

我国市场债券收益的可预测性及其经济价值研究^①

苏云鹏¹, 杨宝臣¹, 周方召²

(1. 天津大学管理与经济学部, 天津 300072; 2. 江南大学商学院, 无锡 214122)

摘要: 债券收益的可预测性及其经济价值一直是颇具争议的热点问题. 本文首先利用回归模型检验了我国债券收益的可预测性, 并分析了债券收益的非马尔科夫性和随机波动特征. 在此基础上, 在广义随机波动 HJM 框架下提出了非马尔科夫 DTSM 模型的构建方法, 并分析了非马尔科夫性和随机波动性对于债券超额收益的可预测性及其经济价值实现的作用. 最后, 考察了我国市场上债券收益可预测性的来源. 结果表明, 我国债券收益可预测性具有很强的统计显著性, 且可以转化为显著的经济收益. 在此过程中, 非马尔科夫性、随机波动性具有十分关键的作用. 经济环境驱动的时变性风险溢价是我国债券收益可预测性的主要来源, 而非涵盖随机波动因子也显著含有债券收益的预测信息.

关键词: 债券收益可预测性; Heath-Jarrow-Morton 框架; 非马尔科夫性; 随机波动率; 非涵盖风险因子

中图分类号: F830.91 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2019)04-0027-26

0 引言

债券作为投资的重要渠道和载体, 其收益的可预测性一直是金融学术界与实业界关注的焦点. 预期理论假设期限溢价为常数, 这意味着债券超额收益是不可预测的. 然而, Fama 和 Bliss^[1] 基于美国国债数据进行实证研究指出, 期限溢价是时变的, 而远期利差对于债券超额收益具有显著预测能力. Campbell 和 Schiller^[2] 也通过实证发现, 长短期利差可用于预测未来收益率的变动. 在以上研究中, 针对不同期限债券的收益或超额收益, 需要相应构建不同的预测因子, 而 Cochrane 和 Piazzesi^[3] 则构建出一个特定的远期利率组合, 可用于所有期限债券超额收益的预测, 并显著提升了预测模型的拟合优度(由 0.18 左右提升至 0.40 左右).

对于我国债券市场, 范龙振和王晓丽^[4] 分别

基于 Fama-Bliss 和 Cochrane-Piazzesi 回归预测模型分析了我国市场上远期利率对于债券超额收益的预测能力, 发现可达 0.5 以上. 王安兴和余文龙^[5] 则通过将主成分回归预测模型与 Fama-Bliss、Cochrane-Piazzesi 回归预测模型进行实证比较, 发现我国市场上收益率曲线的前两个主成分构成的单一变量即可很好地预测债券超额收益. 杨宝臣和张涵^[6] 得到了类似结论, 并指出远期利率组合可作为预测债券超额收益的单一变量.

越来越多研究发现, 当期收益率曲线所涵盖信息之外的风险因子也对未来的债券超额收益具有很强的预测能力, 如宏观经济因子^[7,8]、金融市场因子^[9]、随机波动因子^[10] 等, 可称之为非涵盖风险因子. 目前, 关于非涵盖风险因子对债券收益预测能力的研究主要集中于宏观经济因子. 其中, Ludvigson 和 Ng^[7] 通过动态因子分析法构建了债券超额收益的宏观预测因子, 并通过实证分析表

① 收稿日期: 2017-09-06; 修订日期: 2019-02-02.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71501140; 71471129); 教育部人文社会科学研究青年基金项目(11YJCZH147); 教育部长江学者和创新团队发展计划项目(IRT1028); 天津大学自主创新基金项目.

作者简介: 苏云鹏(1982—), 男, 河北邢台人, 博士, 副教授. Email: ypsu@tju.edu.cn

明所构建的宏观预测因子对于债券超额收益具有显著的预测能力,且未涵盖于收益率曲线。Lin等^[11]基于循环组合模型(iterated combination model)将金融市场因子与宏观经济因子所包含信息糅合在一起,发现可以大幅提升对于公司债券收益的预测能力。Zhou和Zhu^[8]则从国际市场角度研究了宏观经济因子对于债券超额收益的预测能力,发现当地宏观经济因子(local macro factor)对于债券收益不具有显著预测能力,而国际宏观经济因子(global macro factor)却具有,且不涵盖于当地或国际收益率曲线。范龙振和张处^[12]选取若干典型国债实证分析了我国市场上债券超额收益与宏观经济变量之间的关系,发现官方利率、通货膨胀率、货币供应量增长率和实际消费增长率可以显著解释债券超额收益的变动。郑振龙等^[13]则基于Duffee^[14]的潜在因子分析框架,从债券风险溢价中分解出非涵盖宏观因子,并通过实证表明我国市场上非涵盖宏观因子对债券收益具有良好的预测能力。

以上研究从统计学上证明了债券收益的可预测性是显著存在的,对于投资组合优化与管理具有重要意义。然而,债券收益可预测性的统计显著性并不意味着可以自然而然转化为实际的经济收益。Thornton和Valente^[15]基于美国国债数据检验了FB和CP为代表的远期利差因子对于债券超额收益预测能力的经济价值,发现其无法为均值-方差偏好型投资者带来高于预期理论模型的额外经济收益。Sarno等^[16]在仿射模型框架下通过同时拟合债券收益率和超额收益以提取更多预测信息,其实证结果亦表明债券收益的可预测性并不能转化为实际的经济收益。与之相反,Zhu^[17]在跨国市场框架下构建了一个内生性Cochrane-Piazzesi公共因子,并通过实证研究表明该因子对于跨国债券超额收益具有很强的预测能力,并能够获得显著高于历史均值的超额收益。

针对债券收益可预测性在统计上和经济学上可能存在的 inconsistence 问题,Gargano等^[18]通过实证研究指出,若将债券超额收益的可预测性转化为实际经济收益,必须将实际数据所显示的模型特征纳入考量,并通过将模型的不确定性、随机波动率以及非涵盖宏观因子引入回归模型,证实了债券超额收益的可预测性可以转化为实际经济收益。

此外,鉴于Cochrane和Piazzesi^[3]发现远期利率滞后项可显著改善对债券超额收益的预测效果,Feunou和Fontaine^[19]利用移动平均因子刻画收益率的历史路径信息,从而将非马尔科夫性引入动态期限结构模型(DTSM),并通过实证表明此举可有效刻画非涵盖宏观因子所含信息,显著提升了对债券超额收益的预测能力。而Li等^[20]则在Heath-Jarrow-Morton框架^[21](下文简称HJM框架)下提出了非马尔科夫DTSM模型的系统构建方法,并通过实证研究表明非马尔科夫性的引入对于将债券超额收益可预测性转化为实际经济收益具有重要意义。此外,还指出模型的非马尔科夫特征需要根据不同国家债券市场的实际情况进行相应设定。

本文首先基于债券收益回归模型检验了我国市场债券收益的可预测性,并分析了债券收益的非马尔科夫性和随机波动特征。在此基础上,提出了广义随机波动HJM框架下非马尔科夫DTSM模型的系统构建方法,并将非涵盖随机波动因子引入模型,进而基于一类特定波动结构设定对模型进行有限维马尔科夫仿射实现。然后,通过比较传统HJM框架与广义HJM框架下各模型设定在模型设定、数据拟合、经济价值三方面的表现,分析了非马尔科夫性及随机波动特征对于债券超额收益可预测性及其经济价值实现的作用,并确定了最优模型设定。最后,基于最优模型设定系统考察了我国市场上债券收益可预测性及其经济价值的来源。

本文的学术贡献主要有以下三方面:

首先,提出了广义随机波动HJM框架下非马尔科夫DTSM模型的系统构建方法,并对模型进行了有限维马尔科夫仿射实现。Gargano等^[18]证实了将随机波动率以及非涵盖风险因子引入模型对于债券收益的可预测性转化为实际经济收益的重要意义。此外,Tchuindjo^[23]、Trolle和Schwartz^[24]指出驱动利率动态特性的风险因子之间存在显著的相关性。鉴于此,本文基于杨宝臣和苏云鹏^[25]提出的具有相关波动因子的广义随机波动HJM框架,将波动率的多项式设定推广为任意阶数,且允许不同波动因子的多项式具有不同阶数,并基于以上波动结构设定对收益率曲线的动态特性进行了有限维马尔科夫仿射实现,大大提升了

模型设定的广义性和灵活性.在此基础上,本文提出了具有随机波动率及非涵盖风险因子的非马尔科夫 DTSM 模型的系统构建方法.

其次,系统考察了我国债券超额收益的可预测性及其经济价值,并重点分析了非马尔科夫性及随机波动特征在其中的作用. Li 等^[20]指出,不同国家市场上债券收益的非马尔科夫性并不相同,需要根据各市场的实际情况对模型的非马尔科夫特征进行相应设定.因此,本文首先利用债券超额收益回归模型检验了我国市场债券收益的可预测性,并分析了债券收益的非马尔科夫性和随机波动特征.鉴于回归预测模型缺乏经济理论支撑,无法有效刻画债券收益的复杂非马尔科夫性和随机波动特征,本文基于构建的广义随机波动 HJM 框架,从模型设定、数据拟合、经济价值三方面分析了非马尔科夫性及随机波动特征对于债券超额收益的可预测性及其经济价值实现的作用,并确定了适合我国市场的最优模型设定.

再次,系统分析了我国市场上债券收益可预测性及其经济价值的来源. Cochrane^[26]指出,债券收益可预测性可能主要来源于时变性风险溢价.同时, Gargano 等^[18]通过实证研究发现,非涵盖风险因子对于债券超额收益的可预测性及其经济收益实现十分重要.鉴于此,本文基于广义随机波动 HJM 框架下的最优模型设定,首先分析了我国债券收益可预测性及其经济价值随宏观经济运

行情况的变动规律,并揭示其逆周期性特征;其次,从夏普比率的逆周期性、风险溢价的逆周期性及其与宏观经济风险的正相关性三个方面检验了债券超额收益预测值与时变性风险溢价间动态特征的符合性,从而确定时变性风险溢价对于债券超额收益预测的作用;最后,从模型设定、数据拟合、经济价值三方面分析了非涵盖随机波动因子对于债券收益的可预测性及其经济价值转化中的作用.

1 债券收益的可预测性、非马尔科夫性与随机波动性

本节首先利用含有移动平均项的债券超额收益预测模型来检验我国市场债券收益的可预测性,并分析债券收益的非马尔科夫性及其在预测债券收益中的重要作用.在此基础上,进一步分析债券收益动态特性中的随机波动特征,为构建随机波动 HJM 框架下的非马尔科夫 DTSM 模型提供依据.

1.1 样本选取及处理

本文选取自 2002 年 1 月至 2017 年 1 月期间 1 年到 10 年期国债到期收益率的月度数据作为样本,共 181 组观测值.数据来源为 Wind 咨询数据库: www.wind.com.cn. 表 1 给出了样本数据的描述性统计特征.

表 1 样本数据的描述性统计特征

Table 1 Descriptive statistics of sample data

	1 年期	2 年期	3 年期	4 年期	5 年期
均值	0.024 974	0.026 928	0.028 626	0.030 126	0.031 281
中位数	0.024 031	0.025 940	0.028 134	0.029 668	0.030 784
标准差	0.007 191	0.006 988	0.006 517	0.006 273	0.006 014
样本数	181	181	181	181	181
	6 年期	7 年期	8 年期	9 年期	10 年期
均值	0.032 666	0.033 567	0.034 415	0.035 071	0.035 640
中位数	0.032 152	0.033 302	0.033 889	0.034 370	0.034 810
标准差	0.006 011	0.005 827	0.005 846	0.005 872	0.005 893
样本数	181	181	181	181	181

1.2 债券超额收益的回归预测模型

依照已有研究的通常做法,本文以 Cochrane 和 Piazzesi^[3]提出的持有期平均超额收益作为预测对象,如式(1)所示

$$\overline{rx}_{t+1} \equiv \frac{1}{4} \sum_{n=2}^5 rx_{t+1}^{(n)} \quad (1)$$

其中 n 年期债券超额收益 $rx_{t+1}^{(n)} \equiv r_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)}$, 1 年持有期收益 $r_{t+1}^{(n)} \equiv ny_t^{(n)} - (n-1)y_{t+1}^{(n-1)}$, $y_t^{(n)}$ 为 t 时刻 n 年期零息债券的到期收益率.

为了检验债券超额收益的可预测性,并分析非马尔科夫性在预测债券收益中的作用,本文基于含有移动平均项的债券超额收益预测模型(下

文简称为 CPM 模型) 对债券超额收益进行预测, 形式如式(2)所示

$$\bar{r}_{x_{t+1}} = \beta_0 + \beta_1 y_t + \beta_2 \bar{y}_{t-l} + \varepsilon_{t+1} \quad (2)$$

其中 $y_t = [y_t^{(1)} \quad y_t^{(2)} \quad \dots \quad y_t^{(10)}]$ 为 1 年到 10 年期到期收益率向量, $\bar{y}_{t-l} = [\bar{y}_{t-l}^{(1)} \quad \bar{y}_{t-l}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{y}_{t-l}^{(10)}]$ 为 l 阶移动平均向量, 且 $\bar{y}_{t-l}^{(n)} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l y_{t-j}^{(n)}$. 移动平均阶数 l 越大, 意味着非马尔科夫性越强. β_0 为常数项, β_1 和 β_2 分别为 y_t 和 \bar{y}_{t-l} 的回归系数向量.

鉴于实际中投资者会将掌握的所有信息用于债券收益预测, 不断利用新获得的信息来更新预测模型, 从而获取尽量精确的预测结果来指导债券投资. 因此, 本文将所选取的数据分为样本期内和样本期外数据两部分, 其中样本期内数据由 2002 年 1 月到 2009 年 12 月, 视为投资者最初业已掌握的信息, 用于模型初始参数的估计^②. 而样本期外数据则由 2010 年 1 月到 2017 年 1 月, 假定投资者在该区间内每个时点上均会利用新获得信息来更新预测模型.

在以上基础上, 通过三方面指标综合评价模型的拟合效果, 并分析债券超额收益的可预测性及其经济价值. 首先, 在样本期内, 利用 R^2 和调整后的 R^2 来评价模型的拟合优度; 其次, 在样本期外, 利用事后计算的 R^2 和调整后的 R^2 来测度模型预测精度^③. 最后, 利用 Cochrane 和 Piazzesi^[3] 提出的交易原则下的风险调整后收益 (adjusted return) 和累积收益 (cumulative return) 来测度债券超额收益可预测性的经济价值.

Cochrane 和 Piazzesi^[22] 假设投资者每月根据债券超额收益预测值 $E_t(\bar{r}_{x_{t+1}})$ 来决定债券组合投资头寸, 持有一年后卖出并获得实际超额收益 $\bar{r}_{x_{t+1}}$. 该交易原则下各月投资收益为

$$r_{n_{t+1}} \equiv \bar{r}_{x_{t+1}} \times E_t(\bar{r}_{x_{t+1}}) \quad (3)$$

其中对于 CPM 模型来说, $E_t(\bar{r}_{x_{t+1}}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 y_t +$

$$\hat{\beta}_2 \bar{y}_{t-l}.$$

在此基础上, 可利用风险调整后收益和累积收益从单位风险补偿和收益总量两个角度来评价基于收益预测值进行投资的经济价值, 其表达式如式(4)、式(5)所示

$$\text{adj } Rn = \frac{\bar{r}_{n_t}}{\text{std}(r_{n_t})} \quad (4)$$

其中 \bar{r}_{n_t} 、 $\text{std}(r_{n_t})$ 分别为 r_{n_t} 序列的均值和标准差

$$\text{cum } Rn_t = \sum_{j=1}^{12t} r_{n_j} \quad (5)$$

1.3 债券超额收益的可预测性

利用式(2)给出的 CPM 模型对我国市场债券超额收益进行样本期内拟合与样本期外预测, 并利用式(4)和式(5)给出的风险调整后收益和累积收益来测度债券收益可预测性的经济价值. 对于 CPM 模型的滞后阶数 l , 本文分别分析了从 12 到 60 滞后阶数情形, 并通过综合考虑样本期内 R^2 和调整后的 R^2 、样本期外 R^2 和调整后的 R^2 、样本期内与样本期外 $\text{adj } Rn$ 和 $\text{cum } Rn$ 来确定最优滞后阶数. 各项指标随滞后阶数变动情况如图 1 所示.

由图 1 可以看到, CPM 模型的样本期内拟合优度、样本期外预测精度、经济价值指标随其滞后阶数增加呈现复杂的变动特征, 并没有统一的变化趋势. 因此, 本文通过对各滞后阶数设定下的各项指标计算算术平均并以此排序, 最终确定 CPM 模型的最优滞后阶数为 $l^* = 50$. 此时, 一方面, CPM 模型的样本期内、样本期外 R^2 分别达到了 0.996 和 0.506, 表明我国市场债券超额收益在样本期内与样本期外均在统计上表现出显著的可预测性. 另一方面, 模型在样本期内、样本期外的风险调整后收益 $\text{adj } Rn$ 分别为 0.667 和 0.865, 则表明基于债券收益可预测性的投资具有很好的单

② 对样本如此划分, 可令样本期内、外数据量大致相等, 同时保证模型估计的精确性和样本外检验的充分性. 更重要的是, 样本期内区间涵盖了正常时期和危机时期, 收益率曲线形状和动态特性丰富, 有利于保证模型校正的全面性和稳健性. 此外, 为保证研究结果的稳健性, 本文基于样本的多种不同划分对研究结果进行稳健性检验, 结果显示所得结论并未发生显著变化, 显示具有很强的稳健性. 因篇幅所限, 具体稳健性检验结果不在文中列出, 有兴趣者可向作者索取.

③ 之所以将样本期外 R^2 和调整后的 R^2 与下文引入的经济价值指标综合起来评价模型的样本外预测能力, 主要是为了排除预测误差很大但由于方向与真实值相同而造成的“偶然性”收益. 因为这种偶然性并不能体现模型对债券收益的预测能力, 故而需要将其干扰排除掉才能保证模型评价更公平、合理. 此外, 更重要的是, 预测误差越大意味着非必要交易成本越高, 同时投资风险也越高.

位风险补偿(类似于夏普比率)。同时,如图 2 所示,样本期内、样本期外的投资累积收益 cum Rn 均随着时间推移持续增长,表明债券收益可预测性对于实际投资的指导作用不断转化为实际经济

收益。最终,样本期内、样本期外的期末累积收益分别达到 684、264 个基点。因此,在 CPM 模型下债券收益可预测性的统计显著性在 Cochrane - Piazzesi 交易原则下可转化为显著的经济价值^④。

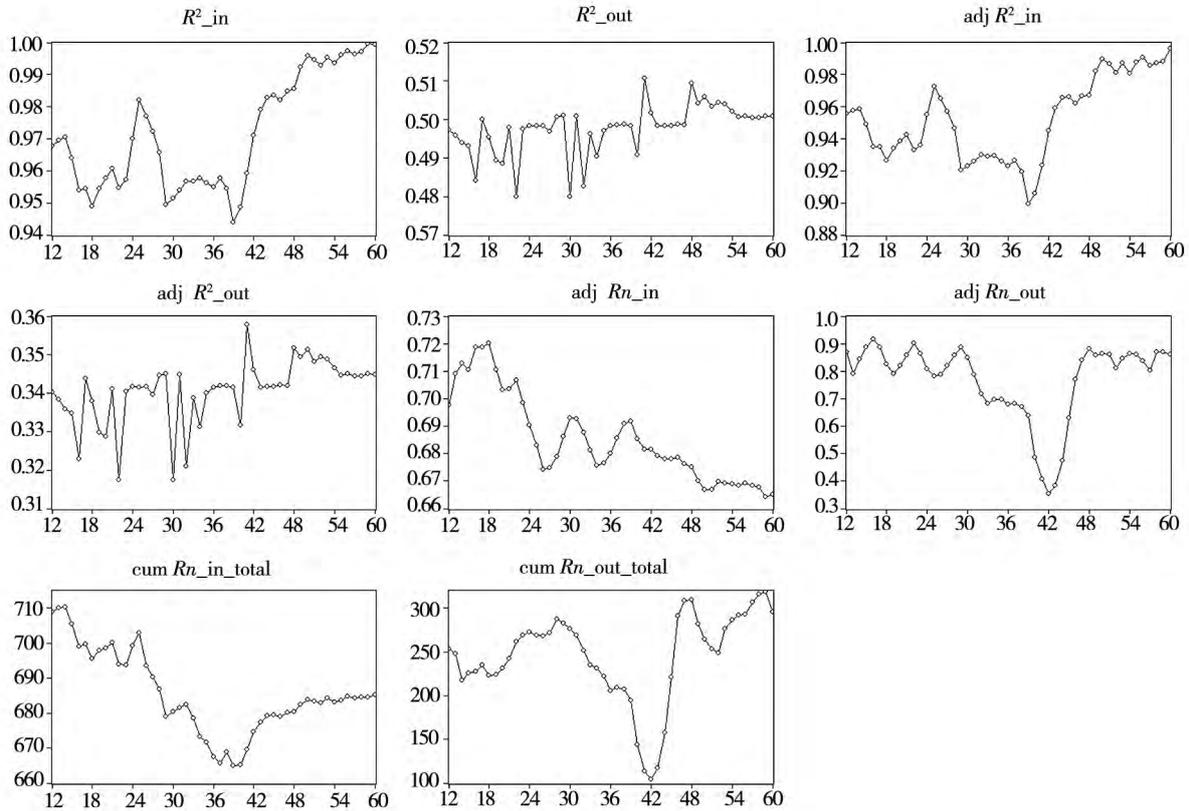


图 1 CPM 模型各项指标随滞后阶数变动情况

Fig. 1 Varying performance of CPM model with different lags

注:图中 R^2_{in} 、 $adj R^2_{in}$ 、 $adj Rn_{in}$ 分别表示样本期内 R^2 、调整后 R^2 、 $adj Rn$ R^2_{out} 、 $adj R^2_{out}$ 、 $adj Rn_{out}$ 分别表示样本期外 R^2 、调整后 R^2 、 $adj Rn$ $cum Rn_{in_total}$ 、 $cum Rn_{out_total}$ 则分别表示样本期内、样本期外期末累积收益。其中 $cum Rn_{in_total}$ 和 $cum Rn_{out_total}$ 的单位为基点。作为参考基准,本文计算了基于真实数据的样本期内、样本期外的风险调整后收益 $adj Rn_{true}$ 其值分别为 0.695、1.147。

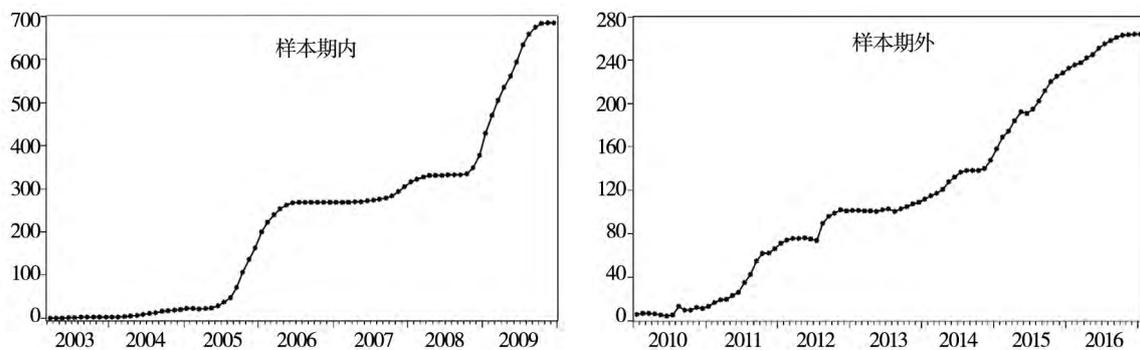


图 2 CPM 模型下样本期内、样本期外投资累积收益

Fig. 2 In-sample and out-of-sample cumulative returns under CPM model

④ 与 Li 等^[20]相同,本文将风险调整后收益大于等于 0.300(也即 30%)情形视为经济价值显著。

1.4 债券超额收益的非马尔科夫性

由图1可以看到,随着CPM模型滞后阶数的增加,其所涵盖的收益率曲线的历史路径信息不断拓展,模型的样本期内拟合优度、样本期外预测精度、经济价值指标随之发生了显著波动,表明债券超额收益确实存在非马尔科夫性,且对于其可预测性及经济价值转化具有重要影响。此外,还可以看到,CPM模型各项指标随滞后阶数的变动比较复杂,并没有统一的趋势。同时,与Li等^[20]中多数国家情形类似,我国债券市场上CPM模型的最优滞后阶数也很大($l^* = 50$),表明我国市场上债券收益的非马尔科夫性是十分复杂的。

通过对比CPM模型在样本期内、样本期外的各项指标可以发现,模型在样本期内、样本期外的表现差异很大。在统计指标方面,样本期内 R^2 和调整 R^2 分别高达0.996和0.990,而样本期外 R^2 和调整 R^2 却大幅降至0.506和0.351。在经济价值方面,鉴于样本期内、样本期外波动率显著不同,本文以模型实现的风险调整后收益相对于基于真实数据的风险调整后收益的比值 $adjRn/adjRn_true$ 作为经济价值表现的比较依据,发现该指标由样本期内的0.960显著降至样

本期外的0.754。相应的,期末累积收益也由样本期内的684个基点大幅降至样本期外的264个基点,显示出CPM模型在样本期外的表现相对于样本期内的表现存在显著落差。

究其原因,主要是由于债券收益的回归预测模型需要大量的滞后项才能刻画复杂的非马尔科夫性,这会引入严重的过度拟合问题(overfitting)。上文分析表明,我国市场上债券收益存在复杂的非马尔科夫性。为了对其进行刻画,CPM模型需要引入大量的滞后项来拟合样本期内数据,此过程完全依赖于数据拟合指标,缺乏经济理论支撑,势必会引入众多非必要的滞后项,从而引起过度拟合问题,并最终导致CPM模型在样本期内、样本期外的表现落差巨大,失去实际的投资指导意义。

1.5 债券超额收益的随机波动特征

Gargano等^[18]指出,债券收益预测模型的随机波动率特征对于债券收益可预测性转化为实际经济收益十分重要,而本文也通过分析发现在我国市场债券超额收益的动态特性中显著存在随机波动特征。表2给出了CPM模型基于样本期内、样本期外以及全样本数据回归的残差序列异方差性的ARCH检验结果。

表2 CPM模型残差序列异方差性检验

Table 2 Heteroscedasticity test results for residuals of CPM model

	样本期内		样本期外		全样本	
	统计量	p值	统计量	p值	统计量	p值
F检验	6.215	0.018	18.919	0.000	36.537	0.000
χ^2 检验	5.530	0.019	15.716	0.000	45.848	0.000

注:样本期内、样本期外及全样本下ARCH检验的滞后阶数分别为1、1、2,根据AIC、BIC、HIC信息准则确定。

由表2可以看到,根据ARCH检验结果,样本期内的残差序列异方差性在5%水平下显著,而样本期外及全样本期的残差序列异方差性均在1%水平下显著。以上结果表明,我国市场债券超额收益的动态特性显著存在随机波动特征,需要纳入到债券收益预测模型中。然而,上文分析表明,由于缺乏经济理论支撑,复杂非马尔科夫性的引入业已导致债券收益的回归预测模型存在严重的过度拟合问题,若再将随机波动设定引入模型框架会令此问题进一步加重。鉴于此,本文基于利率期限结构模型理论,提出了广义随机波动HJM框架下非马尔科夫DTSM模型的系统构建方法,

并利用构建的模型框架对我国市场上债券收益的可预测性及其经济价值进行系统分析。

2 广义随机波动Heath-Jarrow-Morton框架

2.1 广义随机波动HJM框架设定

上文研究结果表明,我国债券市场收益率曲线的动态特性中确实存在复杂的非马尔科夫性和显著的随机波动特征,但债券收益的回归预测模型框架无法对其进行有效刻画。因此,本文基于利率期限结构模型的HJM框架对收益率曲线的非

马尔科夫性和随机波动特征进行刻画. 同时, Tchuindjo^[23]指出,传统的 HJM 框架关于收益率曲线的随机驱动因子互不相关的假设并不总是成立^⑤,而对于相关的波动因子进行正交化处理会使其失去原有的经济含义,从而使得模型参数与可观测市场变量之间的联系变得模糊不清. 鉴于此,本文基于杨宝臣和苏云鹏^[25]提出的广义随机波动 HJM 框架,构建具有随机波动率以及非涵盖风险因子的非马尔科夫 DTSM 模型,并在此基础上对我国市场上债券收益的可预测性及其经济价值进行系统分析,重点考察了非马尔科夫性、随机波动性以及非涵盖随机波动因子对于债券超额收益的可预测性及其经济价值实现的作用.

设定在风险中性概率条件下,远期利率动态特性由以下微分方程组描述

$$df(t, \tau) = \mu(t, \tau) dt + \sum_{i=1}^N \sigma_{f_i}(t, \tau) \sqrt{v_i(t)} dW_i^Q(t) \quad (6)$$

$$dv_i(t) = \kappa_i(\theta_i - v_i(t)) dt + \sigma_{v_i} \sqrt{v_i(t)} \times (\rho_{v_i} dW_i^Q(t) + \sqrt{1 - \rho_{v_i}^2} dZ_i^Q(t)) \quad (7)$$

其中 $f(t, \tau)$ 为瞬时远期利率(即在时刻 t 商定的到期日为 $T = t + \tau$ 的瞬时借入或贷出利率), $\mu(t, \tau)$ 为远期利率漂移项, $v_i(t)$ 为随机波动因素, $W_i^Q(t)$ 为风险中性概率测度下的标准维纳过程,且 $W_i^Q(t)$ 与 $W_j^Q(t)$ 二者增量之间相关系数为 ρ_{ij} , 而 ρ_{v_i} 为 $v_i(t)$ 与 $W_i^Q(t)$ 二者增量的相关系数, σ_{f_i} 与 σ_{v_i} 分别为远期利率和随机波动因素的波动率因子, $Z_i^Q(t)$ 为与 $W_i^Q(t)$ 相互正交的标准维纳过程.

以上随机波动 HJM 框架将远期利率波动率设定为服从广义均值回归平方根过程的随机变量,不仅可以刻画远期利率的随机波动特征,还允许远期利率波动率与远期利率水平变动之间存在相关性^⑥. 此外,在以上模型框架下,远期利率波动率除了由驱动远期利率曲线的 N 个相关的随机因子驱动之外,还受到 N 个与之相互正交的额外随机因子所驱动,从而可以刻画非涵盖随机波

动因子的动态特性.

杨宝臣和苏云鹏^[25]指出,式(6)和式(7)所定义的广义随机波动 HJM 模型的漂移项 $\mu(t, \tau)$ 具有如下表达式

$$\mu(t, \tau) = \sum_i^N \sum_j^N \rho_{ij} \sqrt{v_i(t) v_j(t)} \sigma_{f_i}(t, \tau) \times \int_0^\tau \sigma_{f_j}(t, s) ds \quad (8)$$

其中 ρ_{ij} 为维纳过程 $W_i^Q(t)$ 与 $W_j^Q(t)$ 之间的相关系数, $v_i(t)$ 为随机波动因素, σ_{f_i} 为远期利率波动率因子.

2.2 广义 HJM 模型的有限维马尔科夫仿射实现

一般情况下, HJM 框架下收益率曲线的动态特性是具有路径依赖性的,也即非马尔科夫的,因此适合分析非马尔科夫性在债券收益可预测性及其经济价值实现中的作用. 但是,模型的非马尔科夫性会大大增加模型估计和定价计算的复杂程度,限制了 HJM 框架的实际应用. 因此,已有众多学者对 HJM 框架的马尔科夫简化条件进行了研究,如 Ritchken 和 Sankarasubramanian^[31]、Inui 和 Kijima^[32]、Björk 和 Svensson^[33]、Chiarella 和 Kwon^[34]等.

基于已有研究并 Björk 和 Svensson^[33]中推论 5.1 可知,对 HJM 框架下远期利率曲线进行有限维马尔科夫仿射实现的一个充分条件为

$$\sigma_{f_i}(t, \tau) = p_{d_i}(\tau) e^{-\gamma\tau} \quad (9)$$

其中 $p_{d_i}(\tau) = \alpha_{0_i} + \alpha_{1_i}\tau + \dots + \alpha_{d_i-1_i}\tau^{d_i-1}$ 为 τ 的 $d_i - 1$ 阶多项式.

基于式(9)中波动率结构设定,利用式(8)对式(6)及式(7)所定义的广义随机波动 HJM 模型进行有限维马尔科夫仿射实现,如命题 1 所示.

命题 1 在式(9)所设定的波动率结构条件下,式(6)及式(7)所定义的广义随机波动 HJM 模型具有如下马尔科夫仿射实现

$$f(t, \tau) = f(0, t+\tau) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m B_{x_i}^{m,g}(\tau) x_i^{m,g}(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m B_{\phi_{ij}}^{m,g}(\tau) \phi_{ij}^{m,g}(t) +$$

⑤ 由下文表 7 中模型参数估计结果可以看到,我国债券市场上利率期限结构的三个随机驱动因子间相关系数分别为 -0.470、0.548、0.466,验证了在波动因子间引入相关性的合理性和必要性.

⑥ Andersen 和 Lund^[27]、Ball 和 Torous^[28]、Jarrow 等^[29]、Trolle 和 Schwartz^[30]等通过实证研究发现,利率波动率与利率水平存在显著相关性.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \sum_{k=1}^{d_j} \sum_{n=0}^{d_j-k} \sum_{q=0}^n B_{\varphi_{ij}}^{m \ g \ k \ n \ q}(\tau) \varphi_{ij}^{m \ g \ k \ n \ q}(t) \quad (10)$$

其中

$$B_{x_i}^{m \ g}(\tau) = \binom{m}{g} \alpha_{m \ i} \tau^{m-g} e^{-\gamma_i \tau} \quad (11)$$

$$B_{\phi_{ij}}^{m \ g}(\tau) = \rho_{ij} \binom{m}{g} \left(\sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} (k-1)! \alpha_{k-1 \ j} \right) \times \alpha_{m \ i} \tau^{m-g} e^{-\gamma_i \tau} \quad (12)$$

$$B_{\varphi_{ij}}^{m \ g \ k \ n \ q}(\tau) = -\frac{1}{\gamma_j^k} \rho_{ij} \binom{m}{g} \binom{n}{q} \frac{(n+k-1)!}{n!} \times \alpha_{m \ i} \alpha_{n+k-1 \ j} \tau^{m+n-g-q} e^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} \quad (13)$$

而状态变量服从以下随机过程

$$dx_i^{m \ 0}(t) = -\gamma_i x_i^{m \ 0}(t) dt + \sqrt{v_i(t)} dW_i^Q(t) \quad (14)$$

$$dx_i^{m \ g}(t) = (g x_i^{m \ g-1}(t) - \gamma_i x_i^{m \ g}(t)) dt, \quad g = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

$$d\phi_{ij}^{m \ 0}(t) = (\sqrt{v_i(t)v_j(t)} - \gamma_i \phi_{ij}^{m \ 0}(t)) dt \quad (16)$$

$$d\phi_{ij}^{m \ g}(t) = (g \phi_{ij}^{m \ g-1}(t) - \gamma_i \phi_{ij}^{m \ g}(t)) dt, \quad g = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

$$d\varphi_{ij}^{m \ 0 \ k \ n \ 0}(t) = [\sqrt{v_i(t)v_j(t)} - (\gamma_i + \gamma_j) \varphi_{ij}^{m \ 0 \ k \ n \ 0}(t)] dt \quad (18)$$

$$d\varphi_{ij}^{m \ g \ k \ n \ q}(t) = [(g+q) \varphi_{ij}^{m \ g \ k \ n \ q-1}(t) - (\gamma_i + \gamma_j) \varphi_{ij}^{m \ g \ k \ n \ q}(t)] dt, \quad g+q = 1, 2, \dots, m+n \quad (19)$$

且初始条件为 $x_i^{m \ g}(0) = \phi_{ij}^{m \ g}(0) = \varphi_{ij}^{m \ g \ k \ n \ q}(0) = 0$.

证明 见附录 A.

注意到命题 1 中只有状态变量 $x_i^{m \ 0}(t)$ 含有随机驱动项,其他状态变量均为辅助状态变量.其中 $x_i^{m \ g}(t)$ ($g = 1, 2, \dots, m$) 刻画了 $x_i^{m \ 0}(t)$ 的历史路径信息, $\phi_{ij}^{m \ g}(t)$ 、 $\varphi_{ij}^{m \ g \ k \ n \ q}(t)$ 则刻画了 $v_i(t)$ 的历史路径信息.由于以上辅助状态变量表达式中均不含有随机驱动项,也即局部确定性变量,因此命题 1 通过将上述辅助状态变量引入模型状态空间,对式(6)和式(7)所定义的广义随机波动 HJM 模型进行有限维马尔科夫仿射实现,使其具有很好的解析特性,从而为模型估计、资产定价以及收益率曲线动态特性分析提供了便利.另外,为保证模型的时间齐次特性以便于模型估计,

本文借鉴 de Jong 和 Santa-Clara^[35]、Trolle 和 Schwartz^[30]、Li 等^[20]的做法,以 $f_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(0, t + \tau)$ 来替换式(10)中的 $f(0, t + \tau)$.

式(8)给出的漂移项限制条件表明,广义随机波动 HJM 框架完全取决于波动率结构设定.因此,本文将杨宝臣和苏云鹏^[25]中波动率的多项式设定推广为任意阶数,且允许不同波动因子的多项式具有不同阶数,进而在此基础上对收益率曲线的动态特性进行了有限维马尔科夫仿射实现,大大提升了模型设定的广义性和灵活性.为下文分析非马尔科夫性、随机波动性等对债券收益可预测性及其经济价值实现中的作用,以及优选模型设定提供了基础.

令 $y(t, \tau)$ 为 t 时刻到期期限为 $\tau = T - t$ 的到期收益率,则有如下命题:

命题 2 在式(9)所设定的波动率结构条件下,式(6)及式(7)所定义的广义随机波动 HJM 模型中到期收益率 $y(t, \tau)$ 具有如下马尔科夫仿射表达式

$$y(t, \tau) = f_\infty + \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m C_{x_i}^{m \ g}(\tau) x_i^{m \ g}(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m C_{\phi_{ij}}^{m \ g}(\tau) \phi_{ij}^{m \ g}(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \sum_{k=1}^{d_j} \sum_{n=0}^{d_j-k} \sum_{q=0}^n C_{\varphi_{ij}}^{m \ g \ k \ n \ q}(\tau) \varphi_{ij}^{m \ g \ k \ n \ q}(t) \quad (20)$$

其中

$$C_{x_i}^{m \ g}(\tau) = \frac{m!}{g!} \alpha_{m \ i} \left[\frac{1}{\gamma_i^{m-g+1} \tau} - e^{-\gamma_i \tau} \sum_{l=0}^{m-g} \frac{\tau^{m-g-l-1}}{(m-g-l)! \gamma_i^{l+1}} \right] \quad (21)$$

$$C_{\phi_{ij}}^{m \ g}(\tau) = \frac{m!}{g!} \rho_{ij} \alpha_{m \ i} \left(\sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} (k-1)! \alpha_{k-1 \ j} \right) \times \left[\frac{1}{\gamma_i^{m-g+1} \tau} - e^{-\gamma_i \tau} \sum_{l=0}^{m-g} \frac{\tau^{m-g-l-1}}{(m-g-l)! \gamma_i^{l+1}} \right] \quad (22)$$

$$C_{\varphi_{ij}}^{m \ g \ k \ n \ q}(\tau) = \frac{1}{\gamma_j^k} \rho_{ij} \binom{m}{g} \frac{(n+k-1)!}{(n-q)! q!} \alpha_{m \ i} \alpha_{n+k-1 \ j} \times \left[e^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} \sum_{l=0}^{m+n-g-q} \frac{(m+n-g-q-l)! \tau^{m+n-g-q-l-1}}{(m+n-g-q-l)! (\gamma_i+\gamma_j)^{l+1}} - \frac{(m+n-g-q)!}{(\gamma_i+\gamma_j)^{m+n-g-q+1} \tau} \right] \quad (23)$$

证明 见附录 B.

2.3 市场风险价格的设定

借鉴 Trolle 和 Schwartz^[30] 做法, 本节基于 Cheredito 等^[36] 对于风险的市场价格提出的广义仿射设定形式, 将上文结果推广至现实概率测度 P 下, 以便利用常用的经济计量方法对模型进行校正与估计, 从而有助于模型的实际应用。

令 Λ_{W_i} 和 Λ_{Z_i} 分别为维纳过程 W 和 Z 所对应风险的市场价格, 也即

$$dW_i^Q(t) = dW_i^P(t) - \Lambda_{W_i}(t) dt \quad (24)$$

$$dZ_i^Q(t) = dZ_i^P(t) - \Lambda_{Z_i}(t) dt \quad (25)$$

为了在概率测度转换过程中保持状态向量动态特性的仿射结构, 本文将风险的市场价格 Λ_{W_i} 和 Λ_{Z_i} 设定为如下广义仿射形式

$$\Lambda_{W_i}(t) = \frac{\lambda_{W_{j0}} + \lambda_{W_{ix}} x_i^{m,0}(t) + \lambda_{W_{iv}} v_i(t)}{\sqrt{v_i(t)}} \quad (26)$$

$$\Lambda_{Z_i}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{v_i}^2}} \times \frac{\lambda_{Z_{j0}} + \lambda_{Z_{iv}} v_i(t) - \rho_{v_i} (\lambda_{W_{j0}} + \lambda_{W_{ix}} x_i^{m,0}(t) + \lambda_{W_{iv}} v_i(t))}{\sqrt{v_i(t)}} \quad (27)$$

其中 $\lambda_{W_{j0}}, \lambda_{W_{ix}}, \lambda_{W_{iv}}$ 以及 $\lambda_{Z_{j0}}, \lambda_{Z_{iv}}$ 分别为市场风险价格 Λ_{W_i} 和 Λ_{Z_i} 的设定参数, 而状态变量 $x_i^{m,0}(t), v_i(t)$ 以及相关系数 ρ_{v_i} 如上文定义。

基于风险的市场价格的以上设定, 状态变量 $x_i^{m,0}(t)$ 和 $v_i(t)$ 在现实概率测度 P 下服从以下随机过程

$$dx_i^{m,0}(t) = (\eta_i^P + \kappa_{x_i}^P x_i^{m,0}(t) + \kappa_{xv}^P v_i(t)) dt + \sqrt{v_i(t)} dW_i^P(t) \quad (28)$$

$$dv_i(t) = \kappa_i^P (\theta_i^P - v_i(t)) dt + \sigma_{v_i} \sqrt{v_i(t)} (\rho_{v_i} dW_i^P(t) + \sqrt{1 - \rho_{v_i}^2} dZ_i^P(t)) \quad (29)$$

其中 $\eta_i^P = \lambda_{W_{j0}}, \kappa_{x_i}^P = \lambda_{W_{ix}} - \gamma_i, \kappa_{xv}^P = \lambda_{W_{iv}}, \kappa_i^P = \kappa_i - \sigma_{v_i} \lambda_{Z_{iv}}$ 以及 $\theta_i^P = \frac{\kappa_i \theta_i + \sigma_{v_i} \lambda_{Z_{j0}}}{\kappa_i^P}$, 参数 $\kappa_i, \theta_i, \sigma_{v_i}, \gamma_i$ 如上文定义, 且满足以下条件

$$2\kappa_i \theta_i \geq \sigma_{v_i}^2 \quad (30)$$

$$2\kappa_i^P \theta_i^P \geq \sigma_{v_i}^2 \quad (31)$$

由于辅助状态变量 $x_i^{m,g}(t)$ ($g = 1, 2, \dots, m$) 以及 $\phi_{ij}^{m,g}(t), \varphi_{ij}^{m,gknq}(t)$ 表达式中不显性含有随机驱动项, 故而概率测度的变换并不会改变其所

服从的随机过程的表达式。

3 基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计方法

Duffee 和 Stanton^[37] 通过对多种利率模型的估计方法进行比较指出, 基于卡尔曼滤波^[38] 的极大似然估计法是仿射期限结构模型的理想估计方法。另外, 卡尔曼滤波处理潜在状态变量问题的能力也令其适于刻画本文所构建的广义随机波动 HJM 框架下众多状态变量的动态特性。然而, 卡尔曼滤波只适用于线性模型系统, 而 HJM 框架在马尔科夫简化后仍存在非线性问题^[39]。对此, 扩展卡尔曼滤波^[40] 通过对模型线性化近似后再应用卡尔曼滤波, 但这在模型存在强非线性条件下会引起严重的系统偏差。此外, 广义 HJM 框架下随机波动率的引入会使得状态变量不再服从正态分布, 这与扩展卡尔曼滤波的正态分布假设相悖, 从而进一步增大基于扩展卡尔曼滤波估计法的系统偏差。

由于无损卡尔曼滤波^[41] 以 UT 变换为基础, 以采样所得的 Sigma 点直接估计模型的概率密度分布, 不仅避免了线性化误差, 显著改善估计精度, 还保留了模型原有的概率分布特征, 有利于更加客观地分析模型对于债券收益的拟合与预测能力。

鉴于此, 本节在上文对所构建模型进行有限维马尔科夫仿射实现基础上, 将模型进行状态空间表示, 进而引入基于无损卡尔曼滤波的极大似然法对模型进行估计, 以提高模型的估计精度以及债券收益的拟合与预测准确性。

模型的状态空间表示包含观测方程与状态方程, 其中观测方程给出了观测向量与状态向量之间的关系, 而状态方程则刻画了状态向量的变动过程。令到期收益率向量 $y_t = [y(t, \pi_1), y(t, \pi_2), \dots, y(t, \pi_p)]'$ 为观测向量, $X_t = [x_i^{m,g}(t), \phi_{ij}^{m,g}(t), \varphi_{ij}^{m,gknq}(t)]'$ 为状态向量, 二者之间关系由式(20)描述, 而式(28)、式(29)、式(15)~式(19)则刻画了 X_t 的变动过程。为简化起见, 本文设定状态空间模型的观测方程

与状态方程为如下形式

$$X_{t+1} = \Phi(X_t, \xi_{t+1}) \tag{32}$$

$$y_{t+1} = h(X_{t+1}) + e_{t+1} \tag{33}$$

其中式(32)为状态方程,是式(28)、式(29)、式(15)~式(19)的离散形式,状态噪声向量 $\xi_{t+1} \sim \text{iid}$. $E(\xi_{t+1}) = 0, \text{Var}(\xi_{t+1}) = P(X_t)$,但 ξ_{t+1} 并不服从正态分布.式(33)为观测方程,观测误差向量 $e_t \sim \text{iid}$. $N(0, Q)$.为降低模型参数维度,本文按照通常做法,假设各观测误差序列之间是截面不相关的,也即 Q 为对角线矩阵.另外,由于本文使用的无损卡尔曼滤波基于确定性采样(UT变换)来近似模型概率分布,因此不需要对模型进行线性化近似,也不要求观测方程和状态方程服从正态分布.

由于上文对广义随机波动 HJM 模型进行了马尔科夫仿射实现,也即状态向量 X_t 服从仿射扩散过程 $\Phi(X_t) = \Phi_0 + \Phi_X X_t$,因此 $P(X_t) = P_0 + \sum_{i=1}^N P_{v_i} v_{i,t}$,其中 $\Phi_0, \Phi_X, P_0, P_{v_i}$ 具体形式参见 Fisher 和 Gilles^[42].

按照通常做法,本文取状态向量的无条件均值 X_0 和无条件协方差 P_0 为其初值和初始条件协方差,则即可对式(32)和式(33)组成的状态空间模型运用无损卡尔曼滤波,从而基于观测误差产生待估参数向量 θ 的对数极大似然函数.其基本思路如下:

令 $\hat{X}_0 = X_0, \hat{P}_0 = P_0$,则状态向量和观测向量的预测方程为

$$\hat{X}_{t+1|t} = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m \Phi[\chi_i^x(t|t), \chi_i^\eta(t)] \tag{34}$$

$$\hat{y}_{t+1|t} = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m h[\chi_i^x(t+1|t), \chi_i^e(t+1)] \tag{35}$$

其中 L 为 t 时刻通过 UT 变换得到的 Sigma 点个数, $\chi_i^x, \chi_i^\eta, \chi_i^e$ 分别为第 i 粒子中对应状态向量、状态噪声向量、观测误差向量部分.具体细节参见 Julier 和 Uhlmann^[41].

状态向量和观测向量预测值的条件协方差分别为

$$P_{t+1|t} = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (\chi_i^x(t+1|t) - \hat{X}_{t+1|t}) \times (\chi_i^x(t+1|t) - \hat{X}_{t+1|t})' \tag{36}$$

$$P_{t+1|t}^e = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (y_{t+1|t}^i - \hat{y}_{t+1|t}) (y_{t+1|t}^i - \hat{y}_{t+1|t})' \tag{37}$$

其中 $P_{t+1|t}, P_{t+1|t}^e$ 分别为状态向量和观测向量预测值的条件协方差, W_i^m 和 W_i^c 分别为均值和协方差估计所用 Sigma 点权重,具体细节参见 Julier 和 Uhlmann^[41].此外, $y_{t+1|t}^i = h[\chi_i^x(t+1|t), \chi_i^e(t+1)]$.

令 \hat{e}_t 为观测误差项 e_t 的估计值,则有

$$\hat{e}_{t+1} = y_{t+1} - \hat{y}_{t+1|t} \tag{38}$$

由于无损卡尔曼滤波无需对非线性系统进行强制线性化,不会改变随机系统原有分布特性,因此可假定 \hat{e}_t 服从正态分布,其关于待估参数向量 θ 的对数似然函数具有如下形式

$$L_y(\theta) = -\frac{dJ}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} \ln |P_{t+1|t}^e| - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} \hat{e}_{t+1} (P_{t+1|t}^e)^{-1} e_{t+1} \tag{39}$$

其中 d 是观测向量的维数, J 为观测值个数.

通过极大化对数似然函数即可求出模型参数估计值,即

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} L_y(\theta) \tag{40}$$

由于随机系统的估计过程存在着系统稳定性、矩阵求导、最优估计方法收敛性以及估计值显著性等方面的困难,因此本文使用遗传算法^[43] (genetic algorithm) 来极大化对数似然函数以得到模型参数估计值,这是因为遗传算法作为一种全局寻优算法,与传统的优化算法相比,具有运算量小、普适性强、稳定性好以及可操作性强等优点.

4 实证结果

鉴于 Li 等^[20]所使用的传统 HJM 框架内含于本文使用的广义随机波动 HJM 框架^⑦,本文统一在广义随机波动 HJM 框架下对国债收益率的可预测性及其经济价值进行实证研究,并通过对比传统 HJM 框架和广义 HJM 框架下对应模型设定的表现进行比较,分析非马尔科夫性、随机波动性以及非涵盖随机波动因子在债券收益可预测性及其经济价值实现中的作用.

⑦ Li 等^[20]所使用的传统 HJM 框架属于本文所提出的广义随机波动 HJM 框架在波动率因子相互独立且均为确定性函数条件下的特例.

本节选取2002年1月至2017年1月期间1年期到5年期国债到期收益率的月度数据作为观测变量样本。与第1节中回归预测模型实证研究一致,本节仍将2002年1月到2009年12月期间国债收益率观测值作为样本期内数据,利用上文引入的基于无损卡尔曼滤波的极大似然法对广义HJM框架下不同设定的DTSM模型进行参数估计。在此基础上,以2010年1月到2017年1月期

间国债收益率观测值作为样本期外数据,用以检验各种设定下DTSM模型的样本期外国债收益率预测能力及其经济价值^⑧,并通过对比各种设定下模型的表现来分析非马尔科夫性、随机波动设定在债券收益可预测性及其经济价值实现中的作用。

为确定描述我国国债市场波动所需的波动因子个数,本文对所选取的国债到期收益率序列进行主成分分析,结果如表3所示。

表3 我国国债利率期限结构的主成分分析结果

Table 3 Result of principal component analysis for term structure of treasury bonds

主成分序号	特征值	解释比例	累计解释比例
1	9.269 059	0.926 9	0.926 9
2	0.661 588	0.066 2	0.993 1
3	0.048 836	0.004 9	0.997 9
4	0.009 425	0.000 9	0.998 9
5	0.004 382	0.000 4	0.999 3
6	0.002 875	0.000 3	0.999 6
7	0.002 301	0.000 2	0.999 8
8	0.000 768	0.000 1	0.999 9
9	0.000 669	0.000 1	1
10	9.63E -05	0	1

由表3所示,各期限到期收益率的变动可由前三个主成分进行解释,且解释比例达到了99.79%,表明我国国债收益率曲线主要由三个波动因子驱动,因此本文设定广义随机波动HJM框架的波动因子个数 $N=3$ 。如Li等^[20]所示,各波动率因子函数的多项式阶数之和 $\sum_{i=1}^N d_i - 1$ 即为随机状态变量个数。若随机状态变量个数等于波动因子个数,则模型为马尔科夫的;若随机状态变量个数大于波动因子个数,则模型即非马尔科夫的。为充分考虑模型的可能设定,与Li等^[20]一样,本文考察了随机状态变量个数至多为6的所有可能设定。为简便起见,按照Li等^[20]方法表示不同设定下的DTSM模型,并在前冠以 td 和 sv 来区分传统HJM框架和本文所提出的广义随机波动HJM框架。例如,用 $sv_{[1, 2, 3]}$ 表示广义HJM框架下三个波动率因子的多项式阶数分别为1阶、2阶、3阶的非马尔科夫DTSM模型。

4.1 最优模型选择

为了考察并比较不同设定下DTSM模型的表现,本文从模型设定、数据拟合、经济价值三方面指标对各种设定下的模型进行综合评价。首先,模型设定指标包含AIC、BIC、HIC以及对数似然值,主要反映的是基于样本期内数据对于模型设定与参数估计值合理性的统计评估,结果如表4所示。

由表4可以看到,作为最基础的基准设定,传统HJM框架下的马尔科夫DTSM模型设定 $td_{[1, 1]}$ 在模型设定指标方面表现良好,对数似然值达到了1931.161,而各信息准则指标AIC、BIC、HIC则分别为-39.878、-39.424、-39.695,在所有设定中处于较低水平。然而,在传统HJM框架下,随着随机状态变量个数设定的增加,对数似然值呈现持续上升趋势,而各信息准则指标AIC、BIC、HIC也随之不断降低。最终,模型设定指标在具有6个状态变量的设定 $td_{[1, 2, 3]}$ 处达

⑧ 为了便于比较,本文与Li等^[20]一样,始终将模型参数固定于样本期内估计值,以此来对模型进行严格的样本期外预测能力检验。

到最优,对数似然值达到了2 036.815,而各信息准则指标 AIC、BIC、HIC 则分别为 -42.017、-41.483、-41.801,以上指标相对于设定 $td_{[1,1,1]}$ 均有了显著改善.此时,随机状态变量个数远远超出波动因子个数,表明该设定下模型具有很强的非马尔科夫性.因此,以上结果证实了我国国债市场显著存在复杂的非马尔科夫性,与上文债券收益的回归预测模型的分析结果一致.

与传统 HJM 框架下情况类似,广义 HJM 框架下各模型设定指标随着随机状态变量个数设定的增加亦呈现持续改善趋势,并且也在具有6个状态变量的设定 $sv_{[1,2,3]}$ 处达到最优,对数似然值达到了 -2 144.914,而各信息准则指标 AIC、BIC、HIC 则分别为 -43.832、-42.736、-43.389.以上模型设定指标相对于传统 HJM 框架下的最优模型设定 $td_{[1,2,3]}$ 均有了显著改善,表明我国国债市场超额收益的动态特性中存在显著的随机波动特征,将其纳入到债券收益预测模型中是合理的,这也与上文债券收益的回归预测模型的分析结果一致.

其次,本文利用样本期内、样本期外的 R^2 和调整后的 R^2 来分别测度各模型设定对于债券超额收益的样本期内数据拟合优度、样本期外预测精度,结果如表5所示.

由表5可以看到,作为最基础的基准设定,传统 HJM 框架下的马尔科夫 DTSM 模型设定 $td_{[1,1,1]}$ 在数据拟合(预测)指标方面具有不错表现,样本期内的 R^2 和调整后的 R^2 分别达到了0.667和0.582,而样本期外的 R^2 和调整后的 R^2 也分别达到了0.606和0.506.然而,在传统 HJM 框架下,随着随机状态变量个数设定的增加,模型的数据拟合(预测)指标不断得到改善.最终,与模型设定指标情形一致,数据拟合(预测)指标也在具有6个状态变量的设定 $td_{[1,2,3]}$ 处达到最优,样本期内的 R^2 和调整后的 R^2 分别达到了0.704和0.610,而样本期外的 R^2 和调整后的 R^2 则分别达到了0.648和0.538.以上指标相对于设定 $td_{[1,1,1]}$ 均有了明显提升,表明非马尔科夫性的引入显著改善了模型的样本期内数据拟合优度与样本期外预测精度.

与传统 HJM 框架下情况类似,广义 HJM 框

架下各模型的数据拟合(预测)指标也随着随机状态变量个数设定的增加呈现持续改善趋势,并且同样在具有6个状态变量的设定 $sv_{[1,2,3]}$ 处达到最优,此时模型的样本期内 R^2 和调整后的 R^2 分别达到了0.863和0.730,而样本期外 R^2 和调整后的 R^2 则分别达到了0.789和0.587,以上指标相对于传统 HJM 框架下的最优模型设定 $td_{[1,2,3]}$ 均有了大幅提升.事实上,将广义 HJM 框架下各模型设定下的数据拟合(预测)指标与传统 HJM 框架下对应模型设定的指标进行横向比较即可发现,在绝大多数情况下,广义 HJM 框架下模型的数据拟合(预测)指标均显著优于传统 HJM 框架下对应模型,表明随机波动特征的引入进一步大幅提升了模型的样本期内数据拟合优度与样本期外预测精度.此外,无论在传统 HJM 框架还是广义 HJM 框架下,各模型设定的样本期外预测精度相对于样本期内数据拟合优度并不存在显著的落差,表明模型克服了回归预测模型所面临的过度拟合问题.

最后,本文利用样本期内、样本期外的风险调整后收益 $adj R_n$ 和投资累积收益 $cum R_n$ 来衡量不同模型设定下债券收益可预测性的经济价值,结果如表6所示.其中, $cum R_n_{total}$ 表示期末的投资累积收益.

由表6可以看到,作为最基础的基准设定,传统 HJM 框架下的马尔科夫 DTSM 模型设定 $td_{[1,1,1]}$ 在经济价值指标方面同样具有很好的表现,样本期内的风险调整后收益 $adj R_n$ 和期末投资累积收益 $cum R_n_{total}$ 分别达到了0.657和488,而样本期外的风险调整后收益 $adj R_n$ 和期末投资累积收益 $cum R_n_{total}$ 也分别达到了0.967和183.

与模型设定指标和数据拟合(预测)指标情形不尽相同的是,在传统 HJM 框架下,随着随机状态变量个数设定的增加,模型在风险调整后收益 $adj R_n$ 和期末投资累积收益 $cum R_n_{total}$ 两项经济价值指标上并没有得到一致的明显改善.作为传统 HJM 框架下表现最好的非马尔科夫模型设定 $td_{[1,2,3]}$,尽管其在样本期内、外期末投资累积收益 $cum R_n_{total}$ 方面相对于基准设定 $td_{[1,1,1]}$ 均有了一定改善,然而在样本期内、外风险调整后

表 4 模型设定指标

Table 4 Model performance on specification testing

类别	状态变量个数	波动率设定	传统 HJM 框架				广义 HJM 框架			
			AIC	BIC	HIC	对数似然值	AIC	BIC	HIC	对数似然值
马尔科夫	3	[1,1,1]	-39.878	-39.424	-39.695	1 931.161	-29.845	-28.830	-29.434	1 470.545
		[1,1,2]	-38.158	-37.677	-37.964	1 849.582	-42.226	-41.184	-41.805	2 065.850
		[1,2,1]	-38.067	-37.586	-37.873	1 845.231	-35.747	-34.705	-35.325	1 754.831
		[2,1,1]	-40.709	-40.228	-40.515	1 972.033	-32.660	-31.619	-32.239	1 606.695
非马尔科夫	4	[1,1,3]	-39.424	-38.917	-39.219	1 911.365	-36.987	-35.918	-36.555	1 815.362
		[1,2,2]	-40.378	-39.871	-40.173	1 957.150	-36.478	-35.409	-36.046	1 790.924
		[1,3,1]	-40.850	-40.343	-40.645	1 979.805	-38.018	-36.949	-37.586	1 864.842
		[2,1,2]	-39.065	-38.557	-38.860	1 894.113	-36.950	-35.881	-36.518	1 813.591
	5	[2,2,1]	-38.657	-38.150	-38.452	1 874.557	-36.312	-35.244	-35.880	1 782.987
		[3,1,1]	-39.038	-38.531	-38.833	1 892.834	-35.721	-34.653	-35.289	1 754.610
		[1,1,4]	-37.747	-37.212	-37.531	1 831.833	-42.772	-41.677	-42.329	2 094.044
		[1,2,3]	-42.017	-41.483	-41.801	2 036.815	-43.832	-42.736	-43.389	2 144.914
6	[1,3,2]	-41.937	-41.403	-41.721	2 032.979	-40.336	-39.240	-39.893	1 977.107	
	[1,4,1]	-39.208	-38.673	-38.992	1 901.971	-35.273	-34.177	-34.830	1 734.085	
	[2,1,3]	-36.093	-35.559	-35.877	1 752.473	-36.894	-35.799	-36.451	1 811.920	
	[2,2,2]	-40.270	-39.736	-40.054	1 952.963	-43.242	-42.147	-42.799	2 116.622	
	[2,3,1]	-38.940	-38.406	-38.724	1 889.120	-43.483	-42.388	-43.041	2 128.201	
	[3,1,2]	-38.942	-38.408	-38.726	1 889.235	-35.786	-34.691	-35.343	1 758.725	
	[3,2,1]	-37.646	-37.111	-37.430	1 826.994	-39.167	-38.072	-38.724	1 921.018	
	[4,1,1]	-38.890	-38.356	-38.674	1 886.740	-38.228	-37.132	-37.785	1 875.927	

表5 模型拟合指标
Table 5 Model performance on data fitting

类别	状态变量个数	波动率设定	传统 HJM 框架						广义 HJM 框架					
			样本期内			样本期外			样本期内			样本期外		
			R^2	adj R^2	R^2	adj R^2	R^2	adj R^2	R^2	adj R^2	R^2	adj R^2	R^2	adj R^2
马尔科夫	3	[1,1,1]	0.667	0.582	0.606	0.506	0.678	0.406	0.691	0.435	0.678	0.406	0.691	0.435
		[1,1,2]	0.109	-0.137	0.181	-0.043	0.754	0.536	0.692	0.424	0.754	0.536	0.692	0.424
		[1,2,1]	0.619	0.513	0.553	0.432	0.253	-0.410	0.314	-0.282	0.253	-0.410	0.314	-0.282
	4	[2,1,1]	0.559	0.437	0.531	0.403	0.722	0.475	0.687	0.416	0.722	0.475	0.687	0.416
		[1,1,3]	0.156	-0.094	0.239	0.017	0.288	-0.374	0.341	-0.258	0.288	-0.374	0.341	-0.258
		[1,2,2]	0.621	0.508	0.570	0.444	0.709	0.439	0.600	0.237	0.621	0.508	0.570	0.444
	5	[1,3,1]	0.680	0.585	0.623	0.512	0.633	0.292	0.576	0.190	0.680	0.585	0.623	0.512
		[2,1,2]	0.145	-0.109	0.221	-0.006	0.446	-0.070	0.452	-0.045	0.145	-0.109	0.221	-0.006
		[2,2,1]	0.109	-0.155	0.143	-0.107	0.766	0.548	0.656	0.342	0.109	-0.155	0.143	-0.107
		[3,1,1]	0.148	-0.105	0.231	0.006	0.238	-0.472	0.322	-0.295	0.148	-0.105	0.231	0.006
		[1,1,4]	0.571	0.434	0.527	0.380	0.844	0.691	0.790	0.589	0.571	0.434	0.527	0.380
		[1,2,3]	0.704	0.610	0.648	0.538	0.863	0.730	0.789	0.587	0.704	0.610	0.648	0.538
非马尔科夫	6	[1,3,2]	0.684	0.584	0.622	0.504	0.612	0.233	0.594	0.207	0.684	0.584	0.622	0.504
		[1,4,1]	0.096	-0.191	0.149	-0.117	0.489	-0.010	0.545	0.111	0.096	-0.191	0.149	-0.117
		[2,1,3]	0.105	-0.179	0.161	-0.101	0.387	-0.211	0.412	-0.149	0.105	-0.179	0.161	-0.101
	6	[2,2,2]	0.469	0.300	0.421	0.241	0.783	0.571	0.715	0.444	0.469	0.300	0.421	0.241
		[2,3,1]	0.135	-0.140	0.215	-0.031	0.767	0.539	0.711	0.435	0.135	-0.140	0.215	-0.031
		[3,1,2]	0.132	-0.143	0.216	-0.029	0.343	-0.299	0.370	-0.230	0.132	-0.143	0.216	-0.029
	6	[3,2,1]	0.077	-0.216	0.128	-0.144	0.297	-0.389	0.371	-0.228	0.077	-0.216	0.128	-0.144
		[4,1,1]	0.116	-0.164	0.187	-0.067	0.730	0.467	0.640	0.296	0.116	-0.164	0.187	-0.067

表 6 模型经济指标

Table 6 Model performance on economic gains

类别	状态变量个数	波动率设定	传统 HJM 框架				广义 HJM 框架				
			样本期内		样本期外		样本期内		样本期外		
			adj Rn	cum Rn_total	adj Rn	cum Rn_total	adj Rn	cum Rn_total	adj Rn	cum Rn_total	
马尔科夫	3	[1,1,1]	0.657	488	0.967	183	0.671	606	0.994	218	
		[1,1,2]	0.558	172	0.626	54	0.676	541	1.015	190	
		[1,2,1]	0.663	463	0.904	177	0.618	259	0.723	86	
	4	[2,1,1]	0.649	687	0.776	226	0.662	646	0.910	249	
		[1,1,3]	0.576	205	0.603	62	0.597	292	0.671	93	
		[1,2,2]	0.645	458	0.947	175	0.689	581	0.705	176	
	5	[1,3,1]	0.649	505	0.919	200	0.686	485	0.889	162	
		[2,1,2]	0.574	208	0.665	66	0.652	365	0.815	118	
		[2,2,1]	0.538	198	0.685	70	0.691	654	0.887	213	
	非马尔科夫	6	[3,1,1]	0.575	204	0.628	63	0.632	227	0.560	66
			[1,1,4]	0.653	457	0.843	182	0.685	628	0.997	236
			[1,2,3]	0.650	519	0.948	202	0.682	719	1.031	270
6		[1,3,2]	0.647	501	0.944	196	0.679	461	0.871	175	
		[1,4,1]	0.554	183	0.703	62	0.621	404	0.962	157	
		[2,1,3]	0.519	182	0.620	61	0.652	327	0.733	103	
6		[2,2,2]	0.633	372	0.949	140	0.680	565	0.985	207	
		[2,3,1]	0.564	194	0.616	60	0.655	553	0.994	210	
		[3,1,2]	0.559	187	0.584	56	0.645	304	0.810	103	
6	[3,2,1]	0.547	156	0.668	52	0.640	275	0.638	86		
	[4,1,1]	0.564	186	0.660	60	0.674	538	0.996	190		

收益 $adjRn$ 方面却稍劣于基准设定 $td_{[1,1,1]}$ 。以上结果表明,单独引入非马尔科夫性并不能令模型获得稳定超越基准设定的实际经济收益转化能力。此结论也体现在 Li 等^[20] 结果中部分国家市场上最优非马尔科夫模型设定在经济价值指标方面表现劣于基准设定 $td_{[1,1,1]}$ 上,例如新西兰债券市场。

反观在广义 HJM 框架下,各模型设定在经济价值指标方面的表现普遍较好。在马尔科夫设定下, $sv_{[1,1,1]}$ 相对于 $td_{[1,1,1]}$ 无论在样本期内还是样本期外,模型的风险调整后收益 $adjRn$ 和期末投资累积收益 $cumRn_{total}$ 均有了显著改善。事实上,在绝大多数情况下,广义 HJM 框架下的模型设定与传统 HJM 框架下对应模型设定相比,前者在样本期内、样本期外的经济价值指标均明显优于后者。以上结果表明,随机波动特征的引入显著提升了模型在样本期内、样本期外将债券收益可预测性转化为实际经济收益的能力。

在模型设定 $sv_{[1,1,1]}$ 基础上,随着额外随机状态变量的加入,非马尔科夫性被引入模型,且随着随机状态变量个数设定的增加,模型的经济价值指标不断得到提升,并最终在具有 6 个状态变量的设定 $sv_{[1,2,3]}$ 处达到最优。此时,模型样本期内的风险调整后收益 $adjRn$ 和期末投资累积收益 $cumRn_{total}$ 分别达到了 0.682 和 719,

而样本期外的风险调整后收益 $adjRn$ 和期末投资累积收益 $cumRn_{total}$ 则分别达到了 1.031 和 270,各指标相对于马尔科夫设定 $sv_{[1,1,1]}$ 均进一步大幅提升。

此外,为了排除期末时点选取对期末投资累积收益的影响,本文对比了广义 HJM 框架和传统 HJM 框架下的基准模型设定和最优模型设定在各时点上的投资累积收益 $cumRn$,如图 3 所示。由图 3 可以看到,在样本期内、样本期外的绝大多数时点上,传统 HJM 框架下的最优模型设定 $td_{[1,2,3]}$ 的投资累积收益 $cumRn$ 相对于基准模型设定 $td_{[1,1,1]}$ 并没有明显提升,而广义 HJM 框架下的基准模型设定 $sv_{[1,1,1]}$ 的投资累积收益 $cumRn$ 则相对于 $td_{[1,1,1]}$ 有了明显增加,表明模型中单独引入随机波动特征对于债券收益可预测性经济价值实现的提升作用,显著大于单独引入非马尔科夫性。而作为广义 HJM 框架下的最优模型设定 $sv_{[1,2,3]}$ 的投资累积收益 $cumRn$ 则在样本期内、外的绝大多数时点上均显著高于 $td_{[1,1,1]}$ 、 $td_{[1,2,3]}$ 和 $sv_{[1,1,1]}$ 三个模型设定,表明将非马尔科夫性与随机波动特征共同引入模型,可大大提升模型将债券收益可预测性转化为实际经济收益的能力,且改善幅度明显大于将非马尔科夫性或随机波动特征单独引入模型的情形。

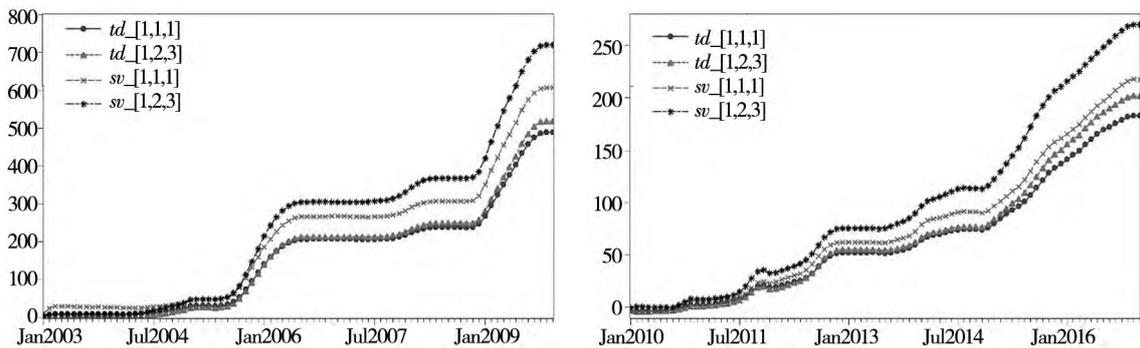


图 3 广义和传统 HJM 框架下基准和最优模型设定的投资累积收益对比

Fig. 3 Comparison among cumulative returns of benchmark and optimal specifications under generalized and traditional HJM framework

4.2 我国债券收益可预测性及其经济价值的来源分析

Cujean 和 Hasler^[44] 基于异质信念均衡模型进行分析指出,股票收益的可预测性来源于投资者关于经济不确定性的信念差异,且随着经济环境恶化,在经济不确定性高企同时投资者信念差

异随之极化,进而引起超额收益对于信息的反应更易被预测,因此股票收益的可预测性主要集中于经济下行时期。而 Sarno 等^[16]、Gargano 等^[18] 基于美国债券市场的实证研究表明,债券收益的可预测性也存在类似现象。

本文对于我国市场上债券收益可预测性及其

经济价值的来源进行分析,并确定其变动规律是否与美国市场一样,符合 Cujean 和 Hasler^[44] 的理论。为此,本文首先分析了我国债券收益可预测性及其经济价值随宏观经济运行情况的变动规律;其次,检验了时变性风险溢价对于债券超额收益预测的作用;最后,分析了非涵盖随机波动因子对于债券超额收益的可预测性及其经济价值实现的作用。

4.2.1 债券收益可预测性随宏观经济的变动规律

由 4.1 节分析结果可以看到,模型设定 $sv_{[1\ 2\ 3]}$ 在模型设定、数据拟合、经济价值三方面指标上均显著优于其他设定,因此确定其为最优模型设定,并将其作为我国债券收益可预测性及其经济价值来源的分析框架,相应参数估计结果如表 7 所示。

表 7 最优模型设定下参数估计结果

Table 7 Parameter estimates for the optimal model specification

$\rho_{1\ 2}$	$\rho_{1\ 3}$	$\rho_{2\ 3}$	$\alpha_{0\ 1}$	$\alpha_{0\ 2}$	$\alpha_{1\ 2}$	$\alpha_{0\ 3}$	$\alpha_{1\ 3}$	$\alpha_{2\ 3}$	γ_1
-0.470	0.548	0.466	-0.045	0.083	-0.350	-0.066	0.123	1.176	0.266
γ_2	γ_3	κ_1	κ_2	κ_3	θ_1	θ_2	θ_3	$\sigma_{v\ 1}$	$\sigma_{v\ 2}$
5.378	8.997	1.619	4.337	3.354	2.313	4.996	5.966	2.376	2.793
$\sigma_{v\ 3}$	$\rho_{v\ 1}$	$\rho_{v\ 2}$	$\rho_{v\ 3}$	$\lambda_{W\ 10}$	$\lambda_{W\ 20}$	$\lambda_{W\ 30}$	$\lambda_{W\ 1x}$	$\lambda_{W\ 2x}$	$\lambda_{W\ 3x}$
2.501	0.989	0.855	-0.861	-0.497	-1.474	-0.003	1.036	3.653	8.867
$\lambda_{W\ 1v}$	$\lambda_{W\ 2v}$	$\lambda_{W\ 3v}$	$\lambda_{Z\ 10}$	$\lambda_{Z\ 20}$	$\lambda_{Z\ 30}$	$\lambda_{Z\ 1v}$	$\lambda_{Z\ 2v}$	$\lambda_{Z\ 3v}$	f_∞
2.086	-0.059	-0.675	-1.389	-3.379	-4.852	-2.019	-6.854	-6.926	0.041

虽然目前已有众多研究从不同角度对我国经济周期进行了分析,但尚未形成权威统一的划分。鉴于此,本文以宏观经济景气指数(一致指数)来反映我国宏观经济的整体运行情况,数据来源于 WIND 数据库。同时,分别计算样本期内、外每个

样本点上的 R^2 值,也即在每个样本点上,利用该样本点及之前所有样本点上债券平均超额收益预测值来计算 R^2 ,以此反映累积预测精度。 R^2 随宏观经济景气指数变动的特征即反映了债券收益可预测性随宏观经济的变动规律,如图 4 所示。

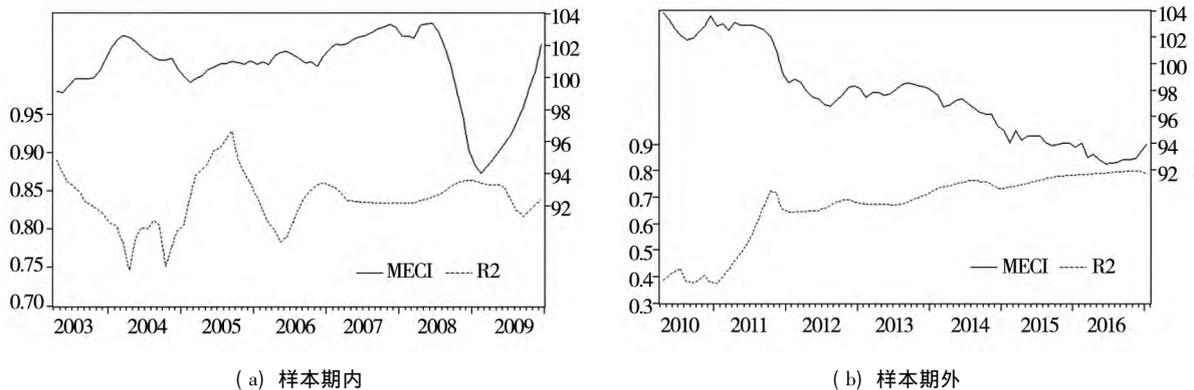


图 4 债券收益可预测性随宏观经济的变动趋势

Fig. 4 Dynamics of bond return predictability with the varying macroeconomy

由图 4 可以看到,无论在样本期内还是样本期外,债券超额收益的预测精度 R^2 均随着宏观经济景气指数 MECI 呈现反向变动趋势,此特征在样本期外尤其明显。 R^2 与 MECI 的相关系数在样本期内为 -0.286 ,而在样本期外更是高达 -0.877 ,且均在 1% 显著性水平下统计显著,表

明债券收益可预测性呈现显著的逆周期性特征。

鉴于政府对于宏观经济运行情况具有天然的信息优势,且其调控政策是在结合众多专家、智库观点等基础上对宏观经济运行做出的综合反应,因此本文以斯坦福大学 Bloom 教授、芝加哥大学 Davis 教授以及西北大学 Baker 教授联合发布的

中国经济政策不确定性指数(economic policy uncertainty EPU) 作为我国宏观经济运行情况的代理指标 ,数据来源于其官方网站: [http://www. pol-](http://www.policyuncertainty.com/china_monthly.html)

[icyuncertainty. com/china_monthly. html](http://www.policyuncertainty.com/china_monthly.html). 中国经济政策不确定性指数 EPU 随宏观经济景气指数 MECI 变动趋势如图 5 所示.

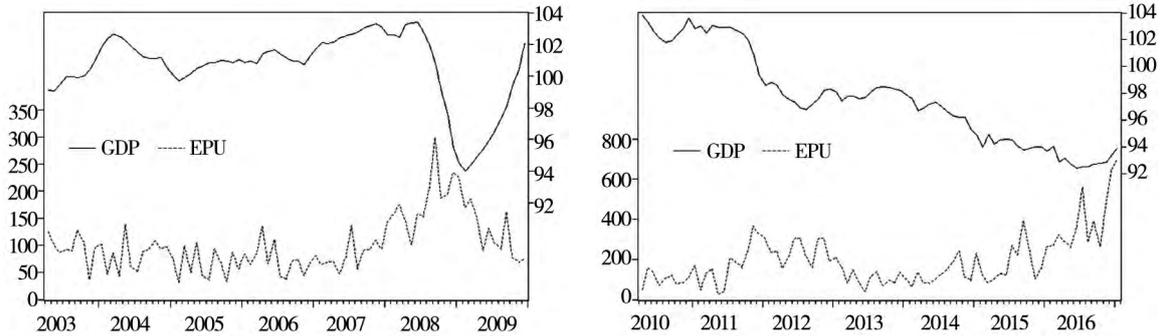


图5 经济不确定性随宏观经济的变动趋势

Fig. 5 Dynamics of economic uncertainty with the varying macroeconomy

由图 5 可以看到 ,无论在样本期内还是样本期外 ,中国经济政策不确定性指数 EPU 均随着宏观经济景气指数 MECI 呈现反向变动趋势 ,二者相关系数在样本期内、样本期外分别为 -0.357 、 -0.487 ,且均在 1% 显著性水平下统计显著 ,表明我国经济不确定性确实随着经济环境变差而增大 .结合上文分析得出的我国债券收益可预测性的逆周期性特征 ,显示我国市场上债券收益可预测性随宏观经济的变动规律符合 Cujean 和 Hasler^[44] 的理论阐释.

的夏普比率和风险溢价变动具有逆周期性特征 .而 Creal 和 Wu^[46] 则将时变的风险及风险价格同时引入基于消费的资产定价模型框架 ,并指出以上设定可解释债券风险溢价的逆周期性特征.

4. 2. 2 时变性风险溢价对于债券收益预测的作用

基于以上已有研究结果 ,若我国市场上债券收益可预测性主要来源于时变性风险溢价 ,那么应该有如下结论成立: 1) 夏普比率具有逆周期性特征; 2) 债券风险溢价预测值与经济增长负相关; 3) 债券风险溢价预测值与宏观经济风险正相关.

Cochrane^[26] 指出 ,债券收益可预测性可能主要来源于风险价格或风险自身变动造成的时变性风险溢价 .Wachter^[45] 构建了基于消费的利率期限结构模型 ,并将风险价格设定为时变的 ,通过研究指出债券

对于以上第 1) 条 ,本文分别计算样本期内、样本期外每个样本点上的风险调整后收益 $adj Rn$ 值 ,也即在每个样本点上 ,利用该样本点及之前所有样本点上债券超额收益预测值来计算 $adj Rn$,以此测度夏普比率的大小 . $adj Rn$ 随宏观经济景气指数变动的特征即反映了债券夏普比率随宏观经济的变动规律 ,如图 6 所示.

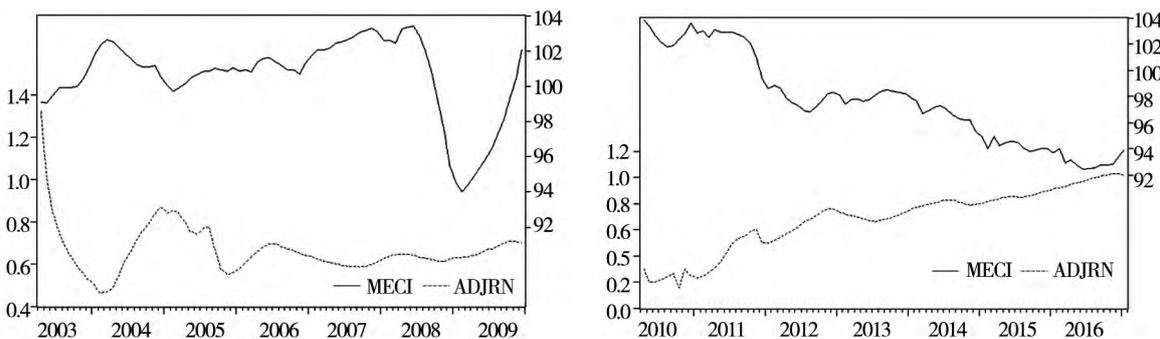


图6 债券夏普比率随宏观经济的变动趋势

Fig. 6 Dynamics of Sharpe ratio with the varying macroeconomy

由图 6 可以看到,无论在样本期内还是样本期外,adj Rn 均随着宏观经济景气指数 MECI 呈现反向变动趋势,此特征在样本期外尤其明显。adj Rn 与 MECI 的相关系数在样本期内为 -0.210,而在样本期外更是高达 -0.932,且均在 1% 显著性水平下统计显著,表明我国市场上债券夏普比率呈现显著的逆周期性特征,因此第 1) 条成立。

对于以上第 2) 和第 3) 条,本文分别计算了债券平均超额收益预测值与宏观经济景气指数 MECI、中国经济政策不确定性指数 EPU 的相关系数。其中,债券平均超额收益预测值与 MECI 的相关系数在样本期内、外分别为 -0.612、-0.602,且均在 1% 显著性水平下统计显著,表明债券风险溢价预测值与经济增长显著负相关,第 2) 条成立。债券平均超额收益预测值与 EPU 的相关系数在样本期内、样本期外分别为 0.225、0.397,且均在 1% 显著性水平下统计显著,表明债券风险溢价预测值与宏观经济风险显著正相关,第 3) 条成立。

综合以上分析,我国市场上债券收益可预测性主要来源于时变性风险溢价。

4.2.3 非涵盖随机波动因子对于债券收益预测的作用

由 4.1 节实证结果可以看到,随机波动因子的引入对于债券收益预测能力的提升具有显著作用,意味着随机波动因子含有未来债券收益的预测信息。而 Collin-Dufresne 和 Goldstein^[47] 指出,随机波动因子含有的信息无法由当期收益率曲线所涵盖。因此,我国债券市场存在非涵盖随机波动因子,且含有未来债券收益的预测信息。

由表 7 可以看到,随机波动因子 $v_i(t)$ 的增量与对应随机驱动因子 $dW_i^Q(t)$ 的相关系数 ρ_{v_i} ($i = 1, 2, 3$) 分别为 0.989、0.855、-0.861,故而随机波动因子 $v_i(t)$ 的增量与额外随机驱动因子 $dZ_i^Q(t)$ 的相关系数 $\sqrt{1 - \rho_{v_i}^2}$ ($i = 1, 2, 3$) 则分别为 0.148、0.519、0.509,表明额外随机驱动因子 $dZ_i^Q(t)$ 对于随机波动因子 $v_i(t)$ 的变动具有显著影响,也即显著存在非涵盖随机波动因子。

为了分析非涵盖随机波动因子对于债券超额

收益可预测性的影响,本文首先基于模型设定 $sv_{-}[1, 2, 3]$ 的参数估计值分离出了随机波动因子 $v_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 的估计值,然后将其关于利率期限结构的三个主成分因子 pc_1 、 pc_2 、 pc_3 做回归,所得残差即可作为非涵盖随机波动因子的测度指标,分别记为 usf_1 、 usf_2 、 usf_3 ,其动态特性如图 7 所示。

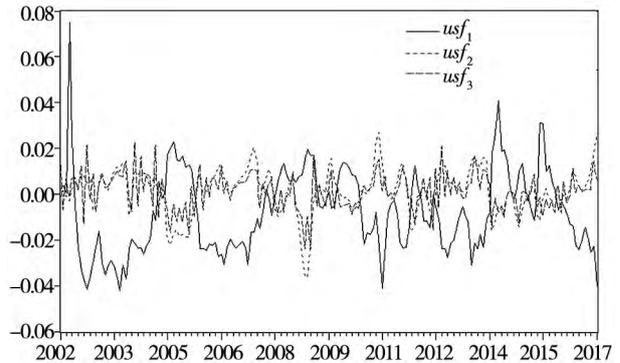


图 7 非涵盖随机波动因子的动态特性

Fig. 7 Dynamics of unspanned stochastic volatility factors

注:其中实线、点线、间断线分别表示非涵盖随机波动因子 usf_1 、 usf_2 、 usf_3 的动态特性。

在分离出非涵盖随机波动因子基础上,本文以债券超额收益 \bar{r}_{t+1} 为因变量,以非涵盖随机波动因子 usf_1 、 usf_2 、 usf_3 为自变量,以利率期限结构的主成分因子 pc_1 、 pc_2 、 pc_3 为控制变量,建立债券超额收益关于非涵盖随机波动因子的多元线性回归模型,如式(41)所示

$$\bar{r}_{t+1} = c + \alpha_1 usf_{1,t} + \alpha_2 usf_{2,t} + \alpha_3 usf_{3,t} + \beta_1 pc_{1,t} + \beta_2 pc_{2,t} + \beta_3 pc_{3,t} + \varepsilon_{t+1} \quad (41)$$

基于式(41)的多元回归模型,本文对非涵盖随机波动因子对于债券超额收益的解释和预测能力进行分析,结果如表 8 所示。

由表 8 可以看到,模型 2 相对于模型 1 增加了非涵盖随机波动因子 usf_1 、 usf_2 、 usf_3 ,虽然只有 usf_1 在 1% 水平下统计显著,但模型 2 更低的信息准则取值表明非涵盖随机波动因子的引入是合理的。又从数据拟合指标来看,模型 2 的 R^2 取值由模型 1 的 0.556 上升至 0.588,表明非涵盖随机波动因子的引入在统计上改善了模型对于债券超额收益的预测能力。更为重要的是,从经济价值指标来看,模型 2 的风险调整后收益 adj Rn 和期末

累积收益 $cum Rn_total$ 分别由模型 1 的 0.552 和 613 显著提升至 0.576 和 642, 表明非涵盖随机波动因子的引入有助于将债券超额收益的可预测性转化为实际的经济收益.

表 8 债券超额收益关于非涵盖随机波动因子的回归结果

Table 8 Regression result of bond excess return on unspanned stochastic volatility factors

	模型 1	模型 2
c	-0.097 *** (0.008)	-0.098 *** (0.008)
usf_1		0.059 *** (0.018)
usf_2		-0.007 (0.018)
usf_3		0.034 (0.048)
pc_1	0.964 *** (0.068)	0.969 *** (0.066)
pc_2	-0.893 *** (0.241)	-0.912 *** (0.234)
pc_3	-0.266 (0.858)	-0.236 (0.834)
R^2	0.556	0.588
$adjR^2$	0.548	0.573
Prob(F-statistic)	0.000	0.000
AIC	-5.439	-5.478
BIC	-5.365	-5.348
HIC	-5.409	-5.425
$adjRn$	0.552	0.576
$cumRn_total$	613	642

注: 括弧中数字为相应系数估计值的标准误(standard error), ***, **, * 分别表示相应系数估计值在 1%、5%、10% 水平下统计显著.

5 结束语

债券收益的可预测性及其经济价值的实现一直是学术界和业界关注的热点问题,然而迄今众多研究尚未形成一致结论. 本文首先利用债券超额收益回归模型检验了我国市场债券收益的可预测性及其经济价值实现的可行性,并分析了债券收益的非马尔科夫性和随机波动特征. 在此基础上,基于广义随机波动 HJM 框架提出了非马尔科夫 DTSM 模型的系统构建方法,并将非涵盖随机波动因子引入模型,进而基于一类特定波动结构设定对模型进行有限维马尔科夫仿射实现. 然后,

通过将所构建的广义 HJM 框架与传统 HJM 框架下模型设定相对比,分析了非马尔科夫性和随机波动性对于债券超额收益的可预测性及其经济价值实现的作用. 最后,考察了我国市场上债券收益可预测性及其经济价值的来源,得到以下结论.

首先,基于债券超额收益回归模型检验了我国市场债券收益可预测性在统计上和经济上的显著性,并分析了债券收益的非马尔科夫性及其在预测债券收益中的重要作用. 在此基础上,进一步分析债券收益动态特性中的随机波动特征. 实证结果表明,我国市场债券超额收益的可预测性具有很强的统计显著性,且可以转化为显著的实际

经济收益.而在此过程中,债券收益的非马尔科夫性具有重要作用.此外,我国市场债券超额收益的动态特性存在显著的随机波动特征.然而,由于缺乏经济理论支撑,债券收益的回归预测模型无法有效刻画债券收益的复杂非马尔科夫性和随机波动特征.

其次,基于具有相关波动因子的广义随机波动HJM框架,本文提出了具有随机波动率以及非涵盖风险因子的非马尔科夫DTSM模型的系统构建方法,并基于我国债券市场数据将其与Li等^[20]提出的非马尔科夫DTSM模型框架进行实证比较.结果表明,本文将非马尔科夫性、随机波动特征以及波动因子相关性纳入到非马尔科夫DTSM模型框架中是合理的,令扩展后的模型框架在模型设定、数据拟合、经济价值三个方面均显著优于Li等^[20]的模型框架.

再次,本文一方面分别在传统HJM框架与广义HJM框架下分析了各模型设定的表现随着随机状态变量个数的变化,发现非马尔科夫性的引入可以显著改善模型的样本期内数据拟合优度与

样本期外预测精度,但是单独引入非马尔科夫性并不能令模型获得稳定超越基准设定的实际经济收益转化能力.另一方面,将广义HJM框架与传统HJM框架下对应模型设定的表现进行对比,发现随机波动特征的引入在模型设定、数据拟合、经济价值三方面均显著改善了模型的表现.而将随机波动特征与非马尔科夫性共同引入模型,可大大提升模型预测债券收益并转化为实际经济收益的能力,且改善幅度明显大于将非马尔科夫性或随机波动特征单独引入模型的情形.

最后,本文基于最优模型设定考察了我国市场上债券收益可预测性及其经济价值的来源,发现受宏观经济环境驱动的时变性风险溢价是我国市场上债券收益可预测性的主要来源,因而使得债券收益可预测性呈现显著的逆周期性特征,其变动规律符合Cujean和Hasler^[44]的理论阐释.同时,非涵盖随机波动因子也显著含有未来债券收益的预测信息,不仅在统计上改善了模型对于债券超额收益的预测能力,还有助于将其转化为实际的经济收益.

参考文献:

- [1] Fama E F, Bliss R R. The information in long-maturity forward rates [J]. *The American Economic Review*, 1987, 1: 680 - 692.
- [2] Campbell J Y, Shiller R J. Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view [J]. *The Review of Economic Studies*, 1991, 58(3): 495 - 514.
- [3] Cochrane J H, Piazzesi M. Bond risk premia [J]. *American Economic Review*, 2005, 95(1): 138 - 160.
- [4] 范龙振, 王晓丽. 上交所国债市场利率期限结构及其信息价值 [J]. *管理工程学报*, 2004, 18(1): 72 - 75.
Fan Longzhen, Wang Xiaoli. Interest rate term-structure and its information value for predicting T-bonds returns in the SSE [J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2004, 18(1): 72 - 75. (in Chinese)
- [5] 王安兴, 余文龙. 收益曲线预测国债风险溢价研究 [J]. *中国管理科学*, 2012, 20(1): 417 - 423.
Wang Anxing, Yu Wenlong. Empirical studies of the predictability of China bond market risk premium [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2012, 20(1): 417 - 423. (in Chinese)
- [6] 杨宝臣, 张 涵. 中国债券市场时变风险溢价——远期利率潜在信息 [J]. *管理科学*, 2016, 29(6): 2 - 16.
Yang Baochen, Zhang Han. Time-varying risk premia in Chinese bond market: Latent information in the forward rates [J]. *Journal of Management Science*, 2016, 29(6): 2 - 16. (in Chinese)
- [7] Ludvigson S C, Ng S. Macro factors in bond risk premia [J]. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(12): 5027 - 5067.
- [8] Zhou G, Zhu X. Unspanned Global Macro Risks in Bond Returns [R]. Working Paper, St. Louis: Washington University, 2017.
- [9] Portilla K G. Essays on Bond Return Predictability and Liquidity Risk [D]. Toulouse: Université de Toulouse I, 2015.

- [10] Almeida C , Graveline J J , Joslin S. Do interest rate options contain information about excess returns? [J]. *Journal of Econometrics* , 2011 , 164(1) : 35 – 44.
- [11] Lin H , Wu C , Zhou G. Forecasting corporate bond returns with a large set of predictors: An iterated combination approach [J]. *Management Science* , 2018 , 64(9) : 4218 – 4238.
- [12] 范龙振 , 张 处. 中国债券市场债券风险溢酬的宏观因素影响分析 [J]. *管理科学学报* , 2009 , 12(6) : 116 – 124.
Fan Longzhen , Zhang Chu. Explanation of macroeconomic variables on bond risk premia in China [J]. *Journal of Management Sciences in China* , 2009 , 12(6) : 116 – 124. (in Chinese)
- [13] 郑振龙 , 廖木英 , 陈 蓉 , 等. 潜藏因子的信息含量: 来自中国国债市场的证据 [J]. *系统工程理论与实践* , 2016 , 36(1) : 44 – 54.
Zheng Zhenlong , Liao Muying , Chen Rong , et al. Information content of the hidden factor: Evidence from the China’s treasury bond market [J]. *Systems Engineering: Theory and Practice* , 2016 , 36(1) : 44 – 54. (in Chinese)
- [14] Duffee G R. Information in (and not in) the term structure [J]. *Review of Financial Studies* , 2011 , 24(9) : 2895 – 2934.
- [15] Thornton D L , Valente G. Out-of-sample predictions of bond excess returns and forward rates: An asset allocation perspective [J]. *Review of Financial Studies* , 2012 , 25(10) : 3141 – 3168.
- [16] Sarno L , Schneider P , Wagner C. The economic value of predicting bond risk premia [J]. *Journal of Empirical Finance* , 2016 , 37: 247 – 267.
- [17] Zhu X. Out-of-sample bond risk premium predictions: A global common factor [J]. *Journal of International Money and Finance* , 2015 , 51: 155 – 173.
- [18] Gargano A , Pettenuzzo D , Timmermann A. Bond return predictability: Economic value and links to the macroeconomy [J]. *Management Science* , 2017 , 63(9) : 1 – 33.
- [19] Feunou B , Fontaine J S. Bond risk premia and gaussian term structure models [J]. *Management Science* , 2018 , 64(3) : 1413 – 1439.
- [20] Li H , Ye X , Yu F. A Unified HJM Approach to Non-Markov Gaussian Dynamic Term Structure Models: International Evidence [R]. Working Paper , Ann Arbor: University of Michigan , 2016.
- [21] Heath D , Jarrow R , Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation [J]. *Econometrica* , 1992 , 60(1) : 77 – 105.
- [22] Cochrane J H , Piazzesi M. Appendix to “Bond risk premia” [R]. Working Paper , Chicago: University of Chicago , 2006.
- [23] Tchuindjo L. An extended Heath-Jarrow-Morton risk-neutral drift [J]. *Applied Mathematics Letters* , 2009 , 22(3) : 396 – 400.
- [24] Trolle A B , Schwartz E S. A general stochastic volatility model for the pricing of interest rate derivatives [J]. *Review of Financial Studies* , 2009 , 22(5) : 2007 – 2057.
- [25] 杨宝臣 , 苏云鹏. 具有相关波动因子的广义随机波动 HJM 模型 [J]. *管理科学学报* , 2011 , 14(9) : 77 – 85.
Yang Baochen , Su Yunpeng. Generalized Heath-Jarrow-Morton model with stochastic volatility and correlated factors [J]. *Journal of Management Sciences in China* , 2011 , 14(9) : 77 – 85. (in Chinese)
- [26] Cochrane J H. *Financial Markets and the Real Economy-Handbook of the Equity Premium* [M]. Amsterdam: Elsevier , 2007.
- [27] Andersen T G , Lund J. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate [J]. *Journal of Econometrics* , 1997 , 77(2) : 343 – 377.
- [28] Ball C A , Torous W N. The stochastic volatility of short-term interest rates: Some international evidence [J]. *Journal of Finance* , 1999 , 54(6) : 2339 – 2359.
- [29] Jarrow R , Li H , Zhao F. Interest rate caps ‘smile’ too! But can the LIBOR market models capture the smile? [J]. *Journal of Finance* , 2007 , 62: 345 – 382.
- [30] Trolle A B , Schwartz E S. A general stochastic volatility model for the pricing of interest rate derivatives [J]. *Review of Fi-*

- nancial Studies ,2009 ,22(5) : 2007 – 2057.
- [31]Ritchken P ,Sankarasubramanian L. Volatility structures of forward rates and the dynamics of the term structure[J]. Mathematical Finance ,1995 ,5(1) : 55 – 72.
- [32]Inui K ,Kijima M. A Markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis ,1998 ,33(3) : 423 – 440.
- [33]Björk T ,Svensson L. On the existence of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models[J]. Mathematical Finance ,2001 ,11(2) : 205 – 243.
- [34]Chiarella C ,Kwon O. Finite dimensional affine realisations of HJM models in terms of forward rates and yields[J]. Review of Derivatives Research ,2003 ,6(2) : 129 – 155.
- [35]de Jong F ,Santa-Clara P. The dynamics of the forward interest rate curve: A formulation with state variables[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis ,1999 ,34(1) : 131 – 157.
- [36]Cheredito P ,Filipovic D ,Kimmel R. Market price of risk specifications for affine models: Theory and evidence[J]. Journal of Financial Economics ,2007 ,83(1) : 123 – 170.
- [37]Duffee G R ,Stanton R H. Estimation of dynamic term structure models[J]. Quarterly Journal of Finance ,2012 ,2(2) : 1 – 51.
- [38]Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Transaction of the ASME: Journal of Basic Engineering ,1960 ,82(D) : 35 – 45.
- [39]Chiarella C ,Hung H ,Tò T D. The volatility structure of the fixed income market under the HJM framework: A nonlinear filtering approach[J]. Computational Statistics & Data Analysis ,2009 ,53(6) : 2075 – 2088.
- [40]Bucy R S ,Renne K D. Digital synthesis of nonlinear filters[J]. Automatica ,1971 ,7(3) : 287 – 289.
- [41]Julier S J ,Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear system[J]. The Proc of Aerospace ,1997 ,87(2) : 54 – 65.
- [42]Fisher M ,Gilles C. Estimating Exponential-Affine Models of the Term Structure[R]. Atlanta: Working Paper ,Federal Reserve Board ,1996.
- [43]Holland J. Adaptation in Natural and Artificial Systems[M]. Ann Arbor: The University of Michigan Press ,1975.
- [44]Cujean J ,Hasler M. Why does return predictability concentrate in bad times? [J]. Journal of Finance ,2017 ,72(6) : 2717 – 2758.
- [45]Wachter J A. A consumption-based model of the term structure of interest rates[J]. Journal of Financial Economics ,2006 ,79(2) : 365 – 399.
- [46]Creal D D ,Wu J C. Bond Risk Premia in Consumption-Based Models[R]. Working Paper ,Chicago: University of Chicago ,2017.
- [47]Collin-Dufresne P ,Goldstein R S. Do bonds span the fixed income markets? Theory and evidence for unspanned stochastic volatility[J]. Journal of Finance ,2002 ,57(4) : 1685 – 1730.

Bond return predictability and its economic value in Chinese market

SU Yun-peng¹ , YANG Bao-chen¹ , ZHOU Fang-zhao²

1. College of Management and Economics , Tianjin University , Tianjin 300072 , China;

2. School of Business , Jiangnan University , Wuxi 214122 , China

Abstract: Bond return predictability and its economic value have always been a hot but controversial topic. Using regression models , this paper examines both the statistical and economic significance of bond return pre-

dictability in Chinese markets , and analyzes the non-Markov and stochastic volatility properties of bond yields. On the basis of the above analysis , a systematic method is proposed for constructing non-Markov dynamic term structure models (DTSMs) under a generalized Heath-Jarrow-Morton (HJM) framework with stochastic volatility , which is then used to investigate the roles of the non-Markov property and stochastic volatility in bond return predictability and its economic gains realizing. Finally , this paper analyzes the economic drivers of bond return predictability. Empirical results show that bond return predictability in Chinese markets is statistically significant , which can also be converted into significant economic gains. The non-Markov property and stochastic volatility are of critical importance in the converting. Moreover , time-varying risk premia driven by the economic environment are the main sources of the bond return predictability in Chinese markets , while unspanned stochastic volatility factors also contain much information for future bond returns.

Key words: bond return predictability; Heath-Jarrow-Morton framework; non-Markov; stochastic volatility; unspanned risk factor

附录 A

基于式(9)中波动率结构设定,利用式(8)可知式(6)及式(7)所定义的广义随机波动 HJM 模型的漂移项为

$$\mu(t, \tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \sqrt{v_i(t) v_j(t)} p_{d_i}(\tau) e^{-\gamma_i \tau} \int_0^\tau p_{d_j}(s) e^{-\gamma_j s} ds \tag{A.1}$$

由分部积分法,可知

$$\int p_{d_j}(s) e^{-\gamma_j s} ds = \frac{1}{(-\gamma_j)} p_{d_j}(s) e^{-\gamma_j s} - \int \frac{1}{(-\gamma_j)} p_{d_j}^{(1)}(s) e^{-\gamma_j s} ds \tag{A.2}$$

同上,对式(A.2)右侧积分项连续应用分部积分法,整理,可得

$$\int p_{d_j}(s) e^{-\gamma_j s} ds = - \sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} p_{d_j}^{(k-1)}(s) e^{-\gamma_j s} \tag{A.3}$$

故而有

$$\int_0^\tau p_{d_j}(s) e^{-\gamma_j s} ds = - \sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} p_{d_j}^{(k-1)}(s) e^{-\gamma_j s} \Big|_0^\tau \tag{A.4}$$

也即

$$\int_0^\tau p_{d_j}(s) e^{-\gamma_j s} ds = \sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} [(k-1)! \alpha_{k-1, j} - p_{d_j}^{(k-1)}(\tau) e^{-\gamma_j \tau}] \tag{A.5}$$

将式(A.5)代入式(A.1),可得

$$\mu(t, \tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \sqrt{v_i(t) v_j(t)} p_{d_i}(\tau) e^{-\gamma_i \tau} \left\{ \sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} [(k-1)! \alpha_{k-1, j} - p_{d_j}^{(k-1)}(\tau) e^{-\gamma_j \tau}] \right\} \tag{A.6}$$

也即

$$\mu(t, \tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} \rho_{ij} \sqrt{v_i(t) v_j(t)} p_{d_i}(\tau) e^{-\gamma_i \tau} [(k-1)! \alpha_{k-1, j} - p_{d_j}^{(k-1)}(\tau) e^{-\gamma_j \tau}] \tag{A.7}$$

由式(A.7)可得

$$\int_0^t \mu(s, T-s) ds = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} \rho_{ij} \int_0^t \sqrt{v_i(s) v_j(s)} [(k-1)! \alpha_{k-1, j} p_{d_i}(T-s) e^{-\gamma_i(T-s)} - p_{d_i}(T-s) p_{d_j}^{(k-1)}(T-s) e^{-(\gamma_i + \gamma_j)(T-s)}] ds \tag{A.8}$$

由 $T-s = \tau + (t-s)$, 式(A.8)可改写为

$$\int_0^t \mu(s, T-s) ds = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \int_0^t \sqrt{v_i(s) v_j(s)} \sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} [(k-1)! \alpha_{k-1, j} p_{d_i}(\tau + (t-s)) e^{-\gamma_i \tau} e^{-\gamma_j(t-s)} -$$

$$P_{d_i}(\tau + (t - s)) P_{d_j}^{(k-1)}(\tau + (t - s)) e^{-(\gamma_i + \gamma_j)\tau} e^{-(\gamma_i + \gamma_j)(t-s)} ds \tag{A.9}$$

将 $P_{d_i}(\tau) = \alpha_{0,i} + \alpha_{1,i}\tau + \dots + \alpha_{d_i-1,i}\tau^{d_i-1}$ 代入式 (A.9) 整理可得

$$\int_0^t \mu(s, T - s) ds = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \int_0^t \sqrt{v_i(s) v_j(s)} e^{-\gamma_i \tau} e^{-\gamma_j(t-s)} \sum_{m=0}^{d_i-1} \alpha_{m,i} \sum_{g=0}^m \binom{m}{g} \tau^{m-g} (t-s)^g \times$$

$$\left\{ \sum_k^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} \left[(k-1)! \alpha_{k-1,j} - e^{-\gamma_j \tau} e^{-\gamma_j(t-s)} \sum_{n=0}^{d_j-k} \frac{(n+k-1)!}{n!} \alpha_{n+k-1,j} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} \tau^{n-q} (t-s)^q \right] \right\} ds \tag{A.10}$$

对式 (A.10) 展开并整理, 可得

$$\int_0^t \mu(s, T - s) ds = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \rho_{ij} \binom{m}{g} \left(\sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} (k-1)! \alpha_{k-1,j} \right) \alpha_{m,i} \tau^{m-g} e^{-\gamma_i \tau} \int_0^t \sqrt{v_i(s) v_j(s)} (t-s)^g e^{-\gamma_j(t-s)} ds +$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \sum_{k=1}^{d_j} \sum_{n=0}^{d_j-k} \sum_{q=0}^n \left(-\frac{1}{\gamma_j^k} \right) \rho_{ij} \binom{m}{g} \binom{n}{q} \frac{(n+k-1)!}{n!} \alpha_{m,n+k-1,j} \tau^{m+n-g-q} e^{-(\gamma_i + \gamma_j)\tau} \int_0^t \sqrt{v_i(s) v_j(s)} (t-s)^{g+q} e^{-\gamma_j(t-s)} ds \tag{A.11}$$

同时, 对远期利率的波动项进行积分, 可得

$$\int_0^t \sigma_{f,i}(s, T - s) \sqrt{v_i(s)} dW_i^Q(s) = \int_0^t P_{d_i}(T - s) e^{-\gamma_i(T-s)} \sqrt{v_i(s)} dW_i^Q(s) \tag{A.12}$$

将式 (9) 代入式 (A.12), 计算并整理, 可得

$$\int_0^t \sigma_{f,i}(s, T - s) \sqrt{v_i(s)} dW_i^Q(s) = \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \binom{m}{g} \alpha_{m,i} \tau^{m-g} e^{-\gamma_i \tau} \int_0^t \sqrt{v_i(s)} (t-s)^g e^{-\gamma_i(t-s)} dW_i^Q(s) \tag{A.13}$$

由式 (6) 可知, 远期利率动态特性满足

$$f(t, \tau) = f(0, t + \tau) + \int_0^t \mu(s, T - s) ds + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_{f,i}(s, T - s) \sqrt{v_i(s)} dW_i^Q(s) \tag{A.14}$$

则由式 (A.11)、式 (A.13) 可知, 远期利率曲线可表示为

$$f(t, \tau) = f(0, T) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m B_{x_i}^{m,g}(T-t) x_i^{m,g}(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m B_{\phi_{i,j}}^{m,g}(T-t) \phi_{i,j}^{m,g}(t) +$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \sum_{k=1}^{d_j} \sum_{n=0}^{d_j-k} \sum_{q=0}^n B_{\varphi_{i,j}}^{m,g,k,n,q}(T-t) \varphi_{i,j}^{m,g,k,n,q}(t) \tag{A.15}$$

其中 $B_{x_i}^{m,g}(T-t)$, $B_{\phi_{i,j}}^{m,g}(T-t)$, $B_{\varphi_{i,j}}^{m,g,k,n,q}(T-t)$ 由式 (11) ~ 式 (13) 定义, 且有

$$x_i^{m,g}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(s)} (t-s)^g e^{-\gamma_i(t-s)} dW_i^Q(s) \tag{A.16}$$

$$\phi_{i,j}^{m,g}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(s) v_j(s)} (t-s)^g e^{-\gamma_j(t-s)} ds \tag{A.17}$$

$$\varphi_{i,j}^{m,g,k,n,q}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(s) v_j(s)} (t-s)^{g+q} e^{-(\gamma_i + \gamma_j)(t-s)} ds \tag{A.18}$$

对式 (A.16) ~ 式 (A.18) 应用伊藤定理进行微分即可得式 (14) ~ 式 (19)。

命题得证。

证毕。

附录 B

本文借鉴 de Jong 和 Santa-Clara^[35]、Trolle 和 Schwartz^[28]、Li 等^[20] 的做法, 以 $f_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(0, t + \tau)$ 来替换式 (10) 中的

$f(0, t + \tau)$ 则在命题 1 基础上利用到期收益率 $y(t, \tau)$ 与瞬时远期利率 $f(t, \tau)$ 关系式 $y(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t, u) du$ 可得

$$y(t, \tau) = f_\infty + \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \frac{1}{\tau} \left(\int_0^\tau B_{x_i}^{m,g}(u) du \right) x_i^{m,g}(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \frac{1}{\tau} \left(\int_0^\tau B_{\phi_{i,j}}^{m,g}(u) du \right) \phi_{i,j}^{m,g}(t) +$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{d_i-1} \sum_{g=0}^m \sum_{k=1}^{d_j} \sum_{n=0}^{d_j-k} \sum_{q=0}^n \frac{1}{\tau} \left(\int_0^\tau B_{\varphi_{i,j}}^{m,g,k,n,q}(u) du \right) \varphi_{i,j}^{m,g,k,n,q}(t) \tag{B.1}$$

令 $C_{x_i}^m g(\tau) = \frac{1}{\tau} \left(\int_0^\tau B_{x_i}^m g(u) du \right)$, $C_{\phi_{ij}}^m g(\tau) = \frac{1}{\tau} \left(\int_0^\tau B_{\phi_{ij}}^m g(u) du \right)$, $C_{\varphi_{ij}}^m gknq(\tau) = \frac{1}{\tau} \left(\int_0^\tau B_{\varphi_{ij}}^m gknq(u) du \right)$, 则由式 (11) ~ 式 (13) 可知

$$C_{x_i}^m g(\tau) = \binom{m}{g} \alpha_{m_i} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u^{m-g} e^{-\gamma_i u} du \quad (\text{B.2})$$

$$C_{\phi_{ij}}^m g(\tau) = \rho_{ij} \binom{m}{g} \left(\sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} (k-1)! \alpha_{k-1j} \right) \alpha_{m_i} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u^{m-g} e^{-\gamma_j u} du \quad (\text{B.3})$$

$$C_{\varphi_{ij}}^m gknq(\tau) = -\frac{1}{\gamma_j} \rho_{ij} \binom{m}{g} \binom{n}{q} \frac{(n+k-1)!}{n!} \alpha_{m_i} \alpha_{n+k-1j} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u^{m+n-g-q} e^{-(\gamma_i+\gamma_j)u} du \quad (\text{B.4})$$

分别计算式 (B.2) ~ 式 (B.4) 中积分, 可得

$$C_{x_i}^m g(\tau) = \binom{m}{g} \alpha_{m_i} \frac{1}{\tau} \left(e^{-\gamma_i \tau} \sum_{l=0}^{m-g} (-1)^l \frac{(m-g)!}{(m-g-l)!} \cdot \frac{\tau^{m-g-l}}{(-\gamma_i)^{l+1}} \right) \Big|_0^\tau \quad (\text{B.5})$$

$$C_{\phi_{ij}}^m g(\tau) = \rho_{ij} \binom{m}{g} \left(\sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} (k-1)! \alpha_{k-1j} \right) \alpha_{m_i} \frac{1}{\tau} \left[e^{-\gamma_j \tau} \sum_{l=0}^{m-g} (-1)^l \frac{(m-g)!}{(m-g-l)!} \cdot \frac{\tau^{m-g-l}}{(-\gamma_j)^{l+1}} \right] \Big|_0^\tau \quad (\text{B.6})$$

$$C_{\varphi_{ij}}^m gknq(\tau) = -\frac{1}{\gamma_j} \rho_{ij} \binom{m}{g} \binom{n}{q} \frac{(n+k-1)!}{n!} \alpha_{m_i} \alpha_{n+k-1j} \frac{1}{\tau} \left[e^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} \sum_{l=0}^{m+n-g-q} (-1)^l \frac{(m+n-g-q)!}{(m+n-g-q-l)!} \cdot \frac{\tau^{m+n-g-q-l}}{(-\gamma_i-\gamma_j)^{l+1}} \right] \Big|_0^\tau \quad (\text{B.7})$$

基于 $0^0 = 1$, 对式 (B.5) ~ 式 (B.7) 展开并整理, 可得

$$C_{x_i}^m g(\tau) = \frac{m!}{g!} \alpha_{m_i} \left[\frac{1}{\gamma_i^{m-g+1} \tau} - e^{-\gamma_i \tau} \sum_{l=0}^{m-g} \frac{\tau^{m-g-l-1}}{(m-g-l)! \gamma_i^{l+1}} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$C_{\phi_{ij}}^m g(\tau) = \frac{m!}{g!} \rho_{ij} \alpha_{m_i} \left(\sum_{k=1}^{d_j} \frac{1}{\gamma_j^k} (k-1)! \alpha_{k-1j} \right) \left[\frac{1}{\gamma_j^{m-g+1} \tau} - e^{-\gamma_j \tau} \sum_{l=0}^{m-g} \frac{\tau^{m-g-l-1}}{(m-g-l)! \gamma_j^{l+1}} \right] \quad (\text{B.9})$$

$$C_{\varphi_{ij}}^m gknq(\tau) = \frac{1}{\gamma_j} \rho_{ij} \binom{m}{g} \binom{n}{q} \frac{(n+k-1)!}{(n-q)! q!} \alpha_{m_i} \alpha_{n+k-1j} \left[e^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} \sum_{l=0}^{m+n-g-q} \frac{(m+n-g-q)!}{(m+n-g-q-l)! (\gamma_i+\gamma_j)^{l+1}} - \frac{(m+n-g-q)!}{(\gamma_i+\gamma_j)^{m+n-g-q+1} \tau} \right] \quad (\text{B.10})$$

命题得证.

证毕.