

考虑风险规避的秘书问题求解的一个启发式方法^①

李梦豪, 王刊良

(中国人民大学商学院, 北京 100872)

摘要: 秘书问题是一类序贯观察与选择问题, 描述了动态的信息搜索与决策过程. 针对现有的以寻找满意解为目标的启发式方法存在诸多局限, 提出了新的启发式方法, 该方法基于当前观测中候选项在已观察候选项中的相对排名、待观测候选项数量以及决策者的抱负水平, 决策者可以通过设定抱负水平灵活决定该启发式方法的结果导向. 推导了该启发式方法的性能指标, 并通过仿真的方法与已有启发式方法的性能进行了比较. 结果发现, 该启发式方法在最终选择的候选项的期望排名和稳定性, 以及风险解的避免上均优于已有的启发式方法.

关键词: 秘书问题; 截止阀策略; 前景理论; 风险规避; 启发式方法

中图分类号: C934 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2019)11-0082-09

0 引言

秘书问题最早出现在1960年Scientific American的一个专栏上. 经典的秘书问题描述了如下决策情景: 一个决策者需要一个给定长度的序贯到达的随机收益选项序列中选出收益最大的选项. 例如, 公司要招聘一名秘书, 招聘者事先知道多少求职者递交了申请, 但他每次只能面试一个求职者, 面试结束之后, 招聘者必须立刻决定是否录用, 在决定不录用之后才能开始下一个求职者的面试, 而如果决定录用, 就意味着放弃了面试后续所有求职者的机会. 一个决策者在面对求职、投资机会、租房、征婚等很多情景时都会面临类似的问题, 该类问题也被称为序贯观察与选择问题^[1].

本文中, 序贯到达的随机收益候选项序列里的每一选项都被称为候选项, 候选项总数设为 n ; 已经被决策者观测并放弃的候选项称为已观测候选项, 已观测候选项序列长度设为 m ; 在候选项序列中还未被观测的候选项称为待观测候选项(显然,

待观测候选项长度为 $n-m$); 正在被决策者观测的候选项称为观测中候选项; 决策者最终从候选项序列中选择的候选项称为结果项; 候选项序列中最优的候选项称为最优解.

以往的研究对于秘书问题给出了如下的前提假设^[2]: 1) 候选项序列选项的数量 n 有限且已知; 2) 只能而且必须从候选项序列中选择1个结果项; 3) 决策者序贯地, 每次只观测1个候选项, 优劣候选项到达的顺序是随机的; 4) 决策者可以将没有关联的候选项的优劣进行排序, 并且不存在并列情况; 5) 一旦被拒绝, 已观察候选项不能被回溯.

秘书问题的研究中, 通常会关注决策策略, 研究不同的目标函数和约束条件下的理论最优策略. 通常会有两个考察指标: 1) 取得最优解的概率; 2) 结果项的期望排名.

为了使取得最优解的概率最大, Lindley^[3]提出了截止阀策略(cutoff rules), 即决策者总是略过候选项序列的前 r 个候选项, 并记录这 r 个候选项中的最优解, 从 $r+1$ 个候选项开始, 一旦序列中

^① 收稿日期: 2018-03-15; 修订日期: 2019-02-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71331007).

作者简介: 李梦豪(1990—), 湖北宜昌人, 博士生. Email: 254361582@qq.com

出现优于之前已观察的最优解的候选项,就立刻做出选择(即选择当前的观测中候选项)。运用该策略,当 $r = n/e$ (n 为序列长度) 时,决策者选择到最优解的概率最大,为 $1/e$; 该策略被称为最优决策策略。

在以结果项期望排名最低(即排名越低表现越好)为决策目标时,Chow 等^[4]提出了多门槛截止策略(multithreshold rules, MTRs)。该策略以结果项期望排名最低为目标函数,使用动态规划进行逆向推导,从而确定每一个候选项的选取条件。运用该策略可以得出该目标函数下的理论最优解。

后续的研究进一步扩展了秘书问题的内容。一部分研究关注于拟阵秘书问题,即决策者的目标是从候选序列中选出若干个候选项并使这些候选项的整体表现最优^[5-7]; Eriksson 等^[8]和 Tampieri^[9]研究了双边秘书问题,即决策者和候选项之间存在双向选择的关系; Cownden^[10]的研究扩展了只有 1 个决策者的限制条件,研究了不同的决策者从同一个候选池中选择最优解的情况。

另一个研究热点是秘书问题的决策者行为,研究不同的决策者个人特质和情景因素对决策者决策行为的影响。

Seale 和 Rapoport^[11]以及 Bearden 等^[12]发现实际决策者总是容易比最优策略更早地做出选择。在此基础之上,后续的研究关注了哪些因素会影响秘书问题决策者的行为,如: 沉没成本^[13]、决策过程中接受信息的不确定度^[14]、决策过程的环境因素和决策目标^[15]、决策者的心理状态^[16]、优质候选项或劣质候选项的连续出现^[17]。

一些研究者发现,虽然不同目标函数下秘书问题的理论最优策略已经被找到,但是实际决策者并不总是使用这些最优策略来解决秘书问题,他们往往会采用一些更易于使用的启发式方法进行决策。据此,Seale 和 Rapoport^[11]提出了两种决策效率较高的启发式策略(candidate count 和 successive non-candidates)。这些启发式策略仍然以最优解为目标,但是与最优策略不同,它们往往基于更加符合生活经验或者人类直觉的逻辑。

有学者指出^[11],这些启发式策略存在“未作出选择概率”较高的问题,即这些启发式有较大的可能性出现遍历完所有的候选项后仍未做出选

择从而只能选择候选项序列最后一项的情况。这种情况使得这些策略的结果项排名期望表现较差。这种“未作出选择概率”是这些策略在解决秘书问题时所面临的重要决策风险^[18]。同时,前景理论也指出,决策者并不总依照期望效用理论,而是根据其锚定平衡风险与收益后作出决策,所以在考察结果期望的同时,决策风险也需要考虑。

为了解决这一问题,提出了一些新的启发式方法,如刘庆顺^[19]提出的次优值标杆策略,杨成^[20]提出的三分法策略等。他们在截止阀法的基础之上做出改进,以牺牲取得最优值的概率换取降低“未作出选择概率”^[11]。不过,这些方法在调整决策标杆时存在如下问题:

1) 调整的程度不够。新提出的启发式算法仍有较高的“未作出选择概率”;

2) 调整的效率不高。降低的“未作出选择概率”不足以弥补牺牲的取得最优解的概率;

3) 调整不可控。这些方法简单地认为次优值或第三优值就是让决策者满意的非最优解。采用这些方法,决策者无法决定调整的幅度,进而不能灵活地控制决策风险。

可以看出,虽然包含了从追求最优解转变为追求满意解的思想,但是这些方法在引入满意解时并没有从它的定义出发。满意解最早由 Simon^[21]提出,他指出决策者是有限理性的,他们并不总是寻求最优解,很多情况下他们会选择满意解,而满意解的界定与决策者的抱负水平相关,一般而言,偏好风险的决策者抱负水平较高,他们的满意解的条件更为严格,极端情况下,对于竞优者(maximizer)而言,只有最优解才是他们的满意解。

基于此,本文提出了新的启发式方法,这种启发式方法在截止阀启发式方法基础上,将观测中候选项在已观察候选项中的相对排名、待观测候选项数量以及决策者的抱负水平引入决策过程,推导了该方法在 $n = 100$ 时不同抱负水平(P_0)的情况下上述 3 项指标的理论值。

所提出的启发式方法将决策者的抱负水平引入了决策过程,通过建立决策者抱负水平与满意解的联系,更好地解答了寻找满意解的问题。仿真分析结果表明,该方法能显著降低“未作出选择概率”,从而降低决策风险;与此同时,也能保持

较高的取得最优解概率,保持较高的调整效率.此外,所提出的启发式方法在使用时具有较好的灵活性.决策者可以设置不同的抱负水平,允许决策者能够灵活地调整该方法在不同指标上的性能权重.实际决策时,决策者对于决策效率和决策风险的权衡往往会受到成本、时间和决策者个人特征等情境因素的影响.因此,所提出的启发式方法能够较好地适应不同的决策者和决策场景.

最后,本文拓展了 Stein 等^[2]的研究,将取得最优解概率、结果项期望排名、有效概率扩充至启发式方法的评价指标当中,评价了几种以寻求满意解为目标的启发式方法的决策效率,进一步扩展了秘书问题的求解目标和评价准则,进而使得所提出的启发式方法更加贴近实践.

本文论述了在经典秘书问题中引入决策者风险规避的必要性,描述考虑了风险规避和期望水平的启发式方法的运行机理,然后运用仿真方法对新提出的启发式方法与已有决策方法进行了优劣比较.

1 文献综述

1.1 多门槛截止阀策略(MTRs)

Chow 等^[4]最早提出了多门槛截止阀策略, Moriguti^[22]使用动态规划方法推导了其结论.其决策策略为,假设观测的是第 i 个候选项,此时的停止策略为 S_i ,即当其相对排名低于 S_i 时,结束搜索观测中的候选项.假设此时的绝对期望排名为 C_i ,此时存在递推公式

$$C_{i-1} = C_i + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{S_i} \left(\frac{n+1}{i+1} j - C_i \right) \quad (1)$$

式中 $S_i = \text{trunc} \left[\frac{i+1}{n+1} c_i \right]$, trunc 表示不超过中括号内的值的最大整数.

由于 $C_{n-1} = \frac{n+1}{2}$, $S_n = n$,利用上述两式,在 n 已知的情况下,可以逆推出每一个候选项的停止策略,而依据动态规划的思想,在每一步决策都取得最优绝对期望排名的情况下,所得的决策策略即可获得理论上最优绝对排名期望策略.

Mucci^[23]和 Yeo^[24]证明,依据拓展后的更复杂的多门槛截止阀策略,只要秘书问题的收益函

数是单调的,即结果项的排名越前获得的奖励越丰厚,那么总能计算出期望最优的停止策略.

然而多门槛截止阀策略计算难度较高,在决策前需要逆推每一步的停止策略,在很多决策场景中并不适用,因此后续研究者提出了一些决策效率较高的启发式方法.

1.2 以取得满意解为目标的启发式方法

刘庆顺^[19]提出的次优值标杆策略,在原截止阀法的基础上做出调整,以截止阀内的次优值作为标杆,较截止阀策略,在取得最优值概率的指标上有所削弱,但提高了在取得结果项期望排名的指标上的性能.

杨成^[20]提出的三分法策略,在候选项总数较少的情况下(如低于 100),选择截止阀长度为候选项总数的 $1/3$,在总数低于 10 的时候以最优值为标杆,在总数低于 30 的时候取次优值为标杆,在总数低于 90 的时候以第三优的值为标杆.

1.3 前景理论

在面临现实问题时,一个有限理性的决策者往往不是一味地追求最优解,尤其是在追求最优解要付出更大的搜寻成本或更高的风险,而满意解与最优解差距并不大的情况下^[21].此时,取得解的期望水平(在经典秘书问题中是结果项在整个候选序列中的名次的期望)会作为决策方法评价的重要依据,以往的研究也有将最小期望名次作为秘书问题求解的目标函数^[4].

此外,现实决策者不仅考虑收益,还考虑风险因素,例如 Coombs 等^[25]提出了最小后悔值的决策标准,就是以最小化决策风险为目标的决策准则.

参照前景理论^[26,27],在秘书问题中,当决策者的锚定点在最优解时,所有结果都将被视为损失,此时决策者是风险偏爱的,可能会为了获得最优解冒更大的风险;当决策者的锚定点定在满意解时,对决策者而言,获得满意解以上的结果即为收益而获得满意解以下的结果即为损失.由于决策者对损失更敏感,比起可得收益,决策者会更优先避免损失,尽量保证决策结果在满意解及以上;而当决策者的锚定点在风险解时,所有的结果都表现为收益,此时的决策者将呈现出保守偏好,即会优先寻求无风险的收益,而不会为了最大收益冒险^[12,28].通过实验发现,面临秘书问题的决

策者往往会过早终止搜索, 即 r 小于理论最优截止阈 (n/e) . 这些结果为判定秘书问题的决策目标并非最优解提供了有力证据.

上述理论和研究结果对于研究经典秘书问题的启发是 秘书问题的决策目标除了取得最优解的概率最大和取得结果项的期望排名最低以外, 决策风险也是个值得关注的考察指标, 当决策方法遍历了前 $n-1$ 个候选项仍然无法做出选择, 只能选择最后一个候选项时, 认为该决策方法就已经失效了, 本文以各方法在前 $n-1$ 个候选项中能做出选择的概率来作为方法有效概率来检验其决策风险. 同时针对不同决策者不同决策情境中的锚定情况, 决策方法如果能灵活的做出调整, 那么它将会更能满足实际决策者的需求和偏好.

2 考虑风险和期望水平的启发式方法

2.1 方法描述

以往的研究表明, 运用截止阈启发式方法求解经典秘书问题时会有很高的未做出选择的概率^[2, 11], 这种启发式方法有很高的风险和较低的结果期望水平.

考虑到候选项随机到达的前提, 有理由假定前 r 个候选项是总体候选序列的样本序列, 决策者可以通过样本信息推测出整个候选项序列的总体特征, 并以此做出更有效的决策. 另外, 在实际决策过程中, 决策者往往将观测中候选项是否为最优解的问题转化为在待观测候选序列中是否存在比观测中候选项更优的候选项的问题, 而转化后的问题其实是在寻找当前仍然存在的最优解, 这与截止阈策略中当最优解出现在截止阈内便无法做出选择的情况相悖.

基于上述考虑, 在原有截止阈启发式方法的基础之上作以下改进: 首先, 仍要选择截止阈, 决策者总是会略过候选序列中的前 r 个候选项, 然后, 从第 $r+1$ 个候选项起, 决策者需要作式 (2) 的判断, 并选择第一个符合式 (2) 的候选项

$$1 - \left(\frac{t}{m}\right)^{n-m} < P_0 \quad (2)$$

式中 n 代表候选项序列的长度; m 为当前已观测的(包含正在观测的)候选项数量; t 为已观测候选项中表现不优于观测中候选项的数量; P_0 代表

决策者的抱负水平 $P_0 \in (0, 1)$, P_0 值越高表示决策者越保守, 抱负水平越低, 对满意解的界定条件更为宽松, 也更可能较早地做出选择, 这在很大程度上反映了决策者的锚(anchoring).

运用上式进行决策判断, 意味着当待观测候选项序列中出现优于观测中候选项的概率(上式左侧)低于某一指标(即决策者的抱负水平, 该指标与决策者的风险偏好相关)时, 决策者就会选择当前观测中的候选项.

决策者可以依据自己的抱负水平和风险偏好, 灵活调整 P_0 , 从而达到不同的决策效果, 例如一名较为保守的决策者将 P_0 设置为 0.9, 这表明他每次略过 1 个候选项所面临的最大风险为 0.1; 相对地, 当决策者是一名竞优者(maximizer), 只追求最优解时, P_0 值为 0, 此时该策略就退化为传统的截止阈策略.

将上述启发式方法称作风险规避截止阈(risk-reduction cutoff, RRC)方法. 该启发式方法更接近现实中的决策过程, 虽然决策者不会严格按照上式进行计算, 但往往都会根据观测中候选项的相对名次和待观测候选项序列的长度进行估算, 从而判断未来是否存在比观测中候选项更优的候选项并据此做出选择.

2.2 参数推导

以下将推导 RRC 法在取得最优解概率、期望排名和方法有效概率 3 项指标上的性能.

不妨假设在候选项总数为 n , 截止阈选择为 r 时, RRC 法取得最优解的概率为 $W_n(r)$, 则有

$$W_n(r) = P_{(\text{第 } r+1 \text{ 项为最优解})} + P_{(\text{未选择第 } r+1 \text{ 项})} \times W_n(r+1) \quad (3)$$

式中

$$P_{(\text{第 } r+1 \text{ 项为最优解})} = \frac{1}{n}, \quad (4)$$

$$P_{(\text{未选择第 } r+1 \text{ 项})} = \frac{\text{trunc} \left[[1 - P_0]^{\frac{1}{n-r-1}} \times (r+1) \right]}{r+1}$$

而当截止阈选择为 $n-1$ 时, 只有当第 n 项为最优解时才能取得最优解, 即 $W_n(n) = \frac{1}{n}$, 将此结果带入, 可依次逆推得出选取不同的截止阈时, RRC 取得最优解概率的情况.

同理, 假设在候选项总数为 n , 截止阈选择为 r 时, RRC 法取得结果项的排名期望为 $E_n(r)$, 它

能在末项前取得结果的概率为 $S_n(r)$,可以得到如下递推公式

$$E_n(r) = P_{(\text{选择第}r+1\text{项})} \times E(r+1) + P_{(\text{未选择第}r+1\text{项})} \times E_n(r+1) \quad (5)$$

式中 $P_{(\text{未选择第}r+1\text{项})}$ 已在式(3) 给出: $P_{(\text{选择第}r+1\text{项})} = 1 - P_{(\text{未选择第}r+1\text{项})}$; $E(r+1)$ 表示在选择第 $r+1$ 项的前提下,第 $r+1$ 项的绝对期望排名,故

$$E(r+1) = \frac{n}{2(r+1)} \{r+2 - \text{trunc} \llbracket (1 - P_0)^{\frac{1}{n-r-1}}(r+1) \rrbracket \} \quad (6)$$

而当截止阀选择为 $n-1$ 时,所得期望排名即为第 n 项的期望排名,故 $E_n(n) = \frac{n+1}{2}$,将此结果带入,可逆推得出选取不同截止阀时,RRC 取得结果项排名期望的情况.

对于取得结果概率 $S_n(r)$,有

$$S_n(r) = P_{(\text{选择第}r+1\text{项})} + P_{(\text{未选择第}r+1\text{项})} \times S_n(r+1) \quad (7)$$

而在截止阀选择为 $n-1$ 时,策略已经不可能在候选项序列最后一项前完成选择,故 $S_n(n) = 0$,据此可以逆推得出选取不同截止阀时,RRC 策略能在末项前做出选择的概率.

按照上述式(3)、式(5)和式(7),得出了在 $n=100$ 时,不同抱负水平下3项指标的性能,如图1、图2和图3所示.

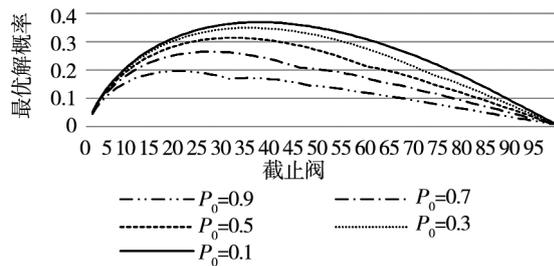


图1 RRC 启发式方法取得最优解概率
Fig.1 Probability of RRC to obtain the optimal candidate

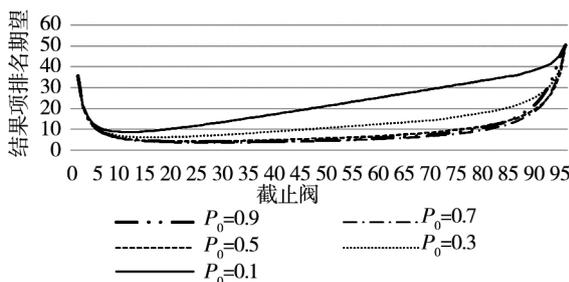


图2 RRC 启发式方法取得结果项排名期望
Fig.2 Result item ranking expectation of RRC

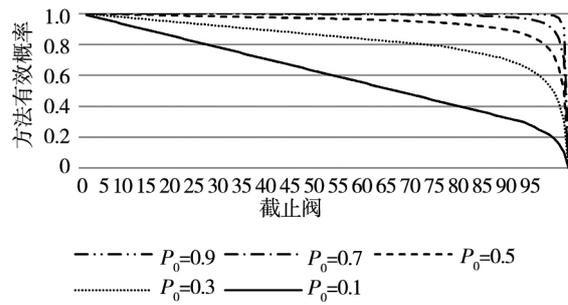


图3 RRC 启发式方法有效概率
Fig.3 Effective probability of RRC

同时,还计算了选取不同抱负水平参数 (P_0) 使用 RRC 启发式方法,结果项达到前几次优的概率,以此反映不同抱负水平的决策者其对应的满意解界定条件的差异,参见图4.

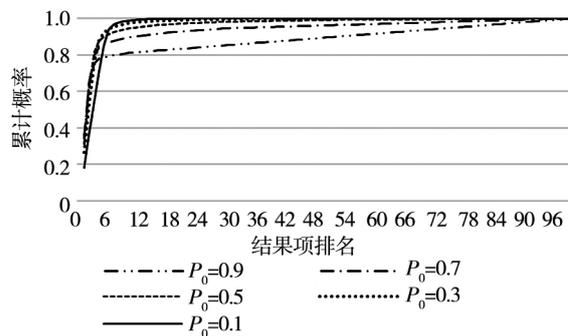


图4 RRC 启发式方法结果项排名累计概率
Fig.4 Cumulative probability of RRC result item ranking

2.3 结果讨论

从上述计算结果可以发现,首先,通过调整参数设置,RRC 法能达到接近于1的方法有效概率,极大地降低了决策风险(“未作出选择概率”).其次,虽然 RRC 策略也通过牺牲一部分取得最优解概率来降低“未作出选择概率”,但在极大程度降低“未作出选择概率”的情况下,RRC 法仍保持较高的取得最优解概率,这从 RRC 法取得结果项排名期望的性能上也能得到佐证.最后,依据不同的抱负水平参数 P_0 ,RRC 法将会有不同的性能侧重,当 P_0 值选择较大时,决策者更趋于保守,RRC 策略达到接近于1的有效概率,同时,也能获得较低的期望排名.例如,在 $P_0 = 0.9$ 时所得期望排名为4.2,较最优策略 MTRs 策略的3.7已经比较接近.而在 P_0 值较小时,决策者更偏好风险,RRC 策略未做出选择的概率变大,但同时取得最优解的概率也显著提升,并且随着 P_0 逼近0将无限接近此标准下最优策略(截止阀策略)的

决策效果.

另外, 计算结果还显示, 在 $P_0 = 0.7$ 时, RRC 策略所得结果项的期望排名接近最低. 这个结果表明, 在 $P_0 > 0.7$ 时, “未作出选择概率”对结果的期望造成的负影响已经不占主导地位, 此时决策者更专注于追求更高的最优概率对结果的期望影响更大, 这也补充了王刊良等^[18]的研究发现.

此外, RRC 法也从定义的角度出发, 连接了满意解与抱负水平的关系, 设置不同的抱负水平参数对应了不同的满意解界定. 由于对满意解的界定不同, 为了取得满意解的概率最高, 不同的决策者将设置不同的抱负水平参数: 风险偏好的决策者更难满意, 他们的 P_0 值设置较低, 他们有更髙的概率取得排名更靠前的结果项, 但无法取得满意解的风险也更大; 偏好保守的决策者更容易满意, 他们的 P_0 值设置较高, 他们不太容易取得最优解, 但取得满意解的概率较大, 决策风险也较低.

3 不同启发式方法的性能比较

利用仿真方法, 对次优值标杆法^[19]、三分法^[20]和 RRC 法 3 种以取得满意解为目标的启发式方法进行了评估, 评估基于随机生成的 2 000 个候选项取值在 (0, 1) 间均匀分布的随机序列, 候选序列长度以 10 为跨度遍历 10 至 100. 针对这些随机序列, 分别应用 3 种启发式方法进行求解, 并记录决策结果及其排名情况.

将以取得最优解的频率, 取得结果项期望排名和方法有效的频率 3 个结果作为启发式方法优劣的评估指标, 并对比 3 种启发式方法所得结果项的排名方差作为决策方法稳定性的依据. 在考察取得最优解概率和取得结果项排名期望两项指标时, 以理论最优策略截止阀法和多门槛截止阀策略 (MTRs) 作为标杆值, 即决策方法所能达到的最高水平. 而在考察方法有效的频率时, 假定当该指标接近 1 时, 相应的启发式方法是有效的.

3.1 取得最优解的频率

图 5 为 3 种启发式方法取得最优解频率的仿真结果. 可以看出, 截止阀法取得最优解的频率与理论值 0.37 接近, RRC 法取得最优解的频率也与计算的理论值 0.27 接近.

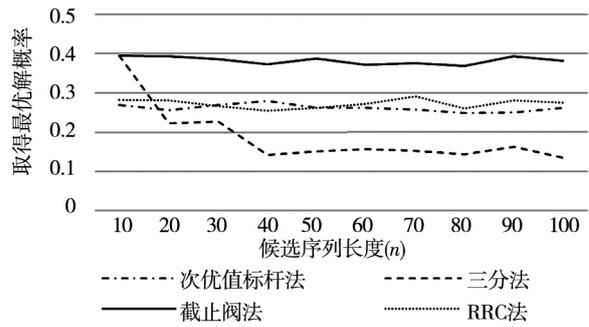


图 5 各启发式方法取得最优解的频率

Fig. 5 Frequency to obtain the optimal candidate of each heuristic

因为 3 种启发式方法都以寻找满意解为目标, 所以在取得最优解的性能方面, 离理论最优解有一定差距. 三分法策略在候选项数量较少时, 性能很好, 但随着候选项数量增加其性能急剧下降, 次优值标杆法和 RRC 法的性能相近, 都有稳定在 0.27 左右的频率选中最优解, 但随着 n 的增长, RRC 法的性能有逐渐优于次优值标杆法的倾向.

3.2 取得结果项的期望排名

图 6 为 3 种启发式方法取得结果项期望排名的仿真结果. 可以看出, 在 n 值较小时, 3 种启发式方法的结果项的期望排名都较小, 但随着 n 值增大, 次优值标杆法所取得结果项的排名期望急剧增加, 三分法虽然还能维持不错的性能, 但较之 RRC 方法和理论最优的多门槛截止阀方法仍有不小的差距. 显然, RRC 方法在该项指标上的性能已经接近了理论最优的方法.

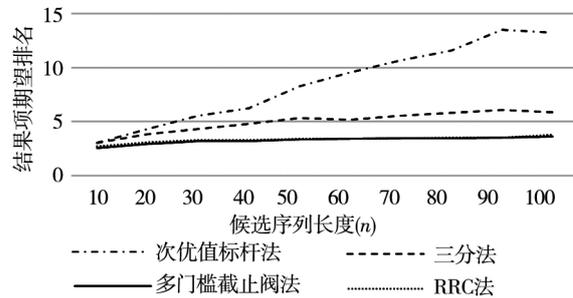


图 6 各启发式方法取得结果项期望排名

Fig. 6 Expected ranking of result item selected by each heuristic

3.3 方法有效的频率

图 7 为 3 种启发式方法有效概率的仿真结果. 虽然以取得满意解为目标, 次优值标杆法的有效频率仍然较低, 存在超过 20% 的决策风险; 三分法在候选项数目较大时有比较高的有效频率, 但在候选项数目较少时的决策风险是 3 种启发式方

法中最高的; RRC 方法则保证了很高的有效频率,基本上排除了决策风险.

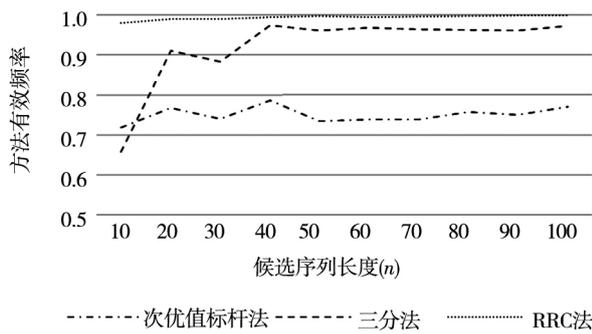


图 7 各启发式方法方法有效的频率
Fig. 7 Effective frequency of each heuristic

3.4 各启发式方法的稳定性

图 8 所示的仿真结果表明,在候选项较少时,3 种启发式方法都有不错的稳定性,但随着候选序列选项总数 n 的增加,次优值标杆法的决策结果将出现较大的波动,三分法的性能适中,RRC 法则能得到比较稳定的决策结果.

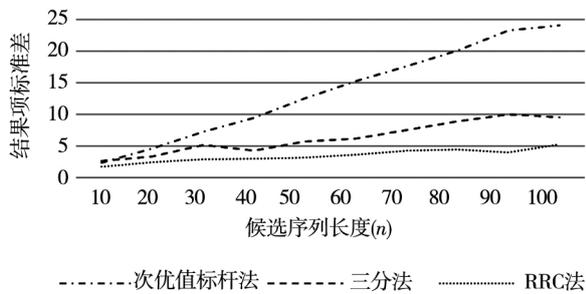


图 8 各启发式方法结果项标准差
Fig. 7 Standard deviation of each heuristic

3.5 仿真结果讨论

次优值标杆方法通过改进已有的截止阀方法将原方法找寻最优解的目标调整为找寻满意解.牺牲一部分取得最优解的可能性来换取更高的有效性,但这种调整并不充分,调整之后方法有效的频率依然低于 80%. 当候选项数量较大时决策效果较差,且缺乏稳定性.

三分法方法在其适用范围内($n \leq 100$) 有不错的性能,但其性能呈现出两个极端,当候选项数量较少时,这种方法的决策风险很高,而当候选项数量偏大时,这种方法将很难让决策人选得最优解.

从仿真结果上看,除了在候选项数量少于 10 时,取得最优解的频率低于三分法,RRC 方法在其他情况下的性能都显著优于另两种启发式方

法.另外,RRC 方法取得结果项的排名期望已经接近理论最优解,方法有效频率也接近于 1,在绝大多数情况下是种非常有效的启发式方法.需要指出的是,RRC 方法较另两种启发式方法存在一定的计算难度,且在性能上与 MTRs 方法有一定相似性,但 MTRs 阈值和停止条件的确定需要经过严格的动态规划逆推,逆推次数为 n ,在 n 值较大的情况下不具有可操作性;而 RRC 方法虽然较之次优值标杆法和三分法计算更为复杂,其复杂度仍停留在算术层面上,在现实中易于实现.

4 讨论和启发

针对已有研究中,对寻找秘书问题最优解的启发式方法的对比评估,本文研究了寻找秘书问题满意解的启发式方法.针对现有寻找满意解启发式方法存在的降低风险的程度不够,效率不高且调整幅度不可控的问题,本文结合决策者的实际决策情境,提出了新的启发式(RRC)方法.该启发式方法能有效解决上述问题,且在取得最优解概率、结果项期望和方法有效概率 3 个考察指标上都具有较高的性能,从而更能为实际决策者采纳.

另外,现有秘书问题的决策方法往往难以考虑决策者的风险偏好因素,而 RRC 启发式方法引入了抱负水平 P_0 ,该参数与风险偏好相关,决策者可以根据自己的风险偏好来设置 P_0 ,从而决定该启发式方法的性能是偏向选择最优解还是满意解.而数学推导证明,依据不同的 P_0 的设置,该启发式方法的性能均能逼近该方向下最优决策策略.

本文虽然借鉴前景理论的论述解释了回避风险在决策问题中的重要性,但处理秘书问题时,实际决策者究竟会如何锚定,对他们来说所处场景究竟是收益场景还是损失场景值得进一步探讨.此外,已有的研究^[12]表明,实际被试在求解秘书问题时,往往会高估已经评测的候选项而低估未评测的候选项,从而过早地做出选择.这实际表现的是保守倾向,也就是被试实际将锚定在了风险解上,即他们认为所有的选择结果都是收益;而如果将实验的场景设置为损失情景,即最优解意味

着支付最少的损失时, 被试是否会表现出风险偏好, 从而较之前的情景有显著的搜寻延长的倾向, 将是个有趣的课题. 第三, 实际决策中, 有时不只有一次选择的机会(如股票投资). 当出现复数次投资机会时是重复单次决策的策略还是制定新的决策策略, 这样的场景下有没有性能优秀的启发式方法? 这些都将是值得研究的问题.

5 结束语

经典秘书问题的目标是使得决策者最终选

择最优选项的概率最大化. 围绕该目标前人比较评估了几种启发式方法的决策效率. 本文扩展了决策者的目标和准则, 考虑了决策者的期望水平和风险因素, 比较了几种以寻找满意解为目标的启发式方法的决策效率, 并提出了权衡期望水平和风险因素的截止阀启发式方法(RRC), 计算了该启发式方法的决策效率, 并运用仿真方法比较了该启发式方法和已有的启发式方法的性能和稳定性等, 论证了该启发式方法的优越性.

参考文献:

- [1] Ferguson T S. Who solved the secretary problem[J]. *Statistical Science*, 1989, 4(3): 282–296.
- [2] Stein W E, Seale D A, Rapoport A. Analysis of heuristic solutions to the best choice problem[J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 151(1): 140–152.
- [3] Lindley D V. Dynamic programming and decision theory[J]. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 1961, 10(1): 39–51.
- [4] Chow Y S, Moriguti S, Robbins H, et al. Optimal selection based on relative ranks[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 1964, 2(2): 81–90.
- [5] Tamaki M. A secretary problem with double choices[J]. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 2017, 22(4): 257–265.
- [6] Babaioff M, Immorlica N, Kleinberg R. Matroids, secretary problems, and online mechanisms[C]//*Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA, 2007*: 434–443.
- [7] Soto J A, Turkieltaub A, Verdugo V. Strong algorithms for the ordinal matroid secretary problem[C]//*29th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. 2018: 715–734.
- [8] Eriksson K, Sjöstrand J, Strimling P. Optimal expected rank in a two-sided secretary problem[J]. *Operations Research*, 2007, 55(5): 921–931.
- [9] Tampieri A. Marriage formation with assortative meeting as a two-sided optimal stopping problem[R]. *Dipartimento Scienze Economiche, Universita' di Bologna, No 886*, 2013.
- [10] Cownden D, Steinsaltz D. Effects of competition in a secretary problem[J]. *Operations Research*, 2014, 62(1): 104–113.
- [11] Seale D A, Rapoport A. Sequential decision making with relative ranks: An experimental investigation of the secretary problem[J]. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 1997, 69(3): 221–236.
- [12] Bearden J N, Rapoport A, Murphy R O. Sequential observation and selection with rank-dependent payoffs: An experimental study[J]. *Management Science*, 2006, 52(9): 1437–1449.
- [13] Zwick R, Rapoport A, Lo A K C, et al. Consumer sequential search: Not enough or too much? [J]. *Marketing Science*, 2003, 22(4): 503–519.
- [14] Palley A B, Kremer M. Sequential search and learning from rank feedback: Theory and experimental evidence[J]. *Management Science*, 2014, 60(10): 2525–2542.
- [15] Guan M, Lee M D. The effect of goals and environments on human performance in optimal stopping problems[J]. *Decision*, 2018, 5: 339–361.
- [16] von Helversen B, Wilke A, Johnson T, et al. Performance benefits of depression: Sequential decision making in a healthy

- sample and a clinically depressed sample [J]. *Journal of Abnormal Psychology*, 2011, 120(4): 962–968.
- [17] 刘庆顺, 王刊良. 动态决策过程中备选项的序列特征效应研究 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(11): 27–34, 40.
Liu Qingshun, Wang Kanliang. On the effect of sequential characteristics of alternatives in the dynamic decision process [J]. *Journal of Management Sciences of China*, 2010, 13(11): 27–34, 40. (in Chinese)
- [18] 王刊良, 王 渊, 刘庆顺. 序贯观察与选择问题截止阀策略的一个改进 [J]. *系统工程理论与实践*, 2008, 28(2): 74–81
Wang Kanliang, Wang Yuan, Liu Qingshun. Extension on cut-off rules of sequential observation and selection problem [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2008, 28(2): 74–81. (in Chinese)
- [19] 刘庆顺, 王 渊, 王刊良. 基于满意解策略的秘书问题研究 [J]. *软科学*, 2007, 21(5): 14–16.
Liu Qingshun, Wang Yuan, Wang Kanliang. Research on secretary problem based on satisfactory solution [J]. *Soft Science*, 2007, 21(5): 14–16. (in Chinese)
- [20] 杨 城, 罗旭斌, 陈 斌. 秘书问题的一种实用策略 [J]. *系统工程理论与实践*, 2012, 32(7): 1525–1530.
Yang Cheng, Luo Xubin, Chen Bin. A practical strategy for secretary problem [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2012, 32(7): 1525–1530. (in Chinese)
- [21] Simon H A. A behavioral model of rational choice [J]. *Quarterly Journal of Economics*, 1955, 69(1): 99–118.
- [22] Moriguti S. Basic theory of selection by relative rank with cost [J]. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 1993, 36(1): 46–61.
- [23] Mucci A G. Differential equations and optimal choice problems [J]. *The Annals of Statistics*, 1973, 1(1): 104–113.
- [24] Yeo A J, Yeo G F. Selecting satisfactory secretaries [J]. *Australian Journal of Statistics*, 1994, 36(2): 185–198.
- [25] Coombs C H, Dawes R M, Tversky A. *Mathematical Psychology: An Elementary Introduction* [M]. Oxford: Prentice-Hall, 1970.
- [26] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk [J]. *Econometrica*, 1979, 47(2): 263–292.
- [27] Tversky A, Kahneman D. The framing of decisions and the psychology of choice [J]. *Science*, 1981, 211(4481): 453–58.
- [28] Bearden J N, Murphy R O, Rapoport A. A multi-attribute extension of the secretary problem: Theory and experiments [J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2005, 49(5): 410–425.
- [29] Bearden J N. A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs [J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2006, 50(1): 58–59.

A heuristic for solving secretary problem with the consideration of risk aversion

LI Meng-hao, WANG Kan-liang

School of Business, Renmin University of China, Beijing 100872, China

Abstract: Secretary problem involves a sequential of observations and related selection, and describes a dynamic information search and decision-making process. To overcome the limitations of existing heuristics in finding satisfactory solutions, the paper proposes a new heuristic based on the relative ranking of the current option in the observed options, the number of subsequent options, and the decision makers' aspiration level which can be set flexibly to determine the result orientation of the heuristic. Deduced results and simulation evidence show that the proposed heuristic is superior to the existing heuristic methods in terms of the expected ranking, stability of the final selected option, and the avoidance of the risk solution.

Key words: secretary problem; cutoff rules; prospect theory; risk aversion; heuristic