

# 基于三因素过程的利率连动息票研究<sup>①</sup>

李少育<sup>1</sup>, 黄泓人<sup>2</sup>

(1. 西南财经大学证券与期货学院, 成都 611130; 2. 台湾“中央大学”财务金融系, 中国台湾 32001)

**摘要:** 本文结合了仿射利率期限结构模型, 首次把包含了随机均值、随机波动和跳跃的三因素利率模型应用于利率连动息票的定价和风险对冲过程, 给出了利率连动息票(包括固定利率连动息票和浮动利率连动息票)的价值和对冲策略的解析式。数值结果表明, 利率连动息票的价值和对冲策略受到以上三个因素的显著影响。其中, 代表期望通胀率和市场均衡利率缓慢移动效应的随机均值因素在定价和对冲中扮演着主要的角色。研究表明, 利用仿射利率期限结构模型为利率连动息票进行定价和对冲时, 忽视以上三个因素将使模型结果产生误差。因此, 本文的模型及定价公式为利率连动息票定价和对冲提供了一个更具弹性和一致性的理论框架。

**关键词:** 仿射模型; 跳跃; 随机波动; 随机均值

**中图分类号:** F830.91      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007-9807(2019)02-0036-16

## 0 引言

利率连动息票(range accrual notes, RAN)给投资者提供了一种既实现保本又可能获得高收益的固定收益资产品种。在过去的几年里, 结构性票据的交易量显著增加, 其在欧洲的销售仅2010年就达到1500亿欧元。其中的利率连动息票的销售从2004年以来已累计超过1600亿美元。近年来, 国内许多代客理财产品也以境外的利率连动息票为投资标的物, 比如渣打银行和花旗银行在国内推出的“代客境外理财”业务。另外, 一些QDII基金在境外的资产组合中也对RAN进行了投资。此类利率衍生品采取的是柜台交易的方式, 发行商在发行这类产品时, 往往会考虑如何对冲息票的现金流, 而投资机构则关注购买此类衍生品的收益是否能够在保本的情况下超过普通存款的收益。本文从理论定价和对冲策略对RAN展开研究, 从中引出定价和风险管理的重要含义, 为我国投资银行发行该类衍生品或者大型金融机构

(如保险公司)的资产保值和增值提供了重要的理论参考依据。

已有文献关于RAN的研究主要涉及到两个领域: 一是, 一种能够完整描述利率的各种风险特征的状态向量模型; 二是, 寻找到一种适合状态向量模型特征的利率期限结构模型。

目前, 应用于RAN的利率状态向量模型还只停留在单因素状态向量模型或二因素的状态向量模型层面上, 主要研究的是利率状态过程中的跳跃风险。Turnbull<sup>[1]</sup>及Navatte等<sup>[2]</sup>使用单因素高斯利率期限结构模型来定价浮动利率连动息票(floating range accrual notes, FIRAN)。Nunes<sup>[3]</sup>进一步使用多维高斯HJM利率期限结构模型来定价FIRAN。为了处理参考利率动态过程中出现的跳跃问题, Eberlein和Kluge<sup>[4]</sup>使用多变量的列维(levy)利率期限结构。Jang和Yoon<sup>[5]</sup>使用二维仿射跳跃状态向量模型来定价固定利率连动息票(fixed range accrual notes, FiRAN)和FIRAN, 并说明了跳跃对定价和对冲策略的影响, 但是该文献

① 收稿日期: 2017-08-11; 修订日期: 2018-08-07。

基金项目: 国家自然科学基金资助青年项目(71301131)。

作者简介: 李少育(1983—), 男, 福建莆田人, 博士, 副教授。Email: lishaoyu2007@aliyun.com

使用的参考利率和贴现利率较特殊,并没有使用通常市场上所认可的银行间同业拆借利率。Chou等<sup>[6]</sup>从跨国市场模型对“筐投”息票进行定价和模拟。Wu和Elliott<sup>[7]</sup>使用多维市场模型(LMM)求出多种互换息票的解析式。总之,以上文献在使用状态向量模型时,忽略了动态过程的其他两种重要特征:随机均值和随机波动,而包含以上所有风险特征的状态向量模型通常是三因素仿射状态向量模型。<sup>②</sup>

三因素仿射状态向量模型主要包含以下风险特征和优点。从经济直觉上分析,随机均值代表着期望通胀率和市场均衡利率缓慢移动的混合效应。随机波动因素代表着GARCH效应的放大,如Andersen和Lund<sup>[10]</sup>及Ball和Torous<sup>[11]</sup>所发现的,一个带有随机波动的二因素利率模型比GARCH波动模型表现更优。而跳跃则代表货币政策带来的短期利率偏离。在短期利率模型中,跳跃的重要性已经被许多实证研究文献所认可,比如Das<sup>[12]</sup>、Johannes<sup>[13]</sup>、Jiang和Yan<sup>[14]</sup>及Wright和Zhou<sup>[15]</sup>。它代表着货币政策的冲击效应。因此,如果没有考虑到短期利率的上述三个特征,一个利率衍生品的定价结果就会与实证发现不相一致。Andersen等<sup>[16]</sup>提出的三因素仿射状态向量模型包含了随机均值、随机波动和跳跃三种特征,并且其估计和校准结果表明,具有这些特征的三因素模型能够成功刻画债券收益率曲线的三种重要特点:斜率、弯曲度和水平移动,从而印证了Litterman和Scheinkman<sup>[17]</sup>在实证上所发现的债券收益率三个因子。这意味着,三因素状态向量模型作为利率衍生品的动态过程是一个较优的选择。

在利率期限结构模型方面,HJM(Heath等<sup>[18]</sup>)利率期限结构模型和列维利率期限结构模型无法适应同时加入随机波动、随机均值和跳跃的三因素状态向量模型。相反的是,仿射跳跃利率期限结构模型(AJTSM,Duffie等<sup>[19]</sup>)能够适应三因素状态向量模型,从而为RAN的研究提供了良好的理论框架,并同时导出理论价值和对冲策略的解析式。

目前,已经有众多学者把AJTSM引入到固定

收益产品及衍生品定价中。王春峰等<sup>[20]</sup>在宏观变量仿射期限结构下对附息债券期权的定价进行研究,王春峰等<sup>[21]</sup>还对仿射期限结构下对贴现债券衍生工具进行研究。宋永安和陆立强<sup>[22]</sup>应用非参数利率期限结构动态模型对债券期权进行定价研究。周荣喜和王晓光<sup>[23]</sup>在多因素仿射利率期限结构模型下对国债进行定价,表明多因素模型要优于单因子模型。Jang和Yoon<sup>[5]</sup>使用AJTSM对Fi-RAN和FIRAN进行定价与对冲。Chiarella等<sup>[24]</sup>基于类似的期限结构模型使用维希特(Wishart)状态过程对结构息票进行定价。牛华伟<sup>[25]</sup>通过拓展的仿射跳跃利率期限结构模型来求解具有二次幂项的特征方程,并在线性-二次跳跃-扩散的状态向量模型下给出了信用衍生品的定价解析式。

综上所述,目前RAN产品的研究趋势是,在状态向量模型中引入更多的可识别风险因素,同时利用与之相适应的利率期限结构模型建立定价解析式和对冲策略。因此,本文在三因素仿射跳跃状态向量模型基础上,使用AJTSM的理论框架,引出RAN的定价解析式及风险对冲策略,进而对这类产品市场上的各种风险来源及背后的经济推动因素进行分析。总之,本研究的贡献为三方面:一是,在最一般的三因素短期利率模型基础上导出RAN的定价解析式;二是,从理论上解出一种新的仿射转换后形成的Riccati方程,从而首先在此灵活的框架下提出结构息票的定价拟解析解;三是,数值模拟研究发现了结构息票的多种交易风险特征。本文发现结构息票的价值和对冲比率受到短期利率模型设定和相关风险参数因素的影响,分析了三个因素背后的经济力量是如何影响定价与对冲比率。另外,本研究还发现FiRAN所受到的影响与浮动利率息票存在显著的区别。

## 1 RAN的定价

利率连动息票(RAN)主要包括固定利率连动息票(FiRAN)和浮动利率连动息票(FIRAN)。FiRAN是能够让持有人在每个付息日获得利息。

<sup>②</sup> 最近出现国内文献(刘杨树等<sup>[8]</sup>;陈森鑫和武晨<sup>[9]</sup>)使用二维带随机波动和跳跃或者多维带跳跃的状态过程来进行衍生品定价,但是以上文献都是集中于期权定价并且未研究随机均值的因素。

每期利息等于固定的利率(加上一个固定的溢价)除以一年的天数再乘以每期参考利率待在一个预定区间内的天数. FIRAN 与 FiRAN 的区别是每期利息等于一个浮动的利率(加上一个固定的溢价)除以一年的总天数再乘以每期参考利率待在一个预定区间内的天数. 这两种息票都保证本金在最后一个付息日支付. 出于数学上的简洁性考虑, 本文所有引理的证明放在了附录 A. ③

### 1.1 RAN 模型的定义

给定  $t$  是当前时点, 时间点序列是  $0 \leq T_0 < t < T_1 < T_2 \cdots < T_N = T$ .  $[T_0, t]$  之间有  $\bar{n}_0$  个交易日,  $(t, T_1]$  之间有  $n_0$  个交易日,  $(T_j, T_{j+1}]$  之间有  $n_j$  个交易日. 对于  $i = 0, 1, 2, \dots, \bar{n}_0$ , 令  $T_{0i}$  代表  $i$  交易日期. 对于  $i = 0, 1, \dots, n_0$  ( $T_{0i+n_0} = T_1$ ), 令  $T_{0i+i}$  代表  $T_j + i$  交易日期. 用  $C(t, T_j)$  代表 RAN 第  $j$  次支付的利息在现在时点  $t$  的价值. 在交易日  $T_{ji}$ , 参考利率的上下区间边界分别为  $M(T_{ji})$  和  $m(T_{ji})$ .  $\Delta_j$  是第  $j$  个利息支付期  $(T_j, T_{j+1}]$  的利率溢价,  $D_j$  是包含  $(T_j, T_{j+1}]$  期间的年度天数. 其中  $(T_j, T_{j+1}]$  代表从交易日期  $T_j$  (不包含这一天) 到交易日期  $T_{j+1}$  (包含这一天) 的时间段.

假定 RAN 的参考利率和无风险贴现利率使用同一种市场利率品种. 基于市场上 RAN 的应用惯例和伦敦银行间同业拆借利率 (libor) 的广泛可得性, 本文的定价框架将其当成参考利率和无风险贴现利率. 模型中,  $L(T_j, T_j^)$  是利息支付期  $(T_j, T_{j+1}]$  的贴现利率. 贴现利率的复利计算期长度 (以年为单位) 能在时点  $T_j$  观察到, 并被表示为  $\theta_j$ , 从而贴现利率的远期时点就是  $T_j^ = T_j + \theta_j$ . 相似的, 参考利率的复利计算期长度 (以年为单位) 能在时点  $T_{ji}$  观察到, 并被表示为  $\theta_{ji}$ , 从而参考利率的远期时点就是  $T_{ji}^ = T_{ji} + \theta_{ji}$ .  $L(T_{ji}, T_{ji}^)$  被转换成下列等式

$$L(T_{ji}, T_{ji}^) = \frac{1}{\theta_{ji}} \left[ \frac{1}{P(T_{ji}, T_{ji}^)} - 1 \right] \quad (1)$$

RAN 的每期利息支付计算时点分别从  $\{T_0, T_1, \dots, T_{N-1}\}$  开始, 而每期利息的支付却分别在终止时点  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  完成, 其中  $T_0$  是最近期

的利息支付计算时点,  $T_1$  是下一期的利息支付计算时点, 而  $T_N$  是到期时间点, 也是最后一期的利息支付时点. 假定一个利息连动息票合同的定价是从介于  $T_0$  和  $T_1$  的当前时点  $t$  开始, 则这个合同利息支付的各期现金流可以由以下等式给出.

对于一个 FIRAN, 第一期利息支付时点  $T_1$  获得的现金流是

$$C(T_1) = [H(T_0, t) + H(t, T_1)] \frac{\Delta_0}{D_0}$$

其中  $\Delta_0$  是第一期  $(T_0, T_1]$  的利率溢价,  $D_0$  是第一期  $(T_0, T_1]$  所在年度的总交易天数. 前期  $(T_0, t]$  已实现的利息支付量是  $H(T_0, t)$ , 而  $H(t, T_1)$  是后期  $(t, T_1]$  未实现的利息支付量. 利息支付等式分别是

$$H(T_0, t) = \sum_{i=1}^{\bar{n}_0} I_{\{m(T_{0i}) \leq L(T_{0i}, T_{0i}^) \leq M(T_{0i})\}}$$

$$H(t, T_1) = \sum_{i=1}^{n_0} I_{\{m(T_{0i+i}) \leq L(T_{0i+i}, T_{0i+i}^) \leq M(T_{0i+i})\}}$$

类似的, 对于  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , 第一期以后的利息支付时点  $T_{j+1}$  的现金流可以表示为

$$C(T_{j+1}) = H(T_j, T_{j+1}) \frac{\Delta_j}{D_j} \quad (2)$$

对于 FIRAN, 第一期结束时点  $T_1$  的利息支付现金流是

$$C(T_1) = [H(T_0, t) + H(t, T_1)] \frac{L(T_0, T_0^) + \Delta_0}{D_0}$$

其中  $L(T_0, T_0^)$  取决于已实现的第一期初始点上的复利时间长度. 对于  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , 在利息支付时点  $T_{j+1}$  的利息现金流是

$$C(T_{j+1}) = H(T_j, T_{j+1}) \frac{L(T_j, T_j^) + \Delta_j}{D_j} \quad (3)$$

本文假设 RAN 合同规定, 本金 (principal) 在到期日  $T_N$  支付, 并被标准化成 1. 从式 (2) 和式 (3) 可以发现, FiRAN 和 FIRAN 的主要不同点在于, 浮动利息区间息票的利息支付等式中要乘以一个浮动的伦敦同业拆借利率 (libor), 而这一浮动项却没有在 FIRAN 的利息支付等式中出现. 在 RAN 合同中, 事先已设定了每个交易日参考利率

③ 鉴于篇幅关系附录 A 可通过电子邮箱向作者索要.

区间的上下界  $[m(T_j) \ M(T_j)]$ . 上下界可以依据交易日单位或按不同的复利计算期而变动. 在不失一般性的情况下, 事先设定的利率溢价  $\Delta_j$  也可以在不同的利息支付期间变动.<sup>④</sup>

### 1.2 RAN 的价值解析式

本文接下去在仿射利率期限结构模型下导出 RAN(包括 FIRAN 和 FIRAN) 的解析式.

#### 1.2.1 基于风险中性的仿射转换方法

仿射跳跃状态向量模型通过定义参数矩阵的仿射函数及傅立叶转换求出未定权益的价值解析式. 该傅立叶转换可以用于许多利率连动金融商品的定价.

假定一个概率空间  $(\Omega, \mathbf{F}, \tilde{P})$  和一个信息过滤  $(F_t)$ , 风险中性测度存在于状态空间  $D \subset \mathbf{R}^n$  中. 状态向量  $X_t$  是一个适应  $\{F_t\}$  的马尔可夫过程, 并服从一个随机微分方程

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) d\tilde{W}_t + d\tilde{Z}_t \quad (4)$$

其中  $\tilde{W}$  是一个  $n$  维实数空间  $\mathbf{R}^n$  下适应  $\{F_t\}$  的标准布朗运动向量.  $\mu: D \rightarrow \mathbf{R}^n$  和  $\sigma: D \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ .  $\tilde{Z}_t$  是一个纯跳跃过程, 其跳跃尺度在实数空间  $\mathbf{R}^n$  下服从一个固定的概率分布  $v$ , 并且其跳跃强度是  $\{\tilde{\lambda}(X_t); t \geq 0\}$ . 其中,  $\tilde{\lambda}: D \rightarrow [0, \infty)$ . 假定  $\mu$ ,  $\sigma\sigma^T$  和  $\tilde{\lambda}$  服从下列仿射函数结构

$$\mu(X_t) = K_0 + K_1 X_t$$

$$K = (K_0 \ K_1) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n \times n}$$

$$(\sigma(X_t) \sigma(X_t)^T)_{ij} = (H_0)_{ij} + (H_1)_{ij} \cdot X_t$$

$$H = (H_0 \ H_1) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n \times n}$$

$$\tilde{\lambda}(X_t) = l_0 + l_1 \cdot X_t$$

$$l = (l_0 \ l_1) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$$

$$R_D(X_t) = \rho_0 + \rho_1 \cdot X_t, \quad \rho = (\rho_0 \ \rho_1) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n,$$

其中  $\cdot$  在本文中表示内积. 对于  $c \in \mathbf{R}^n$ , 即  $c$  是复数的  $n$  元组空间集, 定义矩母函数

$$M_{\tilde{Z}}(c) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(c \cdot \tilde{Z}) dv(\tilde{Z})$$

比如, 当跳跃尺度  $\tilde{Z}_t$  服从正态分布  $N(\tilde{\mu}_j, \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_j^T)$ , 则矩母函数就是

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}}(c) &= \tilde{E}_t [\exp(c \cdot \tilde{Z})] \\ &= \exp\left[\tilde{\mu}_j^T c + \frac{1}{2} c^T \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_j^T c\right] \end{aligned}$$

接着, 本文把  $R_D(X_t)$  定义成时点  $t$  的短期利率. 它取决于状态向量  $X_t$ . 贴现因子是

$$D(t) = \exp\left(-\int_0^t R_D(X_s) ds\right)$$

那么, 到期时间点是  $T$  的如期付款的零息债券在时间点  $t$  的价值是

$$P(t, T) = \tilde{E}_t \left[ \exp\left(-\int_t^T R_D(X_s) ds\right) \right]$$

其中  $\tilde{E}_t[\cdot]$  是基于  $F_t$  下具有风险中性测度  $\tilde{P}$  的条件期望. 根据 Duffie 等<sup>[19]</sup> 把  $u$  定义为  $a + ivb$ , 并假定系数矩阵  $(K \ H \ l \ M_{\tilde{Z}} \ \rho)$  在集  $(u, T)$  内具有较稳定的性质, 并能够保证积分的存在性. 给定  $(x, T, \mu, b) \in D \times [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ , 从而价值函数  $G_{a,b}[\cdot; x, T]: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  可以表示为

$$G_{a,b}[y; X_t, T] = \tilde{E}_t \left[ \exp\left(-\int_t^T R_D(X_s) ds\right) \exp(a \cdot X_T) I_{\{b \cdot X_T \leq y\}} \right] \quad (5)$$

其中  $I_{\{\cdot\}}$  是指示函数. 该等式不仅能够描述状态向量  $X_t$  的概率分布, 而且说明了贴现效应, 从而为期权式的未定权益定价提供了一个基本框架. 如果定义了价值函数  $G_{a,b}[y; X_t, T]$ , 则可以对其进行傅立叶-斯蒂格利茨转换. 傅立叶转换特征函数  $\psi: \mathbf{R}^n \times D \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  被定义

$$\begin{aligned} \psi(u, X_t, t, T) &= \tilde{E}_t \left[ \exp\left(-\int_t^T R_D(X_s) ds\right) \exp(u \cdot X_T) \right] \\ &= \exp[\delta(t, T) + \eta(t, T) \cdot X_t] \quad (6) \end{aligned}$$

式(6)的两个未知系数  $\delta(t, T)$  和  $\eta(t, T)$  是通过解以下常微分方程组(ODE)

$$\begin{cases} \dot{\delta}(t, T) = \rho_0 - K_0 \cdot \eta(t, T) - \frac{1}{2} \eta(t, T)^T H_0 \eta(t, T) - l_0 [M_{\tilde{Z}}(\eta(t, T)) - 1] \\ \dot{\eta}(t, T) = \rho_1 - K_1^T \eta(t, T) - \frac{1}{2} \eta(t, T)^T H_1 \eta(t, T) - l_1 [M_{\tilde{Z}}(\eta(t, T)) - 1] \end{cases} \quad (7)$$

方程组内两个未知系数的边界条件是  $\delta(T, T) = 0$  和  $\eta(T, T) = u$ . 其中,  $\dot{\delta}(t, T)$  代表  $\frac{\partial \delta(t, T)}{\partial t}$ ,

④ 为了补偿参考利率区间上下界的变化, 也可以设定随交易日变化的利率溢价  $\Delta_{ji}$ .

$\dot{\eta}(t, T)$  代表  $\frac{\partial \eta(t, T)}{\partial t}$ . 以上仿射转换为利率连动产品的定价提供了一个具有解析解的定价模型, 比如按期付款的零息债券和可违约零息债券. 对于如期付款的零息债券来说, 它的定价函数其实为

$$P(t, T) = \exp[\alpha(t, T) + \beta(t, T) \times X_t] \quad (8)$$

其中  $\alpha(t, T)$  和  $\beta(t, T)$  通过解常微分方程组获得解析式. 这相当于在  $\delta(T, T) = 0$  和  $\eta(T, T) = 0$  的情形下解  $\delta(t, T)$  和  $\eta(t, T)$ .

在此基础上, 通过傅立叶斯蒂格利茨逆转换, 可以得到

$$G_{a,b}[y; X_t, T] = \frac{\psi(a, X_t, t, T)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ivy} [\psi(a-ivb, X_t, t, T) - \psi(a+ivb, X_t, t, T)]}{iv} dv \quad (9)$$

### 1.2.2 RAN 的定价模块

RAN 的定价公式可以被分解为四个模块. 它们分别是延迟数值期权 (DO), 延迟区间数值期权 (DRO), 延迟利率数值期权 (DIO) 和延迟利率区间数值期权 (DIRO). RAN 是这四个模块的线性组合.

#### 1) 延迟数值期权

以伦敦银行同业拆借利率  $L(T_{j_i}, T_{j_i})$  为参考利率, 定义欧洲延迟数值期权 (DO). 该期权的执行价是  $m(T_{j_i})$ , 到期日是  $T_{j+1}$ . 它的收益支付模式是, 如果复利时间区间为  $(T_{j_i}, T_{j_i})$  的参考利率  $L(T_{j_i}, T_{j_i})$  在到期日  $T_{j_i}$  时高于事先确定的执行价  $m(T_{j_i})$ , 则期权持有人在利息支付时点  $T_{j+1}$  获得 1 美元的收入, 如果在到期日等于或低于事先确定的执行价, 则期权持有人在利息支付时点  $T_{j+1}$  获得的收益是 0.

引理 1 在时点  $t$  上, DO 的价值等于

(1) 对于  $T_{j_i} \leq t < T_{j+1}$  和  $(j = 0, 1, \dots, N-1)$

$$DO_t [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_{j+1}] =$$

$$P(t, T_{j+1}) I_{\{L(T_{j_i}, T_{j_i}) > m(T_{j_i})\}};$$

(2) 对于  $T_{j_i} > t$  定义

$$y(\theta_{j_i}, m, T_{j_i}, T_{j_i}) = -[\ln[\theta_{j_i} m(T_{j_i}) + 1] + \alpha(T_{j_i}, T_{j_i})] \quad \text{有}$$

$$DO_t [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_{j+1}]$$

$$= G_{\beta(T_{j_i}, T_{j+1}); \beta(T_{j_i}, T_{j_i})} [y(\theta_{j_i}, m, T_{j_i}, T_{j_i}); X_t, T_{j_i}] \times \exp(\alpha(T_{j_i}, T_{j+1}))$$

#### 2) 延迟区间数值期权

延迟区间数值期权定义的时间点类似于延迟数值期权, 与之不同的是, 其支付收益的条件变为参考利率必须正好在事先确定的利率区间  $[m(T_{j_i}), M(T_{j_i})]$  内. 如果不在区间内, 则支付就是 0. 因此, 延迟区间数值期权的支付方式由两个具有不同执行价格的延迟数值期权的支付组合来表示.

引理 2 延迟区间数值期权 (DRO) 在现在时点  $t$  的价值等于

对于  $j = 0, 1, \dots, N-1$  得

$$DRO_t [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}), M(T_{j_i}); T_{j+1}]$$

$$= DO_t [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_{j+1}] -$$

$$DO_t [L(T_{j_i}, T_{j_i}); M(T_{j_i}); T_{j+1}]$$

#### 3) 延迟利率数值期权

当参考利率  $L(T_j, T_j)$  高于期权执行价格  $m(T_{j_i})$ , 延迟利率数值看涨期权 (DIO) 在到期日  $T_{j+1}$  支付给持有者浮动的贴现利率  $L(T_{j_i}, T_{j_i})$  和利率溢价  $\Delta_j$ . 反之, 则无支付. 该期权合同在  $T_{j+1}$  支付的收益可由如下公式表示

$$DIO_{T_{j+1}} [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_j; T_{j+1}]$$

$$= \frac{L(T_j, T_j) + \Delta_j}{D_j} I_{\{L(T_{j_i}, T_{j_i}) > m(T_{j_i})\}}$$

根据  $L(T_j, T_j)$  的定义, 可以得到

$$DIO_{T_{j+1}} [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_j; T_{j+1}]$$

$$= \left(\frac{\Delta_j}{D_j} - \frac{1}{\theta_j D_j}\right) DO_{T_{j+1}} [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_{j+1}] +$$

$$\frac{1}{\theta_j D_j} DON_{T_{j+1}} [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_j; T_{j+1}]$$

引理 3  $DON_t$  是在当前时点  $t$  被零息债券

$P(T_j, T_j)$  标准化后的 DO 价值, 即

(1) 对于  $T_j \leq t < T_{j+1}$  和  $(j = 0, 1, \dots, N-1)$

$$DON_t [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_j; T_{j+1}]$$

$$= P(T_j, T_j)^{-1} DO_t$$

(2) 对于  $t < T_j$

$$DON_t [L(T_{j_i}, T_{j_i}); m(T_{j_i}); T_j; T_{j+1}]$$

$$= \tilde{E}_t \left[ \frac{D(T_{j+1})}{D(t)} P(T_j, T_j)^{-1} DO_{T_{j+1}} \right]$$

推论 1 通过引理 1 和引理 3, DIO 在当前

时点  $t$  的价值等于

$$\begin{aligned} & \text{DIO}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}); T_j; T_{j+1}] \\ &= \left(\frac{\Delta_j}{D_j} - \frac{1}{\theta_j D_j}\right) \text{DO}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}); T_{j+1}] + \\ & \quad \frac{1}{\theta_j D_j} \text{DON}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}); T_j; T_{j+1}] \end{aligned}$$

4) 延迟利率区间数值期权

如果参考利率水平  $L(T_j, T_j)$  在利率区间  $[m(T_{ji}), M(T_{ji})]$  之间, 则延迟利率区间数值期权会在利息支付时点(或到期日)支付给持有者浮动的贴现利率  $L(T_{ji}, T_{ji})$  和利率溢价  $\Delta_j$ . 反之, 则支付 0.

引理 4 通过推论 1, **DIRO** 在当前时点  $t$  上的价值是

$$\begin{aligned} & \text{DIRO}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}), M(T_{ji}); T_j; T_{j+1}] \\ &= \left(\frac{\Delta_j}{D_j} - \frac{1}{\theta_j D_j}\right) \text{DRO}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}), M(T_{ji}); T_{j+1}] + \\ & \quad \frac{1}{\theta_j D_j} \text{DRON}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}), M(T_{ji}); T_j; T_{j+1}] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & \text{DRON}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}), M(T_{ji}); T_j; T_{j+1}] \\ &= \text{DON}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); m(T_{ji}); T_j; T_{j+1}] - \\ & \quad \text{DON}_t [L(T_{ji}, T_{ji}); M(T_{ji}); T_j; T_{j+1}] \end{aligned}$$

1.2.3 FiRAN 的定价公式

对于 FiRAN, 它所支付的第一期利息在当前时点  $t$  的价值是

$$\begin{aligned} C(t, T_1) &= \frac{\Delta_0}{D_0} H(T_0, t) P(t, T_1) + \\ & \quad \frac{\Delta_0}{D_0} \sum_{i=1}^{n_0} \text{DRO}_i \end{aligned}$$

对于  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , 第  $j+1$  期支付的利息在当前时点  $t$  的价值是

$$C(t, T_{j+1}) = \sum_{i=1}^{n_j} \text{DRO}_i \frac{\Delta_j}{D_j}$$

最后一个交易日支付的标准化本金 1 在当前时点  $t$  上的价值等于零息债券  $P(t, T_N)$ . 因此, 当前时点  $t$  下的 FiRAN 的最终定价公式被表示为

$$V_{\text{FiRAN}}(t) = \sum_{j=1}^N C(t, T_j) + P(t, T_N)$$

1.2.4 FiRAN 的定价公式

对于 FiRAN, 它的第一个利息在当前时点  $t$  的价值等于

$$\begin{aligned} C(t, T_1) &= \frac{L(T_0, T_0) + \Delta_0}{D_0} H(T_0, t) P(t, T_1) + \\ & \quad \frac{L(T_0, T_0) + \Delta_0}{D_0} \sum_{i=1}^{n_0} \text{DRO}_i \end{aligned}$$

对于  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , 第  $j+1$  期支付的利息在当前时点  $t$  上的价值是

$$C(t, T_{j+1}) = \sum_{i=1}^{n_j} \text{DIRO}_i$$

最后一个交易日  $T_N$  的本金是标准化的 1 美元, 它在当前时点  $t$  的价值就是零息债券  $P(t, T_N)$ . 因而, FiRAN 在当前时点  $t$  的定价公式就是

$$V_{\text{FiRAN}}(t) = \sum_{j=1}^N C(t, T_j) + P(t, T_N)$$

1.3 可识别随机均值、随机波动和跳跃的三因素模型

根据 Andersen 等<sup>[16]</sup> 的设定, 状态向量  $X_t = [r_t, V_t, \mu_t]^T$  在风险中性测度下符合式 (10) 的动态过程. 其中,  $\xi_1$  至  $\xi_3$  是三个因素的风险溢价. 状态向量过程中的测度转换是通过  $d\tilde{W}_{i,t} = dW_{i,t} + \xi_i dt, i = 1, 2, 3$  来实现, 并且  $W$  向量内的元素是独立的.  $\tilde{N}_t$  被定义为独立的泊松 (Poisson) 过程, 并具有跳跃强度  $\tilde{\lambda}$  和跳跃尺度  $\tilde{Z}_{1,t} \sim N(\tilde{\mu}_j, \tilde{\sigma}_j)$ . 其中,  $N(\mu, \sigma)$  是均值  $\mu$  和标准差  $\sigma$  的正态分布. 根据 Duffie 等<sup>[19]</sup> 的测度转换方法,  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}_j$  和  $\tilde{\sigma}_j$  是  $\lambda, \mu_j$  和  $\sigma_j$  的风险中性测度形式. 然后, 式 (10) 可以表示成仿射模型, 并获得解常微分方程组 (7) 所需要的仿射参数矩阵  $K_0, K_1$  和  $\sigma(X_t), \sigma(X_t)^T$ . 基于矩阵  $\sigma(X_t), \sigma(X_t)^T$ , 可获得对应于  $r_t, V_t$  和  $\mu_t$  的参数矩阵  $H_0$  和  $H_1$ .

$$\begin{cases} dr_t = \{-\tilde{\mu}_j \tilde{\lambda} - k_1 r_t - \xi_1 V_t + k_1 \mu_t\} dt + \sqrt{V_t} d\tilde{W}_{1,t} + \tilde{Z}_{1,t} d\tilde{N}_t \\ dV_t = \{k_2 \alpha - (k_2 + \sigma_1^2 \xi_2) V_t\} dt + \sigma_1 \sqrt{V_t} d\tilde{W}_{2,t} \\ d\mu_t = \{k_3 \vartheta - (k_3 + \sigma_2^2 \xi_3) \mu_t\} dt + \sigma_2 \sqrt{\mu_t} d\tilde{W}_{3,t} \end{cases} \quad (10)$$

同时, 短期利率被定义为  $R_D(X_t) = \rho_0 + \rho_1 \cdot X_t = r_t$ , 设定  $\rho_0 = 0$  和  $\rho_1 = [\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}]^T = [1, 0, 0]$ . 因此, 潜在状态向量  $X_t$  的动态过程与  $r_t$  一致, 从而该仿射状态向量模型变为可识别的情形. 基于式 (10), 还可以定义其它解常微分方程组 (7) 所

需要的参数. 具体的推导过程, 详见附录 B<sup>⑤</sup>.

通过解常微分方程组, 可获得四个时变参数

$$\eta_1(t, T) = (u_1 + \frac{\rho_{11}}{k_1}) \exp(-k_1(T-t)) - \frac{\rho_{11}}{k_1}$$

$$\eta_2(t, T) = \frac{2k_1}{\sigma_1^2} \{ \bar{\rho} - \varphi \exp(-k_1(T-t)) + L_1 \}$$

$$\eta_3(t, T) = \frac{k_3 + \xi_3 \sigma_2^2}{\sigma_2^2} + L_2$$

$$\delta(t, T) = -(\rho_0 + \tilde{\lambda})(T-t) + \ln\{L_3\} + \ln\{L_4\} + \tilde{\mu}_j \tilde{\lambda} \left[ \left( \frac{-\rho_{11} - u_1 k_1}{k_1^2} \right) (1 - \exp(-k_1(T-t))) + \frac{\rho_{11}(T-t)}{k_1} \right] + \int_t^T \tilde{\lambda} \exp \left[ \tilde{\mu}_j \eta_1(s, T) + \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{2} \eta_1^2(s, T) \right] ds$$

其中  $\bar{\rho}, L_1, L_2, L_3, L_4$  是表 1 中给出的参数的函数. 附录 B 提供了该四个时变参数的解析式和推导. 最后, 如果令  $u = [u_1, \mu_2, \mu_3]^T = [0, 0, \rho]^T$  就可以获得时变参数向量  $\alpha(t, T)$  和  $\beta(t, T)$  的解析解.

### 2 RAN 的风险对冲策略

本文使用了 Jarrow 和 Turnbull<sup>[26]</sup> 提出的风险对冲策略(Delta hedge strategy) 并利用三个不同到期时间的零息债券来对冲 RAN. 在当前时点  $t$  对 RAN 设计了一个对冲投资组合. 它包括  $b(t)$  单位的银行账户和  $h(t) = [h_m, h_s, h_l]$  债券  $\bar{P}(t, T) = [P(t, T_m), P(t, T_s), P(t, T_l)]$ . 其中的三种零息债券都把  $R_D$  当成短期利率, 并分别拥有短到期时间  $T_s$ , 中等到期时间  $T_m$  和长到期时间  $T_l$ . 定义  $V_{RAN}(t)$  代表 RAN 的价值, 从而, 对冲投资组合按如下公式建立

$$V_h(t) = b(t) + h(t) \cdot \bar{P}(t, T) - V_{RAN}(t) \quad t < T$$

为了实现风险对冲, 对冲投资组合必须达到对每个状态变量的变化不敏感. 这意味着

$$h(t) \frac{\partial \bar{P}(t, T)}{\partial X_i} - \frac{\partial V_{RAN}(t)}{\partial X_i} = 0$$

给定等式矩阵  $\frac{\partial \bar{P}(t, T)}{\partial X_i}$  和  $\frac{\partial V_{RAN}}{\partial X_i}$  的解析式, 可以获得 RAN 的对冲比率  $h(t)$ .<sup>⑥</sup>

### 3 RAN 的价格和风险敏感性

假定 RAN 的到期时间是  $T$  年, 并且每年付一次利息. 息票的面值是 1 美元. 利率溢价  $\Delta_j$  是常数, 并等于 100 个基点(1%). 参数集决定了状态向量  $X_t$  的动态过程, 并被用于校准. 本文所使用的参数集与 Andersen 等<sup>[16]</sup> 的表 4 参数相对应, 并列在下文的表 1 中. 在 RAN 的定价模型中, 通过考虑风险溢价把物理测度转换为风险中性测度. 根据 Andersen 等<sup>[16]</sup>, 为了进行校准, 设定  $[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = (-250, 0, -50)$ .

对于  $\tilde{\lambda}$  和  $\tilde{\sigma}_j$ , 令  $\tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\mu}_j = 0.01$  和  $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j$ .<sup>⑦</sup> 本文的模型采用的是日短期利率, 而表 1 中的参数估计使用的是 3 月期美国国债周收益率. 因此, 将基于周利率的参数和状态向量值重新调整为基于日利率的相应数值. 根据 Andersen 等<sup>[16]</sup> 状态向量的初始值  $[r_t, V_t, \mu_t]$  设为  $[0.08, 0.007^2, 0.08]$  并另外假设一个合理和不变的参考利率区间范围  $m_{ji} = m_j = 0.07$  和  $M_{ji} = M_j = 0.09$ . Litterman 和 Sckekman<sup>[17]</sup> 使用短到期时间的收益率, 中等到期时间的收益率和长到期时间的收益率来解释利率波动的变化. 基于该理由, 本文对三种用于对冲跳跃、随机波动和随机均值风险的零息债券的到期时间设为短到期时间(短期零息债券),  $T_s = 0.25$ , 中等到期时间(中期零息债券)  $1 \leq T_m = T \leq 5$  和长到期时间(长期零息债券)  $T_l = 10$ . 对于状态变量中缺少随机均值过程的情况, 只需要考虑短到期时间,  $T_s = 0.25$  和中等到期时间  $1 \leq T \leq 5$  的零息债券. 原因是, 随机均值过程表达了期望收益的长期趋势. 一个忽视了期望收益率长期趋势的投资者不会使用长期零息债券来进行对冲风险.

⑤ 鉴于篇幅关系附录 B 可通过电子邮箱向作者索要.

⑥ 以上导数是对三个变量(包括短期利率、随机波动和随机均值)求一阶导数. 对冲比率中不仅包含  $\text{delta} \frac{\partial V_{RAN}(t)}{\partial r_t}$ , 而且包含  $\text{vega} \frac{\partial V_{RAN}(t)}{\partial V_t}$ , 还有  $\frac{\partial V_{RAN}(t)}{\partial \mu_t}$ . 因此, 本文的对冲比率将会比其它文献中只考虑了  $\text{delta}$  的对冲比率有较大的差异.

⑦ 由于本文在第三章对  $\tilde{\lambda}$  进行敏感性分析, 所以此处先定义  $\tilde{\lambda} = \lambda$ , 并变动  $\tilde{\lambda}$  来说明跳跃对利率连带息票的影响. 根据 Duffie 等<sup>[19]</sup> 假定  $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j$  和跳跃尺度的均值  $\tilde{\mu}_j$  等于 0.01.

表1 SV, SVJ, SV-SM 和 SVJ-SM 的校准参数

Table 1 The parameter sets for SV, SVJ, SV-SM 和 SVJ-SM models

参数	SV	SVJ	SV-SM	SVJ-SM
$\mu$	0.051 2	0.052 6		
$k_1$	0.259 3	0.255 5	1.631 3	1.788 7
$\alpha$	0.000 054	0.000 059	0.000 069	0.000 052
$k_2$	6.499 5	1.664 5	6.212 1	1.789 5
$\sigma_1$	0.019 5	0.010 9	0.021 8	0.011 0
$\vartheta$			0.053 3	0.052 5
$k_3$			0.296 8	0.279 2
$\sigma_2$			0.053 5	0.045 9
$\sigma_J$		0.001 7		0.001 6
$\lambda$		2.984 4		3.268 8
$\chi^2$	25.90	14.19	16.42	10.74
P-value	(0.026 6)	(0.288 9)	(0.172 7)	(0.377 9)

注: 本表来源于 Andersen 等<sup>[16]</sup>.

### 3.1 模型设定敏感性分析

RAN 的定价和对冲策略会受到状态向量模型设定的影响. 本文模型不仅引入了跳跃成份 还包含了随机均值的设定<sup>⑧</sup>. 本文校准了四个状态向量模型: 随机波动模型 (SV), 随机波动和跳跃模型 (SVJ), 随机波动和随机均值 (SV-SM) 及随机波动、随机均值和跳跃 (SVJ-SM). 通过比较这四个模型设定下的 RAN 的价值和对冲比率, 可以评估这四个模型引致的模型设定风险. 从而观察到, 在不同模型设定下的 RAN 的价值本身差异并不大, 但由于 RAN 的交易者通常是机构投资者, 较大的交易量使得不同模型设定间的差距变得显著.

在四种模型设定下, 表 2 和表 3 分别报告了 FiRAN 和 FIRAN 的价值和对冲比率. 在表 2 中, FiRAN 价值的差别因到期日的延长而变得更加明显. 通过比较 SVJ-SM 和 SV-SM 下的 FiRAN 的价值, 可以发现, 加入跳跃成份会显著的增加 FiRAN 的价值. 然而, 比较 SVJ 和 SV 下的 FiRAN 价值后, 却发现跳跃成份会减少其价值. 同时, 在 SV 模型中引入随机均值过程, 即 SV-SM 将会显著的减少 FiRAN 的价值. 在 SVJ 模型中引入随机均值过程, 即 SVJ-SM, 将增加到到期时间少于 3 年的 FiRAN 的价值, 而减少

到期时间大于 2 年的 FiRAN 的价值.

从表 3 中可以发现, 模型设定对 FIRAN 的价值的的影响也是显著的. 随着到期时间的延长, 四个模型下的 FIRAN 的价值差别变得更大. 跳跃成分对到期时间大于 1 年的 FIRAN 定价的影响, 类似于 FiRAN 的情形. 在 SV 模型中加入随机均值过程, 即 SV-SM 将显著的减少到期时间大于 1 年的 FIRAN 的价值. 然而, 在 SVJ 中增加随机均值过程, 即 SVJ-SM 将提高 FIRAN 的价值.

对于 FIRAN, 三种零息债券对冲比率的绝对值比 FiRAN 情况下的对冲比率绝对值大, 意味着其需要更多的对冲资产. 同时, 投资者也倾向于持有中期零息债券和短期零息债券来对冲 FIRAN, 并且他们也会持有长期零息债券来对冲到期时间超过 2 年的 FIRAN. 与 FiRAN 不同的是, 投资者会持有更多短期零息债券来对冲 FIRAN. 一方面, 在 SV-SM 模型中加入跳跃成分, 即 SVJ-SM 模型, 会使投资者持有更多的短期零息债券和更少的中期零息债券, 当对冲到期时间大于 2 年的 FIRAN 时, 投资者会持有更多的长期零息债券. 在 SV 模型中加入跳跃成分, 即 SVJ 模型, 投资者会持有更多中期零息债券和更少的短期零息债券来对冲到期时间超 2 年的 FIRAN. 另一方面, 在 SVJ 中加入随机均值过程, 即 SVJ-SM 模型, 投资者会持有更少的中期零息债券和更多的短期零息债券来对冲到期时间大于 2 年的 FIRAN. 在 SV 中加入随机均值过程, 即 SV-SM 模型, 投资者会持有更少的短期零息债券和更多的中期零息债券来对冲到期时间不大于 4 年的 FIRAN. 因此, 是否在状态变量过程中引入随机均值过程或跳跃成分, 会导致 FiRAN 的价值和对冲比率在四个模型中的排序依到期时间的延长而变化.

总之, 在模型中加入跳跃成份或者随机均值过程, 会对 FiRAN 和 FIRAN 产生不同形式的错误定价和对冲策略. 这是因为, 随机均值过程或跳跃成分不仅会显著的影响到参考利率, 也会影响 FIRAN 中的贴现利率. 参考利率和贴现利率之间复杂的相互作用导致 FiRAN 和 FIRAN 的数值结果存在差异. 只有完整的状态模型才能把一国的经济增长信息传递到息票的定价和对冲过程中, 而模型误设将导致息票定价和对冲的偏差.

⑧ Jang 和 Yoon<sup>[5]</sup> 在风险对冲策略中研究高斯模型和非高斯模型的设定风险, 并在定价方面研究了跳跃成分的设定风险.



表2 不同模型设定下FiRAN的定价和对冲比率

Table 2 Values and hedge ratios of FiRAN with four model specifications

T	$V_{\text{FiRAN}}(t)$				$h_1(t)$			
	SVJ-SM	SV-SM	SVJ	SV	SVJ-SM	SV-SM	SVJ	SV
1	0.922 4	0.920 9	0.923 6	0.923 6	1.007 2	1.009 8	1.008 5	1.010 0
2	0.846 6	0.840 8	0.847 2	0.847 7	1.008 6	1.011 1	1.010 2	1.011 5
3	0.776 4	0.765 2	0.774 1	0.775 3	1.010 7	1.013 1	1.011 8	1.013 5
4	0.711 9	0.694 9	0.705 1	0.707 2	1.014 0	1.015 9	1.013 5	1.015 6
5	0.652 6	0.630 0	0.640 8	0.643 8	1.019 0	1.019 8	1.015 3	1.017 9
T	$h_2(t)$				$h_3(t)$			
1	-0.008 6	-0.011 6	-0.016 6	-0.020 2	-0.000 31	-0.000 17	0	0
2	-0.008 0	-0.011 1	-0.025 0	-0.027 5	-0.000 77	0.000 16	0	0
3	-0.007 4	-0.011 0	-0.029 1	-0.031 3	-0.001 71	0.000 34	0	0
4	-0.007 1	-0.010 9	-0.030 6	-0.033 2	-0.003 82	-0.000 29	0	0
5	-0.007 0	-0.010 9	-0.030 8	-0.034 0	-0.007 87	-0.002 30	0	0

注: 基于短期债券、中期债券和长期债券的对冲比率分别是  $h_2(t)$ ,  $h_1(t)$  和  $h_3(t)$ . 到期时间分别是从1年到5年.

表3 不同模型设定下FIRAN的定价和对冲比率

Table 3 Values and hedge ratios of FIRAN with four model specifications

T	$V_{\text{FIRAN}}(t)$				$h_1(t)$			
	SVJ-SM	SV-SM	SVJ	SV	SVJ-SM	SV-SM	SVJ	SV
1	0.933 8	0.933 9	0.933 3	0.933 8	0.407 5	0.629 4	0.480 7	0.536 2
2	0.868 4	0.865 9	0.865 6	0.867 6	0.511 6	0.698 5	0.533 4	0.479 5
3	0.806 8	0.799 2	0.800 8	0.805 4	0.448 2	0.649 2	0.596 6	0.503 8
4	0.749 8	0.736 2	0.739 5	0.747 0	0.273 9	0.516 2	0.634 2	0.528 9
5	0.697 4	0.677 6	0.682 1	0.692 5	-0.025 0	0.287 8	0.655 2	0.546 2
T	$h_2(t)$				$h_3(t)$			
1	1.014 4	0.443 0	0.989 2	0.668 4	-0.040 9	-0.092 1	0	0
2	0.691 4	0.126 2	0.783 2	0.706 2	-0.001 7	-0.100 2	0	0
3	0.580 1	0.038 3	0.438 7	0.508 2	0.154 1	0.024 4	0	0
4	0.551 0	0.020 5	0.184 3	0.287 8	0.409 7	0.238 2	0	0
5	0.543 3	0.017 0	0.007 4	0.094 7	0.795 5	0.557 1	0	0

注: 基于短期债券、中期债券和长期债券的对冲比率分别是  $h_2(t)$ ,  $h_1(t)$  和  $h_3(t)$ . 到期时间分别是从1年到5年.

### 3.2 参数敏感性分析

通过改变状态向量中的相应参数来检验跳

跃、随机波动和随机均值风险的影响. 根据表1的检验结果, SVJ-SM 是表现最好的模型, 也是最完

整的模型 因此可以把它当作参数敏感性分析的基准. 本文选择改变跳跃强度  $\tilde{\lambda}$ , 随机波动的长期均值(即随机波动过程的均值回归参数)  $\alpha$  和长期均值(即随机均值过程的均值回归参数)  $\vartheta$ . 设定参数在基准模型参数基础上进行上下偏离. 同时, 本文还通过改变到期时间的长度来计算 RAN 的价值和对冲比率. 以上偏离设定可以分析 RAN 的价值和对冲比率对跳跃强度、长期波动率及长期均值的敏感性. 在图 1 中, FiRAN 的价值随跳跃强度  $\tilde{\lambda}$  变化而变化, 而且这三个跳跃强度水平上的价值差异随着到期时间的延长而变大. 这意味着 跳跃风险对 FiRAN 有持续性的影响. 比较跳跃强度的上下偏离结果, 可以发现 较低的跳跃风险意味着较低的 FiRAN 价值. 这是因为, 较低的跳跃风险使参考利率会以较低的概率跳出区间, 从而拥有更高的概率产生正的数值区间期权. 同时, 较低的跳跃风险隐含着投资者将会对跳跃风险提出较低的风险补偿  $\tilde{\mu}_j \tilde{\lambda}$ , 进而产生更高的

短期利率  $r_t$  及更低的贴现现金流. 当后面一种效应占优于前面一种效应时, 较低的跳跃风险会引起较低的 FiRAN 的价值. 对于对冲比率, 较低的跳跃风险意味着投资者将卖空更多的短期零息债券和长期零息债券, 并持有更多的中期零息债券. 在图 2 中, 当变动跳跃强度时, FiRAN 的价值差异性比 FiRAN 更明显, 并且差别随着到期时间的延长而愈加的显著. 这也意味着, 跳跃风险也能持续的影响到 FiRAN 的价值. 图 2 也显示, 较低的跳跃风险引起更高的 FiRAN 价值. 这个结果与 FiRAN 的情况恰恰相反. 这是因为, 跳跃风险不仅影响了参考利率和短期利率还影响贴现利率, 这三个效应的相互作用决定了更低的 FiRAN 的价值. 另外, 较低的跳跃风险下的投资者会持有更多的短期零息债券和更少中期零息债券来对冲 FiRAN, 并持有更多的长期零息债券来对冲到期时间大于 2 年的 FiRAN. 这显然与 FiRAN 的情况是不同的.

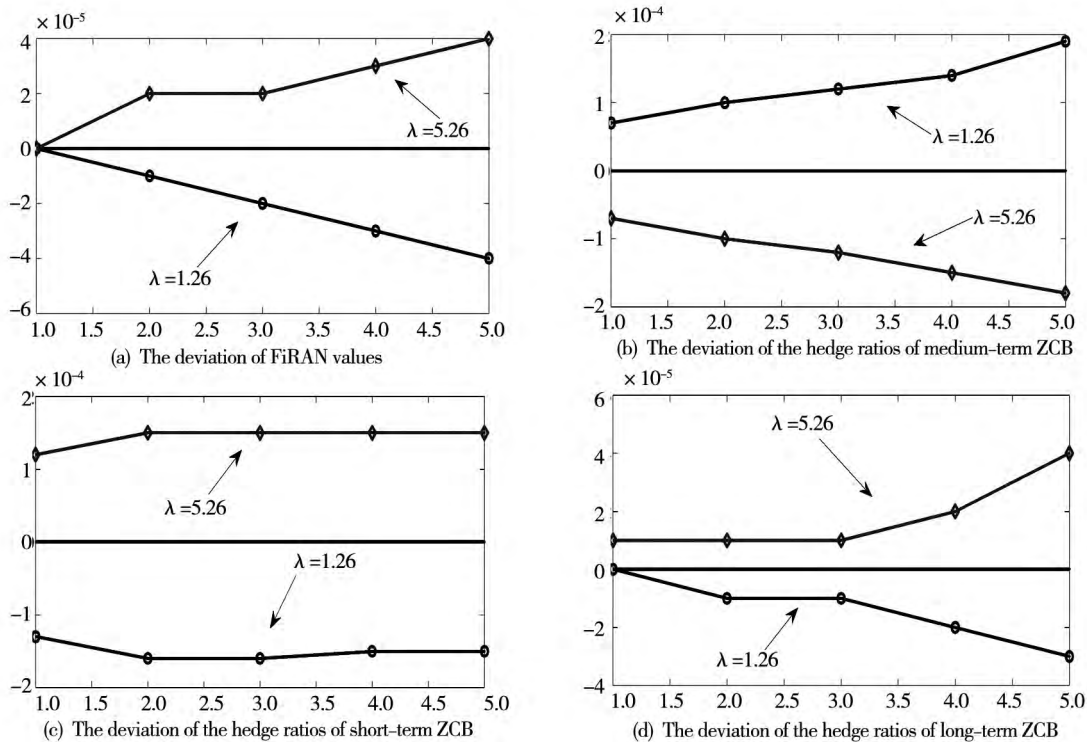


图 1 FiRAN 的定价和对冲比率  $\tilde{\lambda} = \lambda = [1.26, 3.26, 5.26]$

Fig. 1 Values and hedge ratios of FiRAN with  $\tilde{\lambda} = \lambda = [1.26, 3.26, 5.26]$

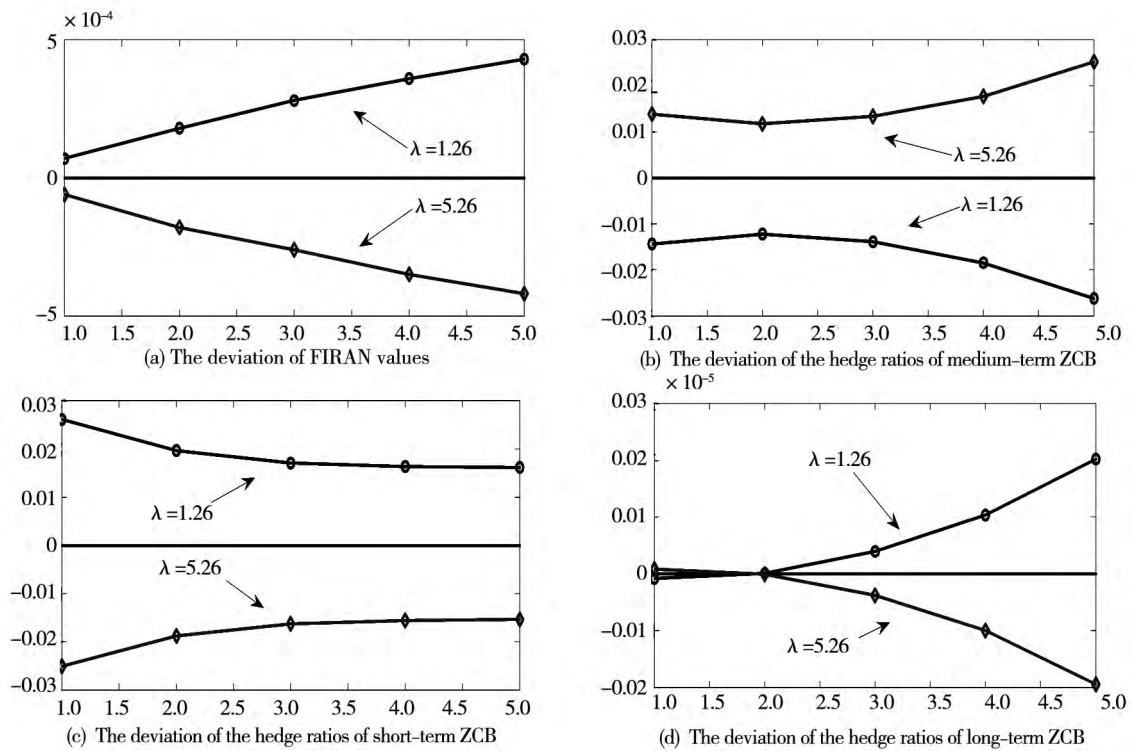


图2 FIRAN 的定价和对冲比率  $\lambda = \lambda = [1.26, 3.26, 5.26]$

Fig. 2 Values and hedge ratios of FIRAN with  $\lambda = \lambda = [1.26, 3.26, 5.26]$

跳跃风险的敏感度分析表明,由货币政策导致的跳跃风险将引起 FiRAN 和 FIRAN 的价值的偏离.然而,该效应并不具有足够的显著性,因为这两种产品价值至多只在小数点第 4 位上变化.从直觉上讲,美联储在货币市场的公开市场操作对短期利率及其衍生品的定价和对冲只有数量上的影响.

均值回归参数  $\alpha$  和  $\vartheta$  的变动分别代表长期波动和长期均值的偏离.在图 3 中,长期波动偏离于基准水平对 FiRAN 的价值的的影响恰恰与跳跃强度偏离于基准水平产生的影响相反.较低水平的长期波动意味着参考利率将以较低的概率跳离区间.同时,较低的长期波动风险也意味着,投资者会提出较少的风险溢酬来补偿随机波动风险,进而导致更高的短期利率水平,及更低的现金流贴现值.当前者的效应占优于后者的效应时,更低的随机波动风险引起 FiRAN 更高的价值.另外,

与变动跳跃强度不同,为了对冲 FiRAN 较低随机波动风险下的策略是卖空较少的短期零息债券和持有较少的中期零息债券,但卖空更多的长期零息债券.

在图 4 中,长期波动水平的变动导致 FIRAN 的价值出现偏离,并且这个偏离程度随着到期时间的延长而变大.类似于跳跃强度变动对 FIRAN 的影响,较低的长期波动水平意味着 FIRAN 的更高价值.与变动跳跃强度不同的是,投资者倾向于持有更多的短期零息债券和更少中期零息债券来对冲 FIRAN,并且还持有更少的长期零息债券来对冲到期时间大于 2 年的 FIRAN.总之,与跳跃强度变动相比,长期波动水平的变动会更大程度上对 FiRAN 和 FIRAN 的价值和对冲比率产生影响.这是因为,长期波动风险是放大后的 GARCH 效应,它隐含着波动集聚,进而从更大程度上影响着数值区间期权出现正值的概率.

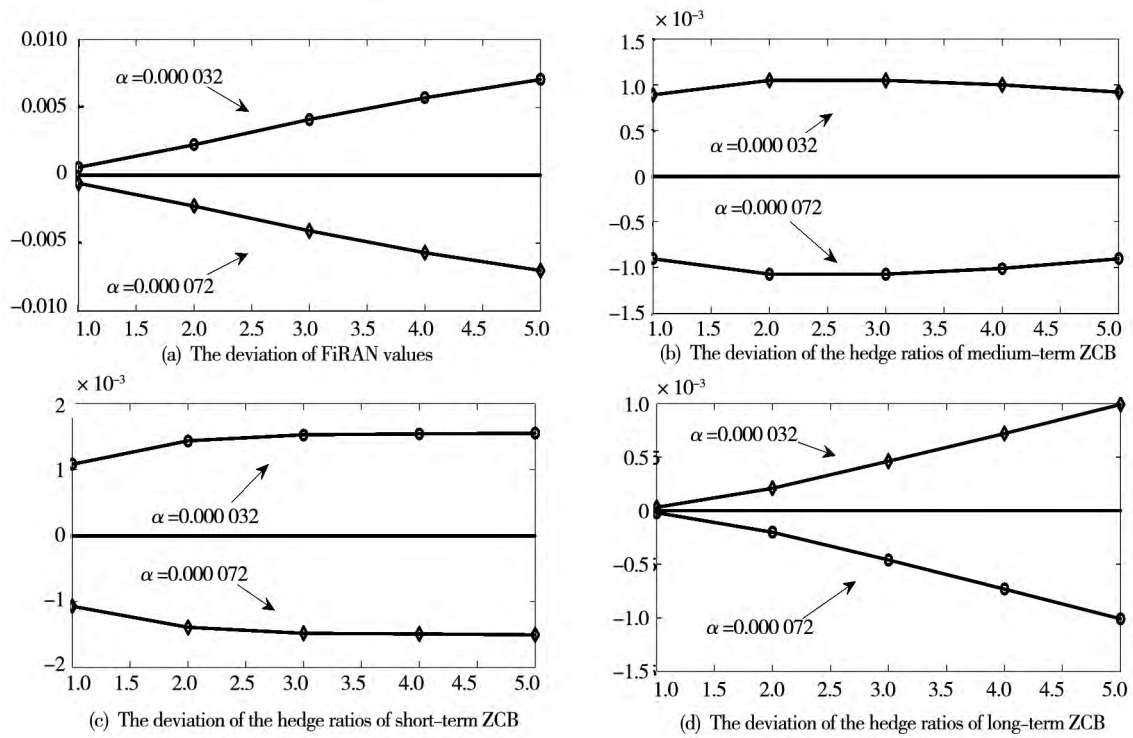


图 3 FiRAN 的定价和对冲比率  $\alpha = [0.000032, 0.000052, 0.000072]$

Fig. 3 Values and hedge ratios of FiRAN with  $\alpha = [0.000032, 0.000052, 0.000072]$

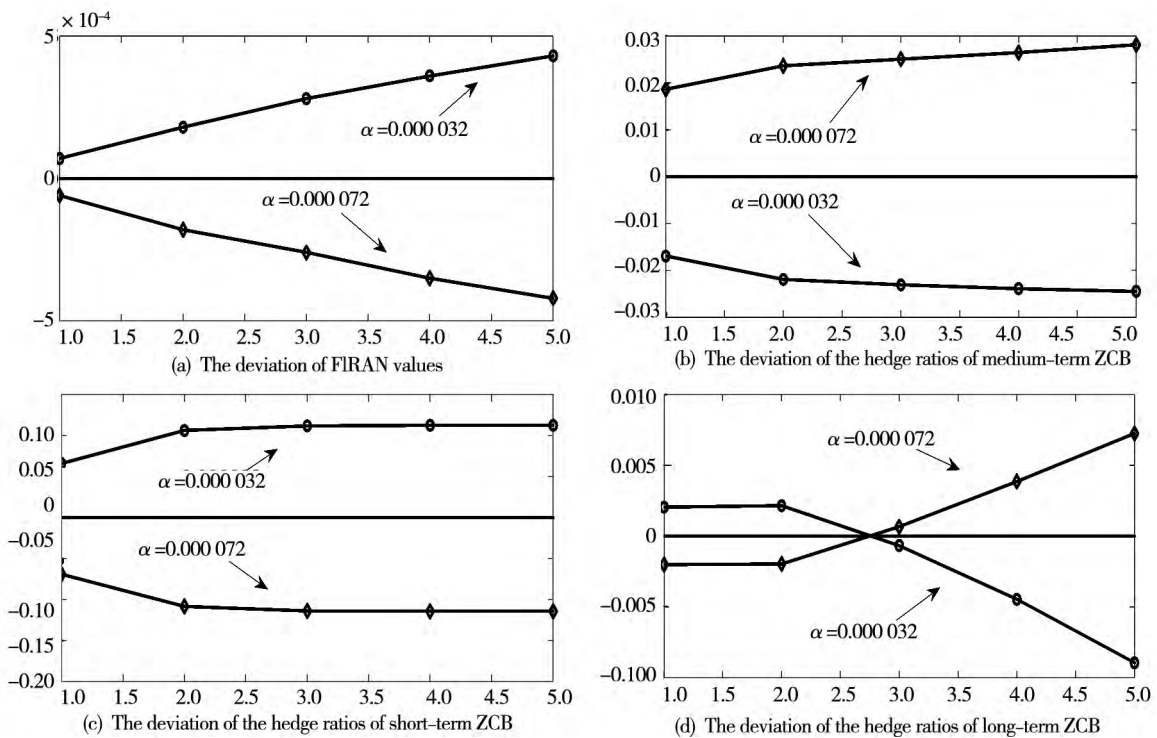


图 4 FIRAN 的定价和对冲比率  $\alpha = [0.000032, 0.000052, 0.000072]$

Fig. 4 Values and hedge ratios of FIRAN with  $\alpha = [0.000032, 0.000052, 0.000072]$

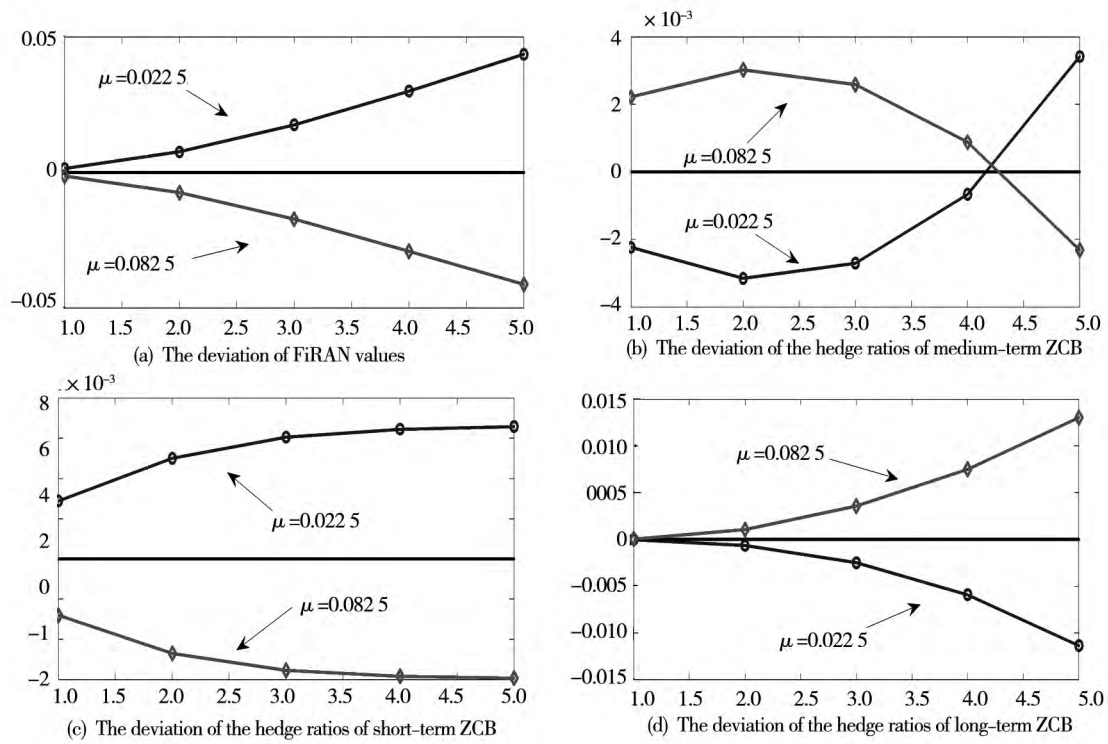


图5 FiRAN 的定价和对冲比率  $\vartheta = [0.0225, 0.0525, 0.0825]$

Fig. 5 Values and hedge ratios of FiRAN with  $\vartheta = [0.0225, 0.0525, 0.0825]$

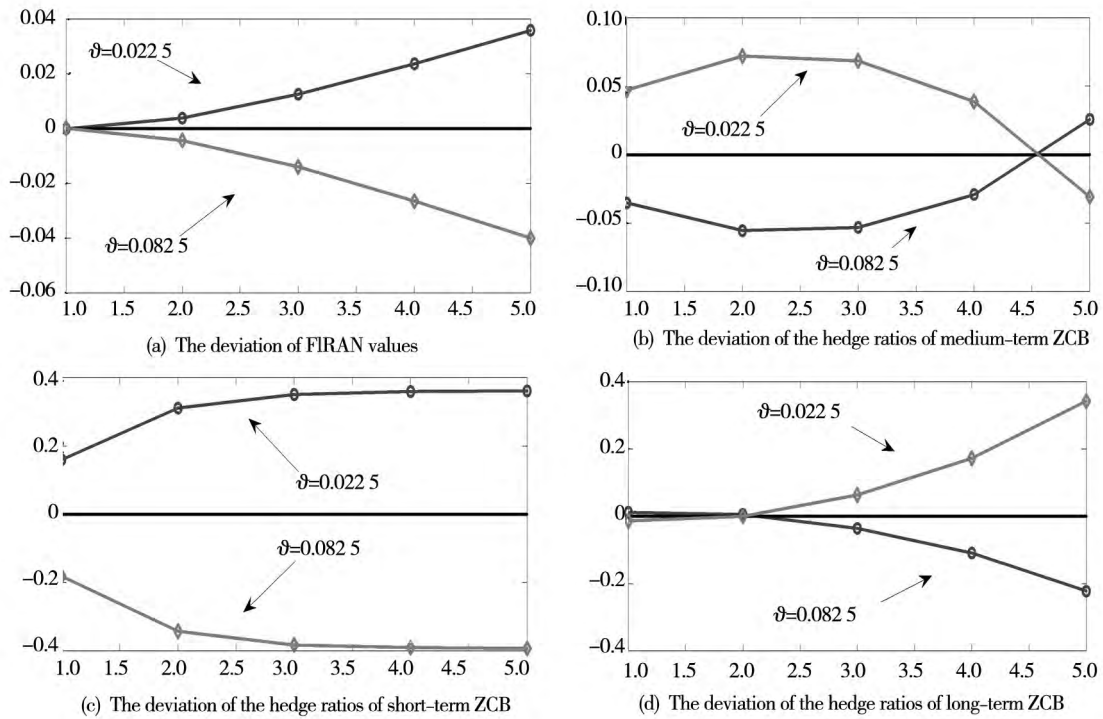


图6 FiRAN 的定价和对冲比率  $\vartheta = [0.0225, 0.0525, 0.0825]$

Fig. 6 Values and hedge ratios of FiRAN with  $\vartheta = [0.0225, 0.0525, 0.0825]$

从图 5 和图 6 观察到,相对于跳跃强度的变动和长期波动水平的变动,长期均值的变动会引起 FiRAN 和 FIRAN 的价值出现更大偏离。当到期时间达到 5 年时,这种偏度程度更是达到小数点后两位。这说明,FiRAN 和 FIRAN 对长期均值风险比跳跃风险和随机波动风险更敏感。这是因为,较低水平的长期均值意味着较低的期望短期利率水平,进而更高的现金流贴现价值。同时,较低的长期均值也隐含着更高概率水平上正的数值区间期权。较低的长期均值水平将会使投资者持有更少中期零息债券,卖空更少短期零息债券和更多的长期债券来对冲 FiRAN。另一方面,更低的长期均值水平会使投资者持有更多的短期零息债券和更少中期零息债券来对冲 FIRAN,同时投资者也会持有长期零息债券来对冲到期时间超过 2 年的 FIRAN。

因此,长期趋势或长期均值水平的变动传达了期望通胀率和均衡利率水平的缓慢变化之间的复杂效应,这些效应是短期利率、参考利率和贴现利率等利率市场发生波动的主要原因,并引起了 FiRAN 和 FIRAN 的价值和对冲策略的显著偏离。由于随机均值过程的均值回归参数(长期均值)的变动会导致风险显著的增加,所以它对 RAN 的价值和对冲策略的影响占优于跳跃强度和随机波动过程的均值回归参数。它解释了 FiRAN 和 FIRAN 的价值和对冲比率的大部分变化。该发现肯定了 Andersen 等<sup>[16]</sup>的观点,即随机均值因素在利率衍生品定价中的重要作用。另外,FiRAN 的价值和对冲策略与 FIRAN 的表现是不一致的。FiRAN 不仅取决于参考利率,还取决于贴现利率,进而对模型设定和参数变动产生不同形式的反应。所以,这两种产品对市场上的风险具有不同的性质。

以上的敏感性分析结果说明,状态变量模型

的设定会显著的影响着 RAN 的价值和对冲比率。状态变量过程的设定对利用模型设定风险(如随机均值过程和跳跃成分)进行敏感性分析具有重要的意义。同时,跳跃强度、随机波动过程的均值回归参数和随机均值过程的均值回归参数的变动,有利于测量 RAN 的定价和对冲过程中存在的风险。研究表明,跳跃风险、随机波动风险和随机均值风险对利率敏感性金融工具的价值和对冲策略的影响存在差异。

## 4 结束语

本文在结合了跳跃、随机波动和随机均值的仿射跳跃利率期限结构模型下获得 FiRAN 和 FIRAN 的定价解析解和对冲策略。在该过程中,通过合理的变动参数和状态向量过程获得了 RAN 交易和风险管理方面有益的含义。

首先,FiRAN 和 FIRAN 的价值和对冲策略取决于潜在利率模型的设定。在潜在利率模型中加入跳跃成分和随机均值过程会对 RAN 的价值和对冲策略产生显著的影响,但对 FiRAN 和 FIRAN 的影响模式有显著的不同。接着,本文还通过变动跳跃强度、随机波动的均值回归参数和随机均值的均值回归参数来考查三种不同来源的风险。数值结果表明,FiRAN 和 FIRAN 受这些参数影响,其中,随机均值因素在定价和对冲中扮演主要的角色。

以上结果表明了三因素利率模型在利率衍生品定价中的重要性。因此,本文的模型及定价公式为定价 RAN 给出一个更具弹性和一致性的理论框架。该模型框架也可以被扩展到双币 RAN(例如 Liao 和 Hsu<sup>[27]</sup>),亚式利率期权(例如 Nielsen 和 Sandmann<sup>[28]</sup>)和固定收益方差掉期(例如 Zhu 和 Lian<sup>[29]</sup>)的定价。

## 参考文献:

- [1]Turnbull S. Interest rate digital options and range notes[J]. *Journal of Derivatives*, 1995, 3(1): 92-101.
- [2]Navatte P, Quittard-Pinon F. The valuation of interest rate digital options and range notes revisited[J]. *European Financial Management*, 1999, 5(3): 425-440.
- [3]Nunes J P V. Multifactor valuation of floating range notes[J]. *Mathematical Finance*, 2004, 14(1): 79-97.

- [4] Eberlein E, Kluge W. Valuation of floating range notes in lévy term-structure models [J]. *Mathematical Finance*, 2006, 16(2): 237–254.
- [5] Jang B G, Yoon J H. Analytic valuation formulas for range notes and an affine term structure model with jump risks [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2010, 34(9): 2132–2145.
- [6] Chou C H, Hsieh T Y, Chen S N. Valuation of quanto floating range notes under the cross-currency LIBOR market model [J]. *International Journal of Economics and Finance*, 2015, 7(12): 70–83.
- [7] Wu P, Elliott R J. Valuation of CMS range notes in a multifactor LIBOR market model [J]. *International Journal of Financial Engineering*, 2016, 3(1): 1–18.
- [8] 刘杨树, 郑振龙, 陈蓉. 跳跃风险如何影响期权复制收益? ——基于多维跳跃扩散的模型与证据 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(6): 74–86.  
Liu Yangshu, Zheng Zhenlong, Chen Rong. How does jump risk affect the Delta hedge gain? Evidence from multi-dimension jump diffusion model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(6): 74–86. (in Chinese)
- [9] 陈淼鑫, 武晨. 随机跳跃强度与期权隐含风险溢价 [J]. *管理科学学报*, 2018, 21(4): 28–42.  
Chen Miaoxin, Wu Chen. Stochastic jump intensity and option implied risk premiums [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(4): 28–42. (in Chinese)
- [10] Andersen T G, Lund J. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate [J]. *Journal of Econometrics*, 1997, 77(2): 343–377.
- [11] Ball C A, Torous W N. The stochastic volatility of short-term interest rates: Some international evidence [J]. *Journal of Finance*, 1999, 54(6): 2339–2359.
- [12] Das S R. The surprise element: Jumps in interest rates [J]. *Journal of Econometrics*, 2002, 106(1): 27–65.
- [13] Johannes M. The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models [J]. *Journal of Finance*, 2004, 59(1): 227–260.
- [14] Jiang G, Yan S. Linear-quadratic term structure models: Toward the understanding of jumps in interest rates [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2009, 33(3): 473–485.
- [15] Wright J H, Zhou H. Bond risk premia and realized jump risk [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2009, 33(12): 2333–2345.
- [16] Andersen T G, Benzoni L, Lund J. *Stochastic Volatility, Mean Drift, and Jumps in the Short-Term Interest Rate* [D]. Northwestern University, Chicago: Working Paper, 2004.
- [17] Litterman R, Sckeinkman J. Common factors affecting bond returns [J]. *Journal of Fixed Income*, 1991, 1(1): 54–61.
- [18] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1992: 77–105.
- [19] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions [J]. *Econometrica*, 2000, 68(6): 1343–1376.
- [20] 王春峰, 吴启权, 李晗虹. 考虑宏观变量仿射期限结构下付息债券期权定价研究 [J]. *预测*, 2007, 26(6): 32–35.  
Wang Chunfeng, Wu Qiquan, Li Hanhong. Research on coupon bond derivatives with affine term structure with macro variables [J]. *Forecasting*, 2007, 26(6): 32–35. (in Chinese)
- [21] 王春峰, 吴启权, 李晗虹. 仿射期限结构下贴现债券衍生工具定价研究 [J]. *管理工程学报*, 2008, 22(4): 105–112.  
Wang Chunfeng, Wu Qiquan, Li Hanhong. Researches on discount bond derivatives with affine term structure [J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2008, 22(4): 105–112. (in Chinese)
- [22] 宋永安, 陆立强. 非参数利率期限结构动态模型及衍生品定价 [J]. *复旦大学学报(自然科学版)*, 2008, 47(2): 213–219.  
Song Yongan, Lu Liqiang. Nonparameteric modeling of interest rate term structure dynamics and the pricing of derivative securities [J]. *Journal of Fudan University( Nature Science)*, 2008, 47(2): 213–219. (in Chinese)
- [23] 周荣喜, 王晓光. 基于多因子仿射利率期限结构模型的国债定价 [J]. *中国管理科学*, 2011, 4(4): 23–28.  
Zhou Rongxi, Wang Xiaoguang. A multi-factor affine term structure model of interest rates for pricing treasury bonds [J].

- Chinese Journal of Management Science, 2011, 4(4): 23–28. (in Chinese)
- [24] Chiarella C, Da Fonseca J, Grasselli M. Pricing range notes within Wishart affine models [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 58(9): 193–203.
- [25] 牛华伟. 利率带有跳跃情形下的信用衍生品定价研究 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(4): 71–85.  
Niu Huawei. Pricing credit derivatives with jumps in interest rates [J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(4): 71–85. (in Chinese)
- [26] Jarrow A, Turnbull S. Delta, gamma and bucket hedging of interest rate derivatives [J]. Applied Mathematical Finance, 1994, 1(1): 21–48.
- [27] Liao S L, Hsu P P. Pricing and hedging of quanto range accrual notes under Gaussian HJM with cross-currency lévy processes [J]. Journal of Futures Markets, 2009, 29(10): 973–998.
- [28] Nielsen J A, Sandmann K. Pricing of asian exchange rate options under stochastic interest rates as a sum of options [J]. Finance and Stochastics, 2002, 6(3): 355–370.
- [29] Zhu S, Lian G H. A closed-form exact solution for pricing variance swaps with stochastic volatility [J]. Mathematical Finance, 2011, 21(2): 233–256.

## Pricing and hedging range accrual notes in an affine model with stochastic mean, stochastic volatility, and jumps

*LI Shao-yu*<sup>1</sup>, *HUANG Hong-ren*<sup>2</sup>

1. School of Securities and Futures, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;
2. Department of Finance, “Central University”, Taoyuan 32001, Taiwan, China

**Abstract:** This paper proposes analytic valuation formula of fixed range accrual notes (FiRAN) and floating range accrual notes (FiRAN) in an affine term-structure model incorporating stochastic long-run mean, stochastic volatility, and jumps. Analytic pricing and hedging solutions for range accrual notes are given and these solutions are demonstrated in sensitivity analyses. Our numerical results show all these three factors significantly affect the values and hedging strategies of range accrual notes. Particularly, stochastic mean that represents a composite effect of the expected inflation and a slow evolution in the equilibrium real interest rate plays the most important role in either valuation or hedging. This study suggests that the ignorance of these three factors in term-structure model will result in significant pricing and hedging errors in range accrual notes (RAN). In sum, this study provides a flexible and easily implementable solution in valuing RAN.

**Key words:** affine model; jump; stochastic volatility; stochastic mean