\Delta)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{36}$$

其中

$$\sigma^2(n\Delta)=\exp(-\lambda\Delta)\begin{pmatrix}\sigma^2((n-1)\Delta)+\\ \sum_{j=1}^{N(\lambda\Delta)}\exp(T_j)Y_j\end{pmatrix}$$

$$Z_n=Z_{n-1}+\sum_{j=1}^{N(\lambda\Delta)}Y_j$$

3) CGMY 过程驱动的 BNS 模型离散化

令参数 $a>0$，$b>0$ 以及 $\kappa\in[0,1]$，如果一个非负随机变量服从 $X\sim TS(\kappa,a,b)$ 的概率分布，则

$$f(x)=\exp\left(ab-\frac{1}{2}b^{\frac{1}{\kappa}}x\right)g(x)$$

$$g(x)=$$

$$\frac{a^{-\frac{1}{\kappa}}}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\sin(j\kappa\pi)\,\Gamma(j\kappa+1)\,2^{j\kappa+1}\left(xa^{-\frac{1}{\kappa}}\right)^{-(j\kappa+1)}$$

如果 $\kappa=\dfrac{1}{2}$，则分布变为 IG 分布. 如果 $TS(\kappa,a,b)$ 无限可分，则定义 $TS(\kappa,a,b)$ 为 Lévy 过程，对应的 Lévy 密度为

$$u(x)=\frac{a\kappa2^{\kappa}x^{-(\kappa+1)}}{\Gamma(1-\kappa)}\exp\left(-\frac{b^{\frac{1}{\kappa}}x}{2}\right)$$

当 $x>0$，有 $C=\dfrac{a\kappa2^{\kappa}}{\Gamma(1-\kappa)}$，$Y=\kappa$，$M=-\dfrac{b^{\frac{1}{\kappa}}}{2}$. $u(x)=\begin{cases}Cx^{-(Y+1)}\exp(-Mx) & x>0\\ Cx^{-(Y+1)}\exp(-Gx) & x<0\end{cases}$，此时随机过程即 CGMY 过程. 由此可知，CGMY 过程

与 TS 过程为同一随机过程，即 $TS(\kappa,a,b)$ 也可以表示成 $cgmy(\kappa,a,b)$. 若波动率服从 CGMY 过程，可知 Z(BDLP) 的累积量生成函数为 $\kappa^{y}(\theta) = 2\theta\alpha\kappa(\beta^{\frac{1}{\kappa}} - 2\theta)^{\kappa-1}$.

CGMY 过程驱动的 BNS 模型中，如果波动率过程服从 CGMY 过程 $cgmy(\kappa,a,b)$，则式(19)的离散化形式为

$$\begin{cases} Y_n = \left(r\Delta - \lambda 2\theta\alpha\kappa\left(\beta^{\frac{1}{\kappa}} - 2\theta\right)^{\kappa-1}\Delta - \frac{1}{2}\sigma_n^2\Delta\right) + \\ \rho(Z_n - Z_{n-1}) + \sigma_n\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim N(0,1) \\ \sigma^2(n\Delta) = \lambda^{-1}\begin{bmatrix} Z_n - \sigma^2(n\Delta) - Z_{n-1} + \\ \sigma^2((n-1)\Delta) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{37}$$

其中

$$\sigma^2(n\Delta) = \exp(-\lambda\Delta)\begin{pmatrix} \sigma^2((n-1)\Delta) + J_M(t) + \\ \sum_{j=1}^{N(\lambda\Delta)} \exp(T_j)Y_j \end{pmatrix}$$

$$Z_n = Z_{n-1} + I(\lambda\Delta) + \sum_{j=1}^{N(\lambda\Delta)} Y_j$$

$Y_1, Y_2 \ldots$ 是服从 Gamma 分布 $\Gamma\left(1-\kappa, \frac{b^{\frac{1}{\kappa}}}{2}\right)$ 的独立同分布随机变量序列，并且

$$J_M(t) = 2\sum_{j=1}^{M} \min\left\{\left(\frac{a\lambda T\kappa}{b_j\Gamma(1-\kappa)}\right)^{\frac{1}{\kappa}}, \frac{e_j v_j^{\frac{1}{\kappa}}}{b^{\frac{1}{\kappa}}}\right\}\exp(\lambda Tu_j) \mid \{Tu_j \leqslant t\}$$

3.2 参数估计方法

本文主要研究如何采用序贯蒙特卡洛模拟方法(sequential Monte Carlo method, SMC)对各种 BNS 模型的参数进行估计.

3.2.1 极大似然 - SMC 参数估计方法

在利用 SMC 算法估计参数估计时，基本算法就是利用极大似然估计算法并结合粒子滤波技术估计参数. 假设考虑的观测时间长度为 T，粒子数为 M，对数收益率 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$ 的联合分布为

$$p(Y_{1:T} \mid \theta) = \prod_{l=2}^{T} p(Y_l \mid Y_{1:l-1}, \theta)\, p(Y_1 \mid \theta) \tag{38}$$

其中 $p(Y_l \mid Y_{1:l-1}, \theta) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} w_l^{(i)}$. w_t 是重要权重，$w_t = \frac{p(Y_t \mid \sigma_t^{2(i)})\, p(\sigma_t^{2(i)} \mid \sigma_{t-1}^{2(i)})}{g(\sigma_t^{2(i)} \mid \sigma_{t-1}^{2(i)}, Y_t)}$，建议密度为 $g(\sigma_t^{2(i)} \mid \sigma_{t-1}^{2(i)}, Y_t)$. 通常选择 $g(\sigma_t^{2(i)} \mid \sigma_{t-1}^{2(i)}, Y_t) = p(\sigma_t^{2(i)} \mid \sigma_{t-1}^{2(i)})$，这时 $w_t^{(i)} = p(Y_t \mid \sigma_t^{2(i)})$. 令 σ_1^2 初始密度服从 $P(\cdot)$，建议密度函数为 $p(\sigma_t^{2(i)} \mid \sigma_{t-1}^{2(i)})$. 令粒子 $i = 1, 2, \ldots M$，SMC 算法如下:

(1) 当 $l = 1$ 时，从 $\tilde{\sigma}_1^{2(i)} \sim P(\cdot)$ 中抽样 $\tilde{\sigma}_1^2$，这时 $w_1^{(i)} = p(Y_1 \mid \sigma_1^{2(i)})$，$\tilde{w}_1^{(i)} = \frac{w_1^{(i)}}{\sum_{j=1}^{M} w_1^{(j)}}$;

(2) 当 $l = 2, 3, \ldots, T$，从建议密度 $p(\tilde{\sigma}_t^{2(i)} \mid \tilde{\sigma}_{t-1}^{2(i)})$ 中抽样 $\tilde{\sigma}_t^2$，这时 $w_t^{(i)} = p(Y_t \mid \tilde{\sigma}_t^{2(i)})$，$\tilde{w}_t^{(i)} = \frac{w_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^{M} w_t^{(j)}}$;

(3) 如果有效样本规模(effective sample size, ESS)，$ESS = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M}(w_t^{(j)})^2}$ 小于某个阈值(例如 $\frac{M}{2}$) 进行再抽样(resmaple). 即令 $\sigma_t^{2(i)} = \tilde{\sigma}_t^{2(k_i)}$，其中 $k_{1:M}$ 从 $1:M$ 中根据 $w_t^{1:M}$ 进行抽取. 这时得到极大似然参数估计值如下:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \frac{1}{T}\left[\sum_{l=2}^{T} \ln p(Y_l \mid Y_{1:l-1}, \theta) + \ln p(Y_1 \mid \theta)\right] \tag{39}$$

3.2.2 基于联合样本估计的参数估计方法

联合样本估计算法即在进行参数估计中同时以标的资产价格和期权价格数据作为样本数据的一种参数估计算法. 在利用极大似然法则进行参数估计中，联合样本估计考虑的似然函数是对数收益率分布服从的似然函数值与期权价格误差分布服从的似然函数值之和. 具体过程如下:

首先令在 t 时刻存在的欧式期权价格 $V_t = (C_t, P_t)$，假设在 t_k 时刻交易的 M 个期权的市场价格 $(V_k^{(1)}, V_k^{(2)}, \ldots, V_k^{(M)})$，对应的模型估计价格为 $(\tilde{V}_k^{(1)}, \tilde{V}_k^{(2)}, \ldots, \tilde{V}_k^{(M)})$，假设变量 $X_k = (Y_k, V_k^{(1)}, V_k^{(2)}, \ldots, V_k^{(M)})$，则联合样本的似然函数为

$$f(X_{1:T}; \theta) = \prod_{k=2}^{T} f(X_k \mid X_{1:k-1}; \theta)\, f(X_1; \theta)$$

根据 Hurn 等的研究，若每个期权的市场价格均是彼此独立，则有

$$f(X_k \mid X_{1:k-1};\theta)$$
$$= f(Y_k \mid Y_{1:k-1}, V_{k-1}^{(1):(M)};\theta) f(V_k^{(1):(M)} \mid Y_k, V_{k-1}^{(1):(M)}, Y_{1:k-1};\theta)$$
$$= f(Y_k \mid Y_{1:k-1};\theta) \prod_{j=1}^{M} f(V_k^{(j)} \mid Y_k)$$

其中 $f(Y_k \mid Y_{1:k-1};\theta)$ 可由上文提到的极大似然 – SMC方法得到. 而期权市场价格和理论价格之间关系为

$$V_k^{(i)} = \tilde{V}_k^{(i)}(Y_k, \theta) + \varepsilon_k^{(i)} \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

其中 $\varepsilon_k^{(i)}$ 为价格误差，是一个正态分布. 因此 $V_k^{(j)}$ 与 Y_k 之间的关系可近似看成 $V_k^{(j)}$ 与 $\tilde{V}_k^{(j)}$ 之间的关系，即有

$$f(V_k^{(j)} \mid Y_k) = g(V_k^{(j)} \mid \tilde{V}_k^{(j)};\theta)$$

其中 $g(V_k^{(j)} \mid \tilde{V}_k^{(j)};\theta)$ 表示在 $\tilde{V}_k^{(j)}$ 下的 $V_k^{(j)}$ 的条件分布.

根据 $\varepsilon_k^{(i)}$ 选择概率分布的不同，$g(V_k^{(j)} \mid (\tilde{V}_k^{(j)};\theta))$ 具有不同的分布，这里采用 Hurn 等使用的分布，即令

$$V \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\tilde{V}} \exp\left[-\frac{(H-\tilde{V})}{2\alpha^2\tilde{V}^2}\right]$$

这里 α 是一个常数，本文中令 $\alpha = 10$. 联合样本估计中参数的估计值为

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \frac{1}{T}\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{M} \ln g(V_1^{(j)} \mid \tilde{V}_1^{(j)};\theta) + \ln f(Y_1;\theta) + \\ \sum_{k=2}^{T} \left(\begin{array}{l} \ln f(Y_k \mid Y_{1:k-1};\theta) + \\ \sum_{j=1}^{M} \ln g(V_k^{(j)} \mid \tilde{V}_k^{(j)};\theta) \end{array}\right) \end{array}\right] \tag{40}$$

3.2.3　基于梯度 – 序贯蒙特卡洛的参数估计方法

经典的 SMC 算法进行参数估计有一定的缺陷. 首先均较大程度上依赖初始值以及可能陷入局部最优，其次建议密度的选择也会影响算法的实际效果. 同时 SMC 存在粒子退化枯竭问题. Peng 等通过理论证明和仿真模拟发现，基于梯度的 SMC 算法对参数真实值具有较好的收敛性，并且计算时间复杂度要远远低于 SMC^2 和 PMCMC 等算法. 因此，本文考虑使用梯度–SMC 参数估计方法，对不同 Lévy 过程驱动的 BNS 模型参数进行估计.

(1) 基于极大似然思想的梯度估计方法

观测值 Y_n 的条件分布符合独立正态分布，似然函数是观测值和增强隐藏变量之间的联合密度积分. 为了方便参数估计，离散观测值和增强隐藏变量可写成 HMM(hidden Markov model) 形式.

令 (Y_n, X_n) 代表 HMM 中的观测值和隐藏变量，其中 $X_n \triangleq (Z_n, \sigma_n, Z_{n-1}, \sigma_{n-1})$，由上文可知 BNS 模型的观测变量 Y_n 可以简单写成如下形式

$$Y_n \mid X_n \sim N\left(\begin{array}{l} (r\Delta - \lambda\kappa^y(\rho)\Delta - \frac{1}{2}\sigma_n^2\Delta) + \\ \rho(Z_n - Z_{n-1}), \sigma_n^2 \end{array}\right)$$

令

$$G(Y_n, X_n) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{-Y_n - (r\Delta - \lambda\kappa^y(\rho)\Delta - \frac{1}{2}\sigma_n^2\Delta) - \frac{\rho(Z_n - Z_{n-1})}{2\sigma_n^2}\right\} \tag{41}$$

由于 Y_n 是一个观测变量，可以简化写成 $G(X_n) = G(Y_n, X_n)$. 观测变量的对数似然函数为

$$\ln L_N^{\theta}(Y) \triangleq \ln \int \prod_{n=2}^{N} [G_n(X_n) P(X_{n-1}, \mathrm{d}X_n)] G_1(X_1) P(\mathrm{d}X_1) = \ln E[\prod_{n=1}^{N} G_n(X_n)] \tag{42}$$

其中 Y 是对数价格向量，$P(\cdot,\cdot)$ 是转移核(transition kernel)，$P_1(\cdot)$ 是初始分布. 通过极大似然估计法得到要估计的参数，即

$$\hat{\theta}_N = \arg\max_{\theta\in\Theta} \ln L_N^{\theta}(Y) \tag{43}$$

命题 3　令真实参数的向量为 θ^*，Fisher 矩阵为 $\Upsilon(\theta_*)$. 关于 HHM 的极大似然估计(MLE) 的渐进性质如下: (1) 当 $n \to \infty$，极大似然估计值 $\hat{\theta}_N$ 强一致(strongly consistent) 收敛于 θ^*；(2) 当 $n \to \infty$，极大似然估计值 $\hat{\theta}_N$ 是渐进正态分布，即

$\sqrt{N(\hat{\theta}_N - \theta_*)}$ 依分布收敛于 $N(0, \Upsilon(\theta_*)^{-1})$. 具体详见 Cappé 等[43].

由于极大似然参数估计需要求式(42)的梯度,这需要从增强的隐藏状态变量(augmented hidden states)中抽样. 但是如果隐藏变量的先验分布和后验分布显著不同,直接从隐藏状态变量的先验分布中抽样可能会使估计值方差很大. 为了克服直接从先验分布中抽样的不足,尽量从包含观测值信息的后验分布中抽样. 由于 HMM 的序贯结构,可以采用 SMC 来迭代抽样,对参数和隐藏状态变量的条件分布进行估计. 为了应用 SMC 方法,需要把式(42)的对数似然函数分解为如下的条件期望之和,即

$$l_N(\theta) = \ln L_N(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln \pi_{n+1|n}(G_{n+1}) \quad (44)$$

式中

$$\pi_{n+1|n}(G_{n+1}) \triangleq \frac{E[G_{n+1}(X_{n+1}) \prod_{t+1}^{n} G_t(X_t) \mid X_1]}{E[\prod_{t+1}^{n} G_t(X_t) \mid X_1]} \quad (45)$$

为了最大化式(44),假设函数 $l_N(\theta)$ 中参数 θ 的梯度估计为 $\nabla_\theta l_N(\theta) \triangleq \nabla_\theta E_\theta[h(\xi)]$,可以得到式(44)中参数 θ 的梯度估计为

$$\nabla_\theta l_N(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\nabla_\theta \pi_{n+1|n}(G_{n+1})}{\pi_{n+1|n}(G_{n+1})} \quad (46)$$

(2)梯度估计的收敛性

在得到一个梯度估计后,在 $\hat{\theta} \in \Theta$ 内寻找一个最优的 $\hat{\theta}$,即

$$\theta_{k+1} = \Pi_\Theta[\theta_k + \gamma_k \hat{\nabla}_\theta l_N(\theta_k)] \quad (47)$$

其中 Π_Θ 是一个投影(projection),将参数范围限定在 Θ 内. $\hat{\nabla}_\theta l_N(\theta_k)$ 是 θ 的梯度估计. 梯度估计优化步长的大小以及优化路径的唯一性都是确定是否得到算法参数收敛的关键.

命题 4 当 $\theta \in \Theta$,假设 $\nabla_\theta l_N(\theta)$ 是连续的,并且 $\sum \gamma_k = \infty$, $\sum \gamma_k^2 < \infty$, $E[\hat{\nabla}_\theta l_N(\theta)] = \nabla_\theta E[l_N(\theta)]$, $E[(\hat{\nabla}_\theta l_N(\theta))^2] < \infty$,如果有唯一的解 $\hat{\theta} \in \Theta$,能够使得 $\nabla_\theta l_N(\theta) = 0$,同时 $\forall \theta < \hat{\theta}$, $\nabla_\theta J(\theta) > 0$,那么通过式(47)能够得到 $\theta_n \to \hat{\theta}$. 具体参加 Kushner 等的研究[44].

我们的目标是最大化式(44),对于基于梯度的仿真优化算法,关键步骤是推导出梯度的估计量. 在这里,需要找到式(46)梯度的无偏估计量,其决定了模型估计参数的收敛性. 本文使用梯度估计算法中的 IPA(Infinitesimal perturbation analysis)算法和 SPA(smoothed perturbation analysis)算法得到式(46)的具体形式. 根据 Peng 等的研究,这两个算法能得到梯度的无偏估计量. 在此基础上,可分别得到似然函数的 IPA 梯度估计和 SPA 梯度估计,然后利用 SMC 算法(粒子滤波算法)从后验分布抽样,得到如下梯度估计

$$\nabla l_N^M = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sum_{i=1}^{M} \left(\nabla_{\theta,IPA}\{G_n(\tilde{x}_n^i)\} + G_n(\tilde{x}_n^i) \left[\Lambda_{n-1}^i - \frac{1}{M} \sum_j \Lambda_{n-1}^j \right] \right)}{\sum_{i=1}^{M} G_n(\tilde{x}_n^i)} \quad (48)$$

$$\nabla l_N^M = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sum_{i=1}^{M} \left(\nabla_{\theta,SPA}\{G_n(\tilde{x}_n^i)\} + G_n(\tilde{x}_n^i) \left[\Lambda_{n-1}^i - \frac{1}{M} \sum_j \Lambda_{n-1}^j \right] \right)}{\sum_{i=1}^{M} G_n(\tilde{x}_n^i)} \quad (49)$$

在得到一般情况下 BNS 模型参数的 IPA 和 SPA 梯度估计之后. 作为本文的关键和创新,我们推导出了风险中性下,Gamma 过程(分含与不含杠杆率两种模型),CGMY 过程(分含与不含杠杆率两种模型)驱动下的 BNS 模型中,具体参数梯度估计量的具体形式. 由于篇幅限制,具体推导结果和详细证明过程在此省略,需要可以和作者索取.

4 实证研究

4.1 数据描述

利用 Matlab2012a 与 Virtual Studio 2012 软件编程,对模型进行参数估计与实证分析. 程序主要

采用 Matlab 与 C + + 混合编程技术编写,主程序采用 Matlab,耗时较多的子程序利用 C + + 语言编写以提高效率. 数据选取 2010 年 1 月 2 日 ~ 2014 年 8 月 31 日之间,总共 1 173 个交易日内的标准普尔 500 指数(即 S&P500 指数) 价格和对应交易日的期权价格数据作为样本内数据. 包括: (1) 基础资产取 S&P500 指数日交易数据,总共 1 173个交易日数据(数据来源: https: //finance. yahoo. com/) ; (2) 期权数据选取 S&P500 指数期权数据(在芝加哥期权交易所交易的欧式看涨期权和欧式看跌期权. 数据来源: OptionMetrics 数据库) ,其中看涨期权 1 576 552 个,看跌期权 1 576 434 个(有个别交易日个别情况只有看涨期权而无看跌期权) ,总共 3 152 986 个期权数据; (3) 无风险利率选取 3 个月美国国债利率(数据来源: Datastream 数据库) . 期权数据库提供的原始期权数据包括期权数量、交易量、交割价格、期权市场价格以及剩余到期期限(自然日) .

其中有两个问题需要说明: (1) 数据剔除问题. Huang 和 Wu 等认为在进行期权定价问题研究时,需要剔除具有极端性质的期权(如 K/S 过大或过小,剩余期限过长或过短的情况) ,而本文打算比较模型对不同性质欧式期权的定价表现,其中也包括对具有极端性质期权的定价效果研究; 同时极端性质期权存在大量交易(157 余万期权中大概有 60 万期权是此类期权) ,有进行研究的必要. 因此,在后续研究中将全方位比较模型对各种性质期权的定价效果,对极端情况不做剔除. (2) 关于看跌期权的定价问题. 一些学者使用带有相同信息(相同的交割价格、剩余期限和标的物价格) 的看涨期权为看跌期权进行定价,即期权平价公式(put-call-parity, PCP) . 但是实证中发现很多期权价格违背了 PCP,这可能是由于存在交易费用和市场限制,很多理论上的套利机会真实市场上并不存在,这就使得基于无套利理论的 PCP 真实市场上并不一定成立.

4.2　模型参数值

本文分别考虑了利用极大似然 – 粒子滤波算法(MLE-SMC 算法) ,基于 S&P500 与期权数据联合样本估计的极大似然粒子滤波算法(下文简称联合估计算法) ,以及利用梯度估计 – 粒子滤波算法(下文简称梯度 – SMC 算法) 三种参数估计算法,对含(不含) 杠杆率高斯过程驱动 BNS 模型、含(不含) 杠杆率 Gamma 驱动 BNS 模型、含(不含) 杠杆率 CGMY 驱动的 BNS 模型、BS 模型和 Heston 模型参数估计. 根据模型中包含信息对模型进行简化表示为:

(1) 对于 MLE_SMC 算法而言,高斯过程驱动 BNS 模型简称为 gau_m,高斯过程驱动的带杠杆率的 BNS 模型简称为 gau_l_m; Gamma 过程驱动的 BNS 模型简称为 gam_m,Gamma 过程驱动的带杠杆率的 BNS 模型简称为 gam_l_m; CGMY 过程驱动的 BNS 简称为 cgmy_m,CGMY 过程驱动的带杠杆率的 BNS 模型简称为 cgmy_l_m.

(2) 对于联合估计算法而言,高斯过程驱动 BNS 模型简称为 gau_o,高斯过程驱动的带杠杆率 BNS 模型简称为 gau_l_o; Gamma 过程驱动的 BNS 模型简称为 gam_o,Gamma 过程驱动的带杠杆率的 BNS 模型简称为 gam_l_o; CGMY 过程驱动的 BNS 模型简称为 cgmy_o,CGMY 过程驱动的带杠杆率的 BNS 模型简称为 cgmy_l_o.

(3) 对于梯度 – SMC 算法,Gamma 过程驱动的 BNS 模型简称为 gam_g,Gamma 过程驱动的带杠杆率的 BNS 模型简称为 gam_l_g; CGMY 过程驱动的 BNS 模型简称为 cgmy_g,CGMY 过程驱动的带杠杆率的 BNS 模型简称为 cgmy_l_g.

(4) Heston 模型采用 MLE_SMC 算法估计.

模型参数初始值表如表 1 所示. 参数初始值的选取主要参考已有文献中的经验值(如 Nicolato 和 Venardos,Andrieu 等) . 为了更准确比较在不同参数估计算法同一具体模型的定价效果,在利用不同算法对同一 Lévy 过程驱动下 BNS 模型进行参数估计过程中,采用相同的初始值(见表 1) .

表 1 参数初始值表

Table 1 Initial value of parameter

	λ	δ^2	κ	a	b	ρ
gau_m	0.1	0.01	—	—	—	—
gau_l_m	0.1	0.1	—	—	—	-0.1
gam_m	1	—	—	1	300	—
gam_l_m	1	—	—	1	300	-0.01
cgmy_m	1	—	0.1	10	5	—
cgmy_l_m	1	—	0.1	10	5	-1
gau_o	0.1	0.01	—	—	—	—
gau_l_o	0.1	0.1	—	—	—	-0.1
gam_o	1	—	—	1	300	—
gam_l_o	1	—	—	1	300	-0.01
cgmy_o	1	—	0.1	10	5	—
cgmy_l_o	1	—	0.1	10	5	-1
gam_g	1	—	—	1	300	—
gam_l_g	1	—	—	1	300	-0.01
cgmy_g	1	—	0.1	10	5	—
cgmy_l_g	1	—	0.1	10	5	-1
Heston	0.1	—	—	0.1	0.5	-0.9

梯度 - SMC 估计算法中，步长的选择是一个难点，优化过程中的步长 γ_k 必须满足相关条件才能保证参数收敛性; 同时 γ_k 随着迭代次数的增加而减小的幅度不能太快也不能太慢，通常定义 $\gamma_k = c(1/k)^{\alpha}$，其中 $c > 0$，$1/2 < \alpha \leqslant 1$. 如果 α 太小，则步长减小的非常慢，同时出现较高的波动率; 如果 α 太大，则步长快速衰减. 通常对数似然函数对参数变化比较敏感，因此，选择一个相对较小的 α，$\alpha = 2/3$. 同时由于模型对不同参数敏感性不同，需要为模型的不同参数设置不同的 c 值，但这些 c 的值都比较小，以此来避免在早期迭代步骤产生较大的震荡. 最后何时停止算法也是一个关键，这里参考 Peng 等设置以及本文自身实证效果，令算法迭代 10 000，发现在 1 000 次迭代后参数轨迹都趋于稳定，可以认为其收敛. 因此燃烧掉 2 000 次，剩余 8 000 次参数迭代数据取均值为模型参数值.

所有模型在不同算法下的参数估计值如表 2 所示(保留四位有效数字). 其中梯度 - SMC 算法模型参数值下括号内数值为对应的估计参数标准差. 对应表 1 参数初始值可以发现，单纯利用 MLE_SMC 算法估计 CGMY 过程驱动的含(不含)杠杆率 BNS 模型参数，估计值在参数初始值附近，而利用联合样本估计算法与梯度 - SMC 算法得到的参数估计值与参数初始值之间有了较大的不同. 由此推测单纯利用 MLE - SMC 算法得到的参数估计值可能陷入了局部最优情况，利用联合样本估计算法和梯度 - SMC 算法可能会对模型参数估计有较大改进.

表 2　模型参数估计表

Table 2 Parameter estimates of models

	λ	δ^2	κ	a	b	ρ
gau_m	0.000 7	0.033 6	—	—	—	—
gau_l_m	0.000 4	0.081 8	—	—	—	-0.000 4
gam_m	0.640 8	—	—	0.940 0	101.000 4	—
gam_l_m	0.873 5	—	—	0.903 5	296.385 6	-0.009 5
cgmy_m	1.003 4	—	0.100 1	10.169 0	5.001 9	—
cgmy_l_m	1.020 1	—	0.099 5	10.266 8	5.034 2	-0.953 3
gau_o	0.003 5	0.026 1	—	—	—	—
gau_l_o	0.003 8	0.047 6	—	—	—	-0.034 7
gam_o	0.934 2	—	—	0.501 4	100.237 2	—
gam_l_o	0.608 5	—	—	1.540 6	198.112 4	-0.020 7
cgmy_o	0.927 2	—	0.088 7	9.865 8	4.319 9	—
cgmy_l_o	1.145 5	—	0.098 6	7.509 8	4.972 5	-0.852 9
gam_g	0.907 2 (0.014 2)	—	—	0.241 5 (0.000 3)	314.685 4 (1.842 5)	—
gam_l_g	0.860 9 (0.015 5)	—	—	0.229 4 (0.004 7)	321.270 1 (1.915 1)	-0.334 8 (0.032 4)
cgmy_g	0.9075 (0.0029)	—	0.076 8 (0.000 4)	19.229 7 (1.514 0)	2.378 3 (0.028 8)	—
cgmy_l_g	0.904 3 (0.002 8)	—	0.076 0 (0.000 5)	21.428 3 (1.334 4)	2.373 7 (0.028 6)	-1.182 4 (0.030 7)
Heston	0.130 1	—	—	0.026 4	2.043 4	-0.953 8

4.3　模型比较 1: 样本内数据拟合效果

根据表 2 中得到的所有模型参数估计值，研究样本内的欧式期权定价问题. 本节采用两种标准衡量期权实际价格与理论价格之间的误差，包括衡量绝对误差的均方误差(root mean squared error，RMSE)与衡量相对误差的绝对平均误差率(average relative percentage error，ARPE)如下:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{option} \frac{(price_{market} - price_{model})^2}{\#options}}$$

$$ARPE = \frac{1}{\#options} \sum_{oprions} \frac{|price_{market} - price_{model}|}{price_{market}}$$

其中 $\#options$ 为期权的个数，$price_{market}$ 为期权的市场价格，$price_{model}$ 为利用 FFT 方法得到的期权理论价格. 在下文实证分析时，认为 RMSE 或 ARPE 最小的模型定价效果最优. 本文在模型比较中还包括了 BS 公式期权定价误差情况.

4.3.1　模型在不同子样本区间内的定价效果

实证研究中，将总的样本根据剩余到期期限(自然日)与 K/S 值划分为不同的子样本区间，比较在各子样本区间内不同模型对欧式看涨和看跌期权的定价效果. 其中按照剩余期限的长短分为一个月内[1,30]，第二个月内(30,60]，三个月到半年(60,180]，半年到一年(180,360]，一年到两年(360,720]以及两年以上(大于 720)六个区间;

K/S 分为小于等于 0.8，[0.8,0.9]，(0.9,0.95]，(0.95,0.975]，(0.975,1]，(1,1.025]，(1.025,1.05]，(1.05,1.1]，(1.1,1.2] 以及大于 1.2. 由于篇幅限制，具体结果在此省略，需要可以和作者索取. 这里把结果总结如下.

(1) 欧式看涨期权定价误差表(RMSE)

采用 RMSE 标准，对所有模型对欧式看涨期权定价效果进行分析. 对所有子区间内模型定价效果分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. Heston 模型在实值期权和一般虚值期权定价上都具有优势; cgmy_l_o 对深度虚值期权($K/S > 1.1$)定价效果较好.

②对于剩余期限在一个月到两个月之间的情况. cgmy_l_g 对深度实值期权定价效果最好; Heston 模型对一般实值期权和一般虚值期权 RMSE 最小; 当 K/S 在 1 附近(0.975,1.025] cgmy_g 模型和 cgmy_l_o 模型定价效果最好; cgmy_l_o 对深度虚值期权($K/S > 1.1$) RMSE 最小.

③对于剩余期限在两个月到半年之间的情况. cgmy_g 模型对一般实值期权的定价效果最好; cgmy_l_g 模型在 K/S 在(0.8,0.9]，(1,1.025] 区间定价效果最好; 对于深度虚值期权 Heston 模型定价最具有优势.

④对于剩余期限在半年到一年之间的情况. cgmy_g 模型和 cgmy_l_g 模型对实值期权和一般虚值期权定价效果最好; Heston 模型对深度虚值期权($1.05 < K/S \leqslant 1.2$)具有定价优势.

⑤对于剩余期限在一年到两年之间的情况. cgmy_g 模型对于实值期权和一般虚值期权的定价效果最好; cgmy_l_g 模型在两个子区间内(小于 0.8 与(1,1.025])成为定价效果最好的模型; 对于深度虚值期权($K/S > 1.1$)依旧是 Heston 模型具有定价优势.

⑥对于剩余期限在两年以上的长期期权. gam_m 模型对实值期权和一般虚值期权的定价效果最好; gam_o 模型对深度虚值期权($K/S > 1.1$)具有定价上的优势.

总的来说当采用 RMSE 衡量看涨期权定价误差效果时，Heston 模型对超短期期限(两个月以内)的实值期权和一般虚值期权定价较好; 对剩余期限在两个月以上两年以内的情况，cgmy_g、cgmy_l_g 和 cgmy_l_o 对实值期权和一般虚值期权具有定价优势; Heston 模型对深度虚值期权定价效果最好; 对剩余到期期限在两年以上的情况，gam_m 在期权定价上效果更好.

(2) 欧式看跌期权定价误差(RMSE)

采用 RMSE 标准时，对所有模型对欧式看跌期权定价效果进行分析. 所有子区间内模型定价效果分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. 大部分情况下 cgmy_l_o 模型 RMSE 最小.

②对于剩余期限在一个月到两个月之间的情况. Heston 模型对虚值期权定价效果最好; cgmy_l_g 模型对实值期权定价上具有优势.

③对于剩余期限在两个月到半年之间的情况. cgmy_l_g 模型对虚值期权以及深度实值期权(K/S 大于 1.1)的定价效果最好; cgmy_l_o 模型对一般实值期权 RMSE 最小.

④对于剩余期限在半年到一年之间的情况. 对于 $0.9 < K/S \leqslant 0.975$ 两种情况下 Heston 模型具有优势; 其他大部分 K/S 情况下 cgmy_l_g 模型 RMSE 最小.

⑤对于剩余期限在一年到两年之间的情况. cgmy_l_g 模型对绝大部分情况均具有定价优势.

⑥对于剩余期限在两年以上的情况. gau_l_o 模型对绝大部分子样本区间内的期权定价效果均最好.

总的来说采用 RMSE 衡量欧式看跌期权定价效果时，cgmy_l_g 模型和 cgmy_l_o 模型对绝大部期权(两年以内)的定价效果均最好; 对于剩余期限两年以上的长期期权而言，gau_l_o 具有定价优势.

(3) 欧式看涨期权绝对均值误差率(ARPE)

在 ARPE 标准下，对所有模型对欧式看涨期权定价效果进行分析. 对所有子区间内模型定价

效果分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. 对于实值期权而言,cgmy_g 模型和 cgmy_l_g 模型定价效果较好; 对于虚值期权而言,cgmy_l_o 在 $K/S > 1.05$ 的三种情况下定价具有优势.

②对于剩余期限在一个月到两个月之间的情况. cgmy_g 模型和 cgmy_l_g 模型同样对实值期权定价效果最好; 对于一般的虚值期权($1 < K/S \leqslant 1.05$ 以及 $K/S > 1.1$),cgmy_l_o 模型 ARPE 最小.

③对于剩余期限在两个月到半年之间的情况. gau_l_o 模型对 K/S 在 1 附近的期权定价效果最好(0.95,1.025]; cgmy_l_o 模型对大部分一般虚值期权 ARPE 最小.

④对于剩余期限在半年到一年之间的情况,gau_l_o 模型对(0.9,1.025] 区间内期权定价效果最好.

⑤对于剩余期限在一年以上的情况. 除了深度实值期权和深度虚值期权($K/S \leqslant 0.8$,$K/S > 1.1$) 外,gam_m 模型对其他大部分期权的定价效果均是最好.

总的来说当采用 ARPE 标准衡量欧式看涨期权定价效果时,对于剩余期限在两个月以内的短期期权来说,cgmy_g 和 cgmy_l_g 对实值期权定价效果最好; cgmy_l_o 模型对虚值期权定价效果最好; 对于剩余期限在两个月到一年的中短期期权,gau_l_o 对一般实值期权定价效果最好(0.9,1.025]; 对于剩余期限在一年以上的长期期权,gam_m 对大部分期权的定价效果均是最好.

(4) 欧式看跌期权绝对均值误差率(ARPE)

在 ARPE 标准下所有模型对欧式看跌期权定价效果进行分析,所有子区间内模型定价效果分别分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. cgmy_l_g 模型在绝大多数情况下定价效果都是最好的.

②对于剩余期限在一个月到两个月之间的情况. Heston 模型对于一般实值期权与一般虚值期权(K/S 在区间(0.95,0.975] 以及(1.05,1.2]) 定价效果最好; cgmy_l_g 模型对于 K/S 在 1 附近(K/S 在区间(0.975,1.05]) 的期权 ARPE 最小.

③对于剩余期限在两个月到半年之间的情况. gau_l_o 模型对一般实值期权与一般虚值期权定价效果均是最好的(K/S 在区间(0.95,1.05]) .

④对于剩余期限在半年以上的所有情况 gau_l_o 模型在大多数情况下定价效果最优.

总的来说当采用 ARPE 衡量欧式看跌期权定价效果时,对于剩余期限在两个月以内的短期期权,cgmy_l_g 模型对大部分期权定价效果最优,对于剩余期限在两个月以上的中长期期权,gau_l_o 模型 ARPE 最小.

综上所述,在 RMSE 标准下,cgmy_l_g 以及 cgmy_l_o 模型对大部分期权(包括看涨期权和看跌期权) 来说定价效果最优; gam_m 对长期看涨期权(两年以上) 的定价误差最小,gau_l_o 长期看跌期权(两年以上) 的 RMSE 最小. 而在 ARPE 标准下,cgmy_l_g 对短期期权(两个月以内,包括看涨期权和看跌期权) 的定价效果最好; gau_l_o 对中长期看跌期权的 ARPE 最小; gam_m 对长期看涨期权(两年以上) 的 ARPE 最小.

整体上来说,在绝大多数情况下,本文提到的多种 BNS 模型确实均比 BS 模型和 Heston 模型定价效果具有不同程度的改进; 实值期权的定价误差要小于虚值期权. 实值期权定价误差随着剩余到期期限的增加而大体呈增大趋势,虚值期权的定价误差随剩余到期期限增加而大体趋向变小.

4.3.2　模型整体效果

在讨论了模型在不同样本子区间内的定价效果之后. 下面研究在 ARPE 标准下,不同模型整个样本区间内定价效果.

(1) 同一模型在不同算法下的定价效果

在上文分析中,带有杠杆率的 CGMY 过程驱动 BNS 模型(cgmy_l_o,cgmy_l_g 模型) 在大部分情况下对期权定价效果较好,下面以此模型为研究对象,研究其在 MLE-SMC、联合样本估计算法以及梯度 -SMC算法下的定价效果,如表 3 所示.

表 3 不同参数估计方法的期权定价误差(保留四位有效数字)

Table 3 In-sample fit measured via ARPE with different parameter estimation methods

模型	参数个数	看涨期权 ARPE	模型	参数个数	看跌期权 ARPE
cgmy_l_m	5	0.397 3	cgmy_l_m	5	0.570 4
cgmy_l_o	5	0.386 3	cgmy_l_o	5	0.573 3
cgmy_l_g	5	0.425 9	cgmy_l_g	5	0.558 7
Heston	4	1.003 1	Heston	4	2.295 9
BS	1	0.681 5	BS	1	0.617 1

由表 3 所示，无论对看涨期权还是看跌期权来说，cgmy_l_m 模型、cgmy_l_o 模型以及 cgmy_l_g 模型的估计效果都要优于 Heston 模型以及 BS 模型定价效果; 对于看涨期权而言，cgmy_l_o 模型的 ARPE 仅为 0.386 3 最小; 对于看跌期权而言，cgmy_l_g 模型的 ARPE 为 0.558 7，定价效果最好.

(2) 同一算法下不同 Lévy 过程驱动的 BNS 模型定价效果

由上文可知联合估计算法对看涨期权定价效果最好，梯度 - SMC 估计算法对看跌期权定价效果最好. 下面分别研究在上述最优算法下，不同模型对看涨期权和看跌期权定价效果. 分别选取带有杠杆率的高斯过程驱动的 BNS 模型，带有杠杆率的 Gamma 过程驱动的 BNS 模型，CGMY 过程驱动的 BNS 模型对欧式看涨和看跌期权总体定价误差情况如表 4 所示.

表 4 同类算法不同 Lévy 过程驱动的 BNS 模型的期权定价 ARPE 表(保留四位有效数字)

Table 4 In-sample fit measured via ARPE for the differnent calibrated models

模型	参数个数	看涨期权 ARPE	模型	参数个数	看跌期权 ARPE
gau_l_o	3	0.673 4	—	—	—
gam_l_o	4	0.478 1	gam_l_g	4	0.565 7
cgmy_l_o	5	0.386 3	cgmy_l_g	5	0.558 7
Heston	4	1.003 1	Heston	4	2.295 9
BS	1	0.681 5	BS	1	0.617 1

由表 4 可知，对于看涨期权而言，cgmy_l_o 效果最优，gam_l_o 略差，gau_l_o 定价误差要大于上述两个模型，与 BS 公式效果差不多但优于 Heston 模型. 对于看跌期权而言，cgmy_l_g 模型定价效果最好，gam_l_g 模型次之，这两个模型定价效果要优于 BS 公式和 Heston 模型.

(3) 增加杠杆率是否会改进模型定价效果?

下面考虑杠杆率是否会对模型定价效果有所改进，依旧分别使用联合估计算法和梯度 - SMC 估计方法，比较 CGMY 过程驱动的 BNS 模型，带有杠杆率的 CGMY 过程驱动的 BNS 模型分别对看涨期权与看跌期权定价效果，其定价误差情况如表 5.

表 5 “杠杆效应”对期权定价的影响(保留四位有效数字)

Table 5 The effect of leverage ratio on the option pricing of BNS models

模型	参数个数	看涨期权 ARPE	模型	参数个数	看跌期权 ARPE
cgmy_o	4	0.407 1	cgmy_g	4	0.560 2
cgmy_l_o	5	0.386 3	cgmy_l_g	5	0.558 7
Heston	4	1.003 1	Heston	4	2.295 9
BS	1	0.681 5	BS	1	0.617 1

由表 5 可知,对于定价看涨期权来说,cgmy_o 与 cgmy_l_o 的误差率要远小于 Heston 模型与 BS 模型,而加杠杆率的 cgmy_l_o 确实会对看涨期权定价有所改进(cgmy_l_o 的误差率要比 cgmy_o 低 0.02 左右);对于定价看跌期权来说情况类似,cgmy_g 与 cgmy_l_g 的误差率要小于 Heston 模型与 BS 模型,加杠杆率的 cgmy_l_g 定价效果最优.

4.4　模型比较 2:样本外数据

4.4.1　模型在不同子样本区间内的定价效果

上文的研究发现,不同 Lévy 过程驱动的 BNS 模型均对样本内实值期权有较好的定价效果. 但是定价误差较小的原因除了模型自身能够很好模拟资本市场外,也有可能是技术上的改进导致一些模型对样本内期权价格拟合较好. 为了验证模型是否真正能够描绘资本市场,还需要研究其对样本外期权价格的预测效果,同时价格预测也是一种检验模型稳定性的途径.

选取 2014/9/1 到 2015/7/30,共 230 个交易日的欧式期权价格作为样本外数据,共有期权 1 540 030个,其中 770 200 个看涨期权,769 830 个看跌期权. 基于 4.2 节已有的参数估计值,利用期权定价公式对样本外期权价格进行预测.

实证研究中统计了所有模型基于样本外期权的定价 RMSE 表和 ARPE 表,由于篇幅限制,具体结果在此省略,需要可以和作者索取. 与样本内情况类似,将总的样本根据剩余到期期限(自然日)与 K/S 划分为不同的子样本区间,分别比较在子样本区间内不同模型分别对欧式看涨和欧式看跌期权的定价效果. 其中按照剩余期限的长短分为一个月内([1,30]);第二个月内((30,60]);三个月到半年((60,180]),半年到一年((180,360]),一年到两年((360,720])以及两年以上(大于 720)六个区间; K/S 分为:小于等于 0.8,(0.8,0.9],(0.9,0.95],(0.95,0.975],(0.975,1],(1,1.025],(1.025,1.05],(1.05,1.1],(1.1,1.2]以及大于 1.2.

(1)欧式看涨期权定价误差(RMSE)

采用 RMSE 标准时,所有子样本区间内模型定价效果分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. cgmy_l_o 模型和 Heston 模型在 K/S 的某些特定情况下是最优定价模型.

②对于剩余期限在一到两个月之间的情况,cgmy_g 模型对实值期权的大部分情况($0.8 < K/S \leqslant 0.975$)下具有定价优势;cgmy_l_o 模型对虚值期权中($1 < K/S \leqslant 1.025$ 以及 $1.1 < K/S \leqslant 1.2$)两种情况定价误差最小; Heston 模型对 $1.025 < K/S \leqslant 1.1$ 两种情况下定价效果最佳.

③对于剩余期限在两个月到半年之间的情况,cgmy_g 模型对实值期权的大部分情况($0.8 < K/S \leqslant 1$)下具有定价优势; cgmy_l_o 模型依旧对虚值期权中($1 < K/S \leqslant 1.025$ 以及 $1.1 < K/S \leqslant 1.2$)两种情况定价误差最小; Heston 模型对 $1.025 < K/S \leqslant 1.1$ 两种情况下定价效果最佳.

④对于剩余期限在 $180 < T \leqslant 720$ 的两种情况. cgmy_g 模型依旧对实值期权的大部分情况下具有定价优势; cgmy_l_o 模型对 $K/S > 1.025$ 中的大部分情况下定价误差最小.

⑤对于剩余期限在两年以上的情况. gau_l_o 模型定价效果在 K/S 所有情况下均是最优的.

(2)欧式看跌期权定价误差(RMSE)

采用 RMSE 标准时,所有子样本区间内模型定价效果分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. cgmy_l_g 模型对深度实值期权($K/S > 1.1$)和深度虚值期权($K/S \leqslant 0.9$)定价误差最小; cgmy_g 模型对虚值期权中的 $0.9 < K/S \leqslant 0.975$ 两种情况下定价效果最优.

②对于剩余期限在一个月到两个月之间的情况. cgmy_l_g 模型对虚值期权中 $0.8 < K/S \leqslant 0.975$ 的三种情况下定价误差最小; Heston 模型对实值期权中 $1.025 < K/S \leqslant 1.1$ 两种情况下定价效果最佳.

③对于剩余期限在两个月到半年之间的情况. cgmy_l_g 模型对($K/S \leqslant 1$ 且 $K/S > 1.1$)中绝大多数情况下定价效果最优($0.8 < K/S \leqslant 0.9$

的情况除外) ; Heston 模型对 $1.025 < K/S \leqslant 1.1$ 两种情况下定价误差最小.

④对于剩余期限在半年到一年之间的情况. cgmy_l_g 模型对绝大多数情况下($K/S \leqslant 0.9$, $0.975 < K/S \leqslant 1.025$, $K/S > 1.1$) 定价效果最优; Heston 模型对 $0.9 < K/S \leqslant 0.975$ 情况下定价误差最小.

⑤对于剩余期限在一年到两年之间的情况. cgmy_l_g 模型在 $0.975 < K/S \leqslant 1.025$ 两种情况下定价效果最优; Heston 模型对虚值期权的大部分情况下($0.8 < K/S \leqslant 0.975$) 定价效果最佳.

⑥对于剩余到期期限在两年以上的情况, gau_l_o模型对 K/S 几乎所有情况下定价效果均最优.

(3) 欧式看涨期权绝对均值误差率(ARPE)

采用 APER 标准时,所有子样本区间内模型定价效果分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. cgmy_g 模型对实值期权的大部分情况($0.9 < K/S \leqslant 1$) 定价效果最好; Heston 模型对 $1 < K/S \leqslant 1.05$ 的两种情况下定价误差最小.

②对于剩余期限在一个月到两个月以内的情况. cgmy_l_g 模型对深度实值期权($K/S \leqslant 0.9$ 的两种情况) 的定价效果最好; Heston 模型对 $1.025 < K/S \leqslant 1.1$ 的两种情况下定价误差最小.

③对于剩余期限在两个月到半年以内的情况. gau_l_o 模型对 $0.95 < K/S \leqslant 1$ 的两种情况下定价效果最好; cgmy_l_o 模型对 $1.025 < K/S \leqslant 1.05$ 以及 $1.1 < K/S \leqslant 1.2$ 两种情况下定价误差最小.

④对于剩余期限在半年以上的情况. gau_l_o 模型均在定价效果上具有绝对优势.

(4) 欧式看跌期权绝对均值误差率(ARPE)

在采用绝对平均误差率(ARPE) 标准时,对所有子样本区间内模型定价效果分析如下:

①对于剩余期限在一个月以内的情况. cgmy_l_g 模型对于 K/S 绝大部分情况下定价效果最佳.

②对于剩余期限在一个月到两个月之间的情况. cgmy_l_g 模型对 $0.975 < K/S \leqslant 1.025$ 的两种情况下定价误差最小; Heston 模型对 $0.9 < K/S \leqslant 0.975$ 以及 $K/S \geqslant 1.05$ 五种情况定价效果最佳.

③对于剩余期限在两个月到半年之间的情况. gau_l_o 模型对 $0.95 < K/S \leqslant 1.05$ 的四种情况下定价效果最佳; Heston 模型对 $0.8 < K/S \leqslant 0.95$ 的两种情况下定价误差最小.

④与看涨期权情况类似,对于剩余期限在半年以上的三种情况. gau_l_o 模型均在定价效果上具有绝对优势.

总的来说,在 RMSE 标准下,cgmy_g 模型和 cgmy_l_o 模型定价效果在绝大多数看涨期权情况下最优; cgmy_l_g 模型对看跌期权定价具有绝对的优势; 无论看涨期权还是看跌期权,对于剩余期限在两年以上的期权来说,gau_l_o 模型均是定价效果最优的模型.

在 ARPE 标准下,cgmy_l_g、cgmy_l_o 和 cgmy_g 对部分剩余期限在半年以内的看涨期权定价效果最好,cgmy_l_g 模型对剩余期限两个月以内的看跌期权具有定价优势; 对于剩余期限半年以上的期权(包括看涨期权和看跌期权) 来说,gau_l_o 模型是定价效果最优的模型.

整体上来说期权在样本外区间的定价规律与样本内一致,即无论对看涨和看跌期权来说,实值期权的定价误差都要小于虚值期权; 在剩余期限在一年以内,实值期权定价误差率随着剩余期限的增加而呈增大趋势,虚值期权的定价误差随剩余到期期限增加而趋向变小; 剩余到期期限在一年以上实值期权误差依旧随剩余期限增加而增大,但虚值期权定价效果变化无明显趋势.

4.4.2 模型整体效果

上一节讨论了模型在不同样本子区间内的价格预测效果. 下面研究在 ARPE 标准下,不同模型整个样本外区间内价格预测效果. 结果如表 6 所示. 由表 6 可以发现: (1) 整体上来讲,①全部看涨期权的 ARPE 要小于全部看跌期权的 ARPE (几乎只有看跌期权的一半) ; 除了 Heston 模型和 BS 公式定价效果稍差外,其他模型的期权定价误

差差距均很小. ②对于看涨期权来说,实值期权的 ARPE 均远小于虚值期权的 ARPE(虚值期权的误差率几乎是实值期权的三倍) . ③对于看跌期权来说,实值期权的 ARPE 也是均远小于虚值期权的 ARPE(虚值期权的 ARPE 几乎是实值期权的十倍) . 这说明无论对于看涨期权还是看跌期权,所有模型对实值期权的定价效果要远好于虚值期权,而同一定价模型对实值期权和虚值期权的定价过程中,对数价格过程是一致的,因此同一模型对实值期权和虚值期权定价效果上的显著差异并非模型不符合实际情况,只能说明投资者对虚值期权的投资非理性,导致按照理性标准设计的基于某类特定随机过程的定价模型失效.

(2) 具体来说,①cgmy_l_o 模型对全部看涨期权定价效果最佳; gau_l_o 模型对实值看涨期权定价效果最优,仅有 2. 65%; cgmy_l_o 模型对实值看涨期权定价误差最小; 同时可以发现,Heston 模型和 BS 模型定价效果要比其他模型差. ②gau_m 模型对全部看跌期权定价效果最佳; gau_l_o 模型对实值看跌期权定价误差最小,只有 6. 03%; 对于虚值看跌期权来说 gau_m 模型定价效果最佳. 同时可以发现,Heston 模型和 BS 模型定价效果要比其他模型差.

最后,本文研究发现,利用已得到的 BNS 模型参数估计值,能够较为准确的预测未来几个月的实值期权价格. 这使得虽然 BNS 模型参数估计耗时较长,但经过一次参数估计得到的模型参数可以在未来至少几十天内较为准确地预测实值期权价格,这使得对 BNS 框架下的期权定价问题研究具有一定的现实意义.

表 6　所有模型定价 ARPE 表

Table 6 Out-of-Sample performances via APER in option pricing

	全部看涨	实值看涨	虚值看涨	全部看跌	实值看跌	虚值看跌
gau_m	0.313 9	0.026 9	1.252 7	0.623 7	0.061 7	0.795 6
gau_l_m	0.313 5	0.026 9	1.251 1	0.623 8	0.061 6	0.795 7
gam_m	0.303 7	0.028 3	1.204 6	0.627 7	0.066 1	0.799 5
gam_l_m	0.290 0	0.030 7	1.138 3	0.635 5	0.073 4	0.807 4
cgmy_m	0.285 4	0.032 3	1.113 4	0.640 2	0.078 3	0.812 1
cgmy_l_m	0.285 0	0.032 4	1.111 5	0.640 4	0.078 5	0.812 3
gau_o	0.312 6	0.026 7	1.247 7	0.624 1	0.061 1	0.796 3
gau_l_o	0.316 3	0.026 5	1.264 4	0.624 6	0.060 3	0.797 2
gam_o	0.291 0	0.030 3	1.143 9	0.633 7	0.072 0	0.805 6
gam_l_o	0.300 5	0.028 6	1.189 7	0.628 8	0.066 8	0.800 7
cgmy_o	0.286 9	0.032 0	1.120 8	0.639 3	0.077 3	0.811 2
cgmy_l_o	0.282 4	0.032 9	1.098 7	0.642 0	0.080 0	0.813 9
gam_g	0.287 6	0.031 6	1.125 1	0.638 3	0.076 2	0.810 2
gam_l_g	0.288 5	0.031 5	1.129 5	0.637 7	0.075 7	0.809 6
cgmy_g	0.317 6	0.029 8	1.259 0	0.630 7	0.071 6	0.801 8
cgmy_l_g	0.316 6	0.030 2	1.253 6	0.629 5	0.069 2	0.800 9
Heston	0.651 9	0.048 1	2.627 1	2.071 5	0.148 3	2.659 7
BS	0.315 4	0.027 0	1.259 0	0.695 8	0.062 1	0.889 6

4.5　稳定性

期权定价模型的稳定性是衡量模型适用性的重要方面. 稳定性差的模型对实际情况的拟合效果不具有连续性,可能一段时间较好,另一段时间较差. 同时输入变量的轻微变化可能导致输出变量发生较大变化. 这使得利用模型进行定价预测的结果难以让人信服. 在上节中,利用样本外数据进行预测过程中,所有模型均能较好预测未来几

个月时间内的期权价格，这从侧面说明本文使用的模型大多具有较好的稳定性. 为了更全面的衡量定价模型的稳定性，本节构建相对价差分位数(quantile of relative difference，QRD)指标，从“相邻交易日价格差(day-to-day price difference)”的角度衡量模型的稳定性. 构建每个交易日实际期权价格和预测下一个交易日价格的相对价差分布(QRD 分布)，找到其 p 分位数点作为模型稳定性的衡量指标，即

$$QRD = quantile\left(\frac{|price(\mathrm{mod},t_{i+1}) - price(\mathrm{mod},t_i)|}{price(\mathrm{mod},t_i)},p\right) \tag{50}$$

其中 $price(\mathrm{mod},t_i)$ 表示第 t_i 个交易日期权市场价格; $price(\mathrm{mod},t_{i+1})$ 表示第 t_{i+1} 个交易日的模型理论价格.

为了更好的衡量模型的稳定性，令 $p = 0.95$，以求获得所有模型相对价差分布中较大的价格波动. 同时在计算 $price(\mathrm{mod},t_{i+1})$ 时，期权的要素除了剩余到期期限减少了一个交易日外，其他期权要素保持不变. 本节依旧采用样本内数据衡量模型的稳定性，即基于 2010 - 01 - 02 到 2014 - 08 - 31，1 173 个交易日共 320 万期权数据，利用式(50)计算得到对应的相对价差分布，进而求得所有看涨期权 QRD、实值看涨期权 QRD、虚值看涨期权 QRD、所有看跌期权 QRD、实值看跌期权 QRD 和虚值看跌期权 QRD 如表 7 所示.

表 7 模型稳定性

Table 7 The stability of the model via quantile of relative difference

	全部看涨	实值看涨	虚值看涨	全部看跌	实值看跌	虚值看跌
gau_m	0.143 078	0.004 788	0.761 459	0.068 375	0.010 728	0.088 425
gau_l_m	0.136 041	0.004 792	0.728 745	0.070 007	0.010 733	0.090 624
gam_m	0.151 552	0.004 648	0.789 568	0.067 618	0.010 583	0.087 506
gam_l_m	0.154 467	0.004 471	0.843 331	0.065 669	0.010 373	0.085 565
cgmy_m	0.149 239	0.004 350	0.876 807	0.064 36	0.010 229	0.084 117
cgmy_l_m	0.149 324	0.004 343	0.876 255	0.064 29	0.010 223	0.084 043
gau_o	0.141 807	0.004 808	0.825 892	0.068 844	0.010 766	0.089 154
gau_l_o	0.133 242	0.004 833	0.832 184	0.071 026	0.010 817	0.092 419
gam_o	0.147 747	0.004 488	0.752 845	0.066 056	0.010 398	0.085 826
gam_l_o	0.154 865	0.004 633	0.840 789	0.067 408	0.010 574	0.087 332
cgmy_o	0.149 710	0.004 382	0.877 858	0.064 648	0.010 261	0.084 451
cgmy_l_o	0.148 760	0.004 291	0.874 893	0.063 79	0.010 163	0.083 484
gam_g	0.155 069	0.004 408	0.862 249	0.064 921	0.010 29	0.084 759
gam_l_g	0.153 974	0.004 424	0.867 647	0.065 099	0.010 313	0.084 953
cgmy_g	0.149 636	0.004 585	0.829 890	0.067 129	0.010 621	0.087 425
cgmy_l_g	0.129 041	0.004 542	0.718 738	0.067 337	0.010 685	0.087 656
Heston	0.041 660	0.002 903	0.146 569	0.171 299	0.00 444	0.255 287

由表 7 可以发现:(1)整体上来说，全部看跌期权的模型稳定性要高于全部看涨期权. 无论是对看涨期权还是看跌期权，实值期权的稳定性均要远高于虚值期权. 虚值看涨期权的 QRD 最大，整体稳定性最差. 这与前面样本内外定价效果的整体规律一致.

(2)具体上来说，①对于看涨期权. 所有看涨期权 QRD、实值看涨期权 QRD 和虚值看涨期权 QRD 三种情况下 Heston 模型均是稳定性最佳模型. 复杂的模型，特别是模型中含有跳跃过程和杠杆率，将增大模型的不稳定性，Heston 模型并不含有跳跃过程，这可能是其对看涨期权 QRD 稳定性

最佳的原因. ②对于看跌期权. cgmy_l_o 模型对全部看跌期权 QRD 和虚值看跌期权 QRD 是稳定性最佳模型; Heston 模型对实值看跌期权 QRD 为 0.004 44 最小,但是 Heston 模型对所有看跌期权 QRD 达到 0.171 299,几乎是其他模型的将近三倍,稳定性远不如其他模型.

综上所述,对于看跌期权的大部分情况下, cgmy_l_o 模型稳定性均是最佳. Heston 模型对看涨期权的三种情况下稳定性最佳,但是其对虚值看跌期权 QRD 远大于其他模型.

4.6 综合校正风险

在进行期权定价中主要有两类风险,即模型本身风险和校正风险. 模型自身风险即利用模型进行期权定价过程中由于使用各种优化和离散化等近似技术导致的模型风险. 校正风险,即在利用模型拟合实际市场数据过程中,由于样本数据种类、样本量的选择、求解模型时使用的最小距离准则等的不同,导致的模型价格和实际价格不一致的风险. 由于没有哪个模型完美契合真实期权市场,因此即使模型本身风险不存在,模型校正风险也存在. 因此研究模型对真实市场契合程度的校正风险是评价期权定价模型优劣的重要方面. 衡量此类风险的常用方法有绝对价格误差法和相对价格误差法. 本节综合考虑两种算法,采用 "基于误差函数变化的相对差(relative differences due to changes of the error function, RDE) "指标综合衡量模型的校正风险,即

$$RDE^{\mathrm{model}} = \frac{|price_{rel} - price_{abs}|}{price_{abs}} \tag{51}$$

这里使用相对误差和绝对误差指标. $price_{rel}$ 是相对价格误差,为

$$price_{rel} = \sqrt{\frac{1}{\#options}\sum_{oprions}\left(\frac{price_{market} - price_{\mathrm{model}}}{price_{market}}\right)^2}$$

$price_{abs}$ 是绝对价格误差(采用前文中的均方误差指标(RMSE)) . 由于相对价格误差是小数,为了使其和绝对价格误差处在同一数量级,具体计算时对相对价格误差扩大一百倍,即

$$RDE^{\mathrm{model}} = \frac{|100^{*}\, price_{rel} - price_{abs}|}{price_{abs}} \tag{52}$$

本节依旧采用样本内数据衡量模型的校正风险,即基于 2010 - 01 - 02 到 2014 - 08 - 31, 1 173 个交易日共 320 万期权数据信息计算得到模型的期权理论价格,进而利用式(52) 计算出衡量模型的校正风险. 表 8 给出所有模型校正风险.

表 8　模型校正风险

Table 8 The calibration risk of different models

	全部看涨	实值看涨	虚值看涨	全部看跌	实值看跌	虚值看跌
gau_m	26.212 829	0.587 774	44.683 175	3.962 452	0.372 254	5.284 793
gau_l_m	26.202 225	0.587 828	44.643 527	3.969 456	0.372 499	5.293 737
gam_m	22.168 449	0.602 509	56.366 759	3.228 849	0.404 180	4.162 736
gam_l_m	19.661 420	0.586 134	54.558 759	2.675 444	0.445 302	3.570 257
cgmy_m	17.925 238	0.572 031	47.362 800	2.400 045	0.461 790	3.276 944
cgmy_l_m	17.801 959	0.571 094	46.895 489	2.385 469	0.462 598	3.260 872
gau_o	26.095 458	0.588 305	44.456 763	3.984 458	0.373 452	5.304 966
gau_l_o	25.986 425	0.588 657	44.134 064	4.014 602	0.375 223	5.337 642
gam_o	19.624 946	0.589 579	55.726 539	2.706 962	0.443 403	3.601 328
gam_l_o	22.293 195	0.598 879	56.025 393	3.208 931	0.405 323	4.142 499
cgmy_o	18.514 670	0.575 271	49.388 705	2.471 839	0.457 321	3.354 882
cgmy_l_o	16.908 329	0.565 521	43.507 569	2.282 528	0.468 268	3.149 173
gam_g	18.848 102	0.578 786	50.984 218	2.528 568	0.453 997	3.415 232
gam_l_g	19.240 552	0.579 333	51.936 404	2.576 215	0.450 651	3.466 155
cgmy_g	19.602 513	0.595 530	53.916 362	2.598 199	0.463 552	3.487 407
cgmy_l_g	20.259 654	0.570 412	53.106 868	2.674 224	0.453 561	3.528 674
Heston	25.722 910	0.400 222	40.155 432	18.650 181	0.387 405	28.373 729
BS	26.251 229	0.587 549	44.762364	4.542272	0.371 383	6.025 100

由表 8 可以发现:(1) 整体上来说,看涨期权的校正风险要大于看跌期权. 无论对于看涨还是看跌期权,所有模型对实值期权的校正风险均要远小于虚值期权. 看涨虚值期权的校正误差最大,达到 40 以上.

(2) 具体来上来说,①对于看涨期权,cgmy_l_o 模型对所有看涨期权的情况下校正风险最小; Heston 模型对实值看涨期权情况和虚值看涨期权情况的校正风险均是最小的,但是在所有看涨期权情况下校正风险达到 25.72,远大于 cgmy_l_o 模型的 16.91. ②对于看跌期权,cgmy_l_o 模型对所有看跌期权情况下校正风险最小仅有 2.28,Heston 模型最大达到 18 以上; BS 模型对实值看跌期权的模型校正风险最小,cgmy_l_o 模型对虚值看跌期权的模型校正风险最小.

由此可见,无论对全部看涨期权还是全部看跌期权来说,cgmy_l_o 模型校正风险均是最佳. Heston 模型对实值看涨期权和虚值看涨期权的校正风险均最小,但是其对看跌期权校正风险远大于其他模型. 这与上一节模型稳定性体现的规律基本一致. 同时定价模型校正风险的整体规律与模型定价效果整体规律间存在关系,即实值期权的定价效果要优于虚值期权的效果,同时校正风险要低于虚值期权; 但在具体情况下最优模型不尽相同,一个模型价格拟合效果最好并不一定能够具有最低的校正风险.

4.7 实证总结

本文从四个方面综合衡量不同 Lévy 过程驱动下 BNS 模型、Heston 模型与 BS 公式的定价效果,即:

(1) 样本内拟合效果. 整体上来说,在绝大多数情况下,本文提到的多种 BNS 模型确实均比 BS 模型和 Heston 模型定价效果具有不同程度的改进; 实值期权的误差率要小于虚值期权.

①模型在不同子样本区间内定价效果分析(括号内为期权剩余期限区间,表示模型对剩余期限在此区间内的定价最优的情况较多):

i. RMSE 标准下的看涨期权: Heston 模型($1 \leqslant T \leqslant 60$),cgmy_l_o 模型($30 \leqslant T \leqslant 60$),cgmy_l_g模型($180 \leqslant T \leqslant 360$),cgmy_g 模型($360 \leqslant T \leqslant 720$),gam_m 模型($T \geqslant 720$).

ii. RMSE 标准下的看跌期权: cgmy_l_o 模型($1 \leqslant T \leqslant 30$),cgmy_l_g 模型($60 \leqslant T \leqslant 720$),gau_l_o 模型($T \geqslant 720$).

iii. ARPE 标准下的看涨期权: cgmy_l_o 模型和 cgmy_l_g 模型($1 \leqslant T \leqslant 60$),gau_l_o 模型($60 \leqslant T \leqslant 360$),gam_m 模型($T \geqslant 60$).

iv. ARPE 标准下的看涨期权: cgmy_l_g 模型($1 \leqslant T \leqslant 60$),gau_l_o 模型($T \geqslant 60$).

②从全样本区间内分析可以发现,对于看涨期权而言,cgmy_l_o 模型定价效果最好; 对于看跌期权而言,cgmy_l_g 模型定价效果最好.

(2) 样本外价格预测分析. 整体上的规律与样本内数据下定价效果规律一致.

①模型在不同子样本区间内价格预测效果分析(括号内为期权剩余期限区间,表示模型对剩余期限在此区间内的定价最优的情况较多):

i. RMSE 标准下的看涨期权: cgmy_g 模型和 cgmy_l_o 模型($1 \leqslant T \leqslant 360$),gau_l_o 模型($T \geqslant 720$). ii. RMSE 标准下的看跌期权: cgmy_l_g 模型($1 \leqslant T \leqslant 720$),gau_l_o 模型($T \geqslant 720$).

iii. ARPE 标准下的看涨期权: cgmy_g 模型($1 \leqslant T \leqslant 30$),gau_l_o 模型($T \geqslant 180$).

iv. ARPE 标准下的看涨期权: cgmy_l_g 模型($1 \leqslant T \leqslant 60$),gau_l_o 模型($T \geqslant 180$).

②从全样本区间内分析可以发现,cgmy_l_o 模型对全部看涨期权定价效果最佳,cgmy_l_m 模型和 cgmy_l_o 模型分别对实值看涨期权和虚值看涨期权定价效果最好. gau_m 模型对全部看跌期权定价效果最佳. gau_l_o 模型和 gau_m 模型分别对实值看跌期权和虚值看跌期权定价效果最好.

(3) 模型稳定性分析. 看跌期权的大部分情况下,cgmy_l_o 模型稳定性均是最佳. Heston 模型对看涨期权的三种情况下稳定性最佳,但是其对虚值看跌期权 QRD 远大于其他模型.

(4) 综合矫正风险分析. 无论对全部看涨期权还是全部看跌期权来说,cgmy_l_o 模型校正风险均是最佳. Heston 模型分别对实值看涨期权和虚值看涨期权的校正风险均最小,但是其对看跌期权校正风险远大于其他模型.

5 结束语

本文在对 Barndorff-Nielsen 和 Shephard 提出

的非高斯 OU 模型进行扩展基础上,同时考虑金融时间序列的“杠杆效应”等,建立由不同 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动模型,并在此基础上,通过结构保持测度变换和 FFT 技术,对不同 Lévy 过程驱动下 BNS 模型期权定价问题进行研究. 在对结构保持测度下不同 Lévy 过程驱动下 BNS 模型进行离散化基础上,针对传统 MCMC 估计,SMC 估计对 BNS 模型参数估计中成本大、难收敛的不足,提出了不同 Lévy 过程驱动下,基于 SMC 极大似然估计、SML 联合样本估计、梯度 - SMC 估计的 BNS 模型参数估计方法,并通过理论和实证研究,对不同 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 期权定价模型及其贝叶斯序贯蒙特卡洛估计方法进行研究.

实证研究中,基于近 470 万个期权价格数据,从样本内拟合效果、样本外价格预测分析、模型稳定性分析、综合矫正风险分析,对不同 Lévy 过程驱动的参数估计方法和 BNS 模型期权定价效果进行全面系统研究. 在实证研究中发现,所有模型对实值期权的定价效果要优于虚值期权. 在大多数情况下,基于联合样本估计和梯度 - SMC 估计算法下的 BNS 期权定价模型的定价效果确实优于 BS 和 Heston 定价模型; 同一 Lévy 过程驱动下,含有杠杆率的 BNS 模型定价效果大多优于无杠杆率的 BNS 模型; cgmy_l_g 模型、gau_l_o 模型和 cgmy_l_o 模型的期权定价效果最好.

但是,本论文在期权定价研究中,标的资产价格并没有考虑连续叠加 OU 过程. 采用具有不同衰减率的波动率成分可能代表波动率的不同期限结构变化和反映的不同风险发生、以及异质信息到达等,可以构造具有长记忆过程或准长记忆(long range or quasi long range dependence) 特征波动率过程,因此期权定价等效果可能会更好. 在本论文研究的基础上,这些问题值得后续研究人员深入研究. 另外,未来可以基于 Lévy 过程驱动的非高斯 OU 期权定价模型及其贝叶斯序贯蒙特卡洛估计方法,对风险管理和套期保值问题等问题进行研究.

参 考 文 献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3) : 637 - 654.

[2] Merton R. Theory of rational option pricing [J]. Bell Journal of Economics, 1973, 4: 141 - 183.

[3] Hull J, Alan W. The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J]. Journal of Finance, 1987, 42: 281 - 300.

[4] Heston S. Closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options [J]. Review of Financial Studies, 1993, 6: 327 - 343.

[5] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump diffusions [J]. Econometrica, 2000, 68: 1343 - 1376.

[6] Eraker B, Johannes M, Polson N. The impact of jumps in equity index volatility and returns [J]. Journal of Finance, 2003, 58: 1269 - 1300.

[7] Li H, Wells M T, Yu C L. A Bayesian analysis of return dynamics with Lévy Jumps [J]. Review of Financial Studies, 2008, 21: 2345 - 2378.

[8] Barndorff-Nielsen O E. Processes of normal inverse Gaussian type [J]. Finance and Stochastics, 1998, 2: 41 - 68.

[9] Eberlein E, Keller U, Prause K. New insights into smile, mispricing, and value at risk: The hyperbolic model [J]. Journal of Business, 1998, 71: 371 - 406.

[10] Madan D B, Carr P P. Chang E C. The variance gamma process and option pricing [J]. European Finance Review, 1998, 2: 79 - 105.

[11] Carr P, Wu L. Finite moment log stable process and option pricing [J]. Journal of Finance, 2003, 58: 753 - 777.

[12] 吴恒煜,朱福敏,温金明. 带杠杆效应的无穷纯跳跃 Lévy 过程期权定价 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(8) : 74 - 94.
Wu Hengyu, Zhu Fumin, Wen Jinming. Option pricing based on conditional infinite pure jump Levy processes with leverage effect [J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(8) : 74 - 94. (in Chinese)

[13] Huang J, Wu L. Specification analysis of option pricing models based on time-changed Lévy processes [J]. Journal of Finance, 2004, 59: 1405 - 1440.

[14] Carr P, Wu L. Time-changed Levy processes and option pricing [J]. Journal of Financial Economics, 2004, 17: 113 - 141.

[15] Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics [J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Statistical Methodology, 2001a: 167 - 241.

[16] Nicolato E, Venardos E. Option pricing in stochastic volatility models of the Ornstein-Uhlenbeck type [J]. Mathematical Finance, 2003, 13(4): 445 - 466.

[17] Eraker B. Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices [J]. Journal of Finance, 2004, 59: 1367 - 1404.

[18] Jones C. Nonlinear mean reversion in the short-term interest rate [J]. The Review of Financial Studies, 2003, 16(3): 793 - 843.

[19] Roberts G O, Stramer O. On inference for partially observed nonlinear diffusion models using the Metropolis-Hastings algorithm [J]. Biometrika, 2001, 88: 603 - 621.

[20] Green P J. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination [J]. Biometrika, 1995, 82(4): 711 - 732.

[21] Roberts G O, Papaspiliopoulos O, Dellaportas P. Bayesian inference for non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes [J]. Journal of the Royal Statistical Society B, 2004, 66(2): 369 - 393.

[22] Griffin J E, Steel M F J. Inference with non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck processes for stochastic volatility [J]. Journal of Econometrics, 2006, 134(2): 605 - 644.

[23] Griffin J E, Steel M F J. Bayesian inference with stochastic volatility models using continuous superpositions of non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck processes [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2010, 54(11): 2594 - 2608.

[24] **刘志东，刘雯宇. Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动模型及其贝叶斯参数统计推断方法研究 [J]. 中国管理科学**, 2015, 23(8): 1 - 9.

Liu Zhidong, Liu Wenyu. The Non Ornstein-Uhlenbeck Models Driven by the General Lévy Process and Its Bayesian Inference [J]. China Journal of Management Science, 2015, 23(8): 1 - 9. (in Chinese)

[25] Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study [J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63: 3 - 50.

[26] Yu C, Li H, Wells M T. MCMC estimation of Levy jump models using stock and option prices [J]. Mathematical Finance, 2011, 21 (3): 83 - 422.

[27] Li J. An unscented Kalman smoother for volatility extraction: Evidence from stock prices and options [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2013: 15 - 26.

[28] Ornthanalai C. Lévy jump risk: Evidence from options and returns [J]. Journal of Financial Economics, 2014, 112(1): 69 - 90.

[29] Hurn A S, Lindsay K A, Mcclelland A J. Estimating the parameters of stochastic volatility models using option price data [J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2015, 33(4): 579 - 594.

[30] **刘杨树，郑振龙，陈　蓉. 跳跃风险如何影响期权复制收益？—基于多维跳跃扩散的模型与证据 [J]. 管理科学学报**, 2016, 19(6): 74 - 86.

Liu Yangshu, Zheng Zhenlong, Chen Rong. How does jump risk affect the Delta hedge gain? Evidence from multi-dimension jump diffusion model [J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(6): 74 - 86. (in Chinese)

[31] **陈淼鑫，武　晨. 随机跳跃强度与期权隐含风险溢酬 [J]. 管理科学学报**, 2018, 21(4): 28 - 42.

Chen Miaoxin, Wu Chen. Stochastic jump intensity and option implied risk premiums [J]. Journal of Management Sciences in China, 2018, 21(4): 28 - 42. (in Chinese)

[32] Chopin N, Jacob P E, Papaspiliopoulos O. SMC^2: An efficient algorithm for sequential analysis of state space models [J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2013, 75(3): 397 - 426.

[33] Fulop A, Li J. Efficient learning via simulation: A marginalized resample-move approach [J]. Journal of Econometrics, 2013, 176(2): 146 - 161.

[34] Andrieu C. Particle Markov chain Monte Carlo methods [J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2010, 72(3): 269 - 342.

[35] Fearnhead P, Taylor B. M, et al. An adaptive sequential Monte Carlo sampler [J]. Bayesian Analysis, 2013, 8(2): 411

– 438.

[36] Duan J, Fulop A. Density-tempered marginalized sequential Monte Carlo samplers [J]. Journal of Business Economic Statistics, 2015, 33(2): 192 – 202.

[37] Peng Y, Fu M C, Hu J. Gradient-based simulated maximum likelihood estimation for Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility models [J]. Quantitative Finance, 2014, 14(8): 1399 – 1414.

[38] Gander M P S, Stephens D. A. Stochastic volatility modelling in continuous time with general marginal distributions: Inference, prediction and model selection [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2007a, 137(10): 3068 – 3081.

[39] Gander M P S, Stephens D A. Simulation and inference for stochastic volatility models driven by Lévy processes [J]. Biometrika, 2007b, 94(3): 627 – 646.

[40] Hubalek F, Sgarra C. On the Esscher transforms and other equivalent martingale measures for Barndorff-Nielsen and Shephard stochastic volatility models with jumps [J]. Stochastic Processes & Their Applications, 2008, 119 (7): 2137 – 2157.

[41] Carr P, Madan D. Option valuation using the fast Fourier transform [J]. Journal of computational finance, 1999, 2(4): 61 – 73.

[42] Valdivieso L, Schoutens W, Tuerlinckx F. Maximum likelihood estimation in processes of Ornstein-Uhlenbeck type [J]. Statistical Inference for Stochastic Processes, 2009, 12(1): 1 – 19.

[43] Cappé O, Moulines E, Rydén T. Inference in Hidden Markov Models [M]. New York: Springer, 2005.

[44] Kushner H J, Yin G G. Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications [M]. New York: Springer, 2003.

Option pricing in non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes driven by the Lévy process

LIU Zhi-dong, LIU Wen-yu, RUAN Yu-ming

School of Management Science and Engineering, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China

Abstract: Based on the well-known (empirical) stylized facts such as infinite activity Lévy jump, stochastic volatility and leverage effect, this paper extends non-Gaussian OU stochastic volatility model, which is proposed by Barndorff-Nielsen and Shephard, driven by infinite activity Lévy jump processes. Then the European option pricing model is studied by FFT technology and the principle of structure preserving martingale measure the specific expressions of BNS models driven by different Lévy processes (Gaussian process, Gamma process and CGMY process) under the risk neutral measures are obtained. Efficient MLE-SMC algorithm, joint sample estimation algorithm and gradient-SMC algorithm are given to estimate the parameters and latent variables of non-Gaussian OU stochastic volatility models using stock and option prices. Finally, in contrast to most existing studies, our model assessment—an empirical research based on the 4.7 million price data of S&P500 options—is not restricted to the fitting performance, but even takes into account factors like model stability, the exposure to risks arising from the model calibration and the ability to explain observed prices of options. The empirical results show that the pricing effect of in-the-money options is superior to that of the out-of-the-money options. In most cases, the pricing effects of our BNS option pricing models based on joint sample estimation algorithm and gradient-SMC algorithm are better than that of MLE-SMC algorithm.

Keywords: Lévy jump processes; non-Gaussian Ornstein process; structure preserving martingale measure; gradient-SMC algorithm; option pricing