

# 在线健康信息服务动态定价与推广策略<sup>①</sup>

林徐勋<sup>1,2</sup>, 王海燕<sup>1\*</sup>

(1. 东南大学经济与管理学院, 南京 211189; 2. 常州大学商学院, 常州 213164)

**摘要:** 在线健康信息服务逐渐成为健康管理的有效手段,正在受到各界人士的广泛关注.为了解决在线健康信息服务的动态定价和推广策略问题,以同时提供免费公共健康信息服务和收费定制化健康信息服务的在线健康信息服务提供商为研究对象,以其利润最大化为目标,基于微分动力学理论,分析免费公共健康信息服务和定制化健康信息服务两类消费者之间的动态转换特征,构建在线健康信息服务动态定价最优控制模型.结果表明:服务期较长的在线健康信息服务,对消费者实行收费服务前给予一定时长的“免费体验期”能够增加在线信息服务提供商的利润;而服务期较短的在线健康信息服务,没有必要设置“免费体验期”.在线健康信息服务提供商的潜在消费者数量增长率和在线健康信息服务时间长度对免费公共健康信息投放程度有显著的影响.在线健康信息服务上线初期,针对高收入消费群体适当延长“免费体验期”能够使服务提供商获得更大的利润.这些结论对健康信息服务提供商制订服务定价和推广策略具有参考价值.

**关键词:** 在线健康信息服务; 定制化与公共健康信息服务; 动态定价与推广策略; 最优控制  
**中图分类号:** C934   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1007-9807(2020)11-0023-26

## 0 引言

近年来,互联网技术的快速更新带动了人们生活方式的巨大转变,在线健康信息服务得到了迅速发展,成为最受欢迎的服务方式之一.“在线健康信息服务”是指基于互联网平台向消费者提供疾病预防、医疗保健等实时健康信息的在线服务.与传统健康服务不同,在线健康信息服务不需要依赖线下设施设备,具有更大的灵活性和便利性.以目前国内较为火热的营养健身类在线健康信息服务为例,服务提供商首先根据消费者的不同需求构建相应的微信群,消费者购买服务后可获准入群,从而每天获得相关的定制化信息服务.服务提供商通过微信群和小程序提供包括每日食谱、热量计算方法、健身技巧和运动视频在内的各

类信息.消费者接收信息后只需根据信息提示来执行饮食和运动计划即可,不受时间和空间的限制.除上述收费服务外,服务提供商通常还会通过一些平台(例如“微信公众号”)发布免费的公共健康信息来提高关注度,进而对收费的定制化信息服务进行营销推广.与定制化信息不同,公共健康信息不具备很强的针对性,一方面包含一些内容相关的科普常识,另一方面也会推送已购买了定制化服务的消费者的体验反馈.通过发布免费信息与老客户亲身体会吸引潜在消费者的关注,促使部分潜在消费者转换为定制化服务消费者,增加服务提供商利润.除了上述营养健身类健康信息服务以外,还有包括孕期保养、慢性病管理、健身指导等不同种类、不同服务时间长度的在线健康信息服务.

<sup>①</sup> 收稿日期: 2018-08-06; 修订日期: 2020-02-10.

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(71531004); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2242020S30033).

通讯作者: 王海燕(1966—),男,浙江诸暨人,博士,教授,博士生导师. Email: hywang@seu.edu.cn

近年来,在线健康信息服务领域成为投资热点,不断吸引大量资金,发展迅速。2014年,阿里巴巴投资超过1亿多元人民币,构建了最大的线上健康信息平台“阿里健康”。同时,另有数千家规模不等的在线健康信息服务提供商也通过互联网、微信、微博等新媒体平台向不同需求的消费者推送服务。然而阿里健康在2016年与2017年分别损失了1900万元与209万元,其它的健康信息服务提供商也大多亏损运营<sup>②</sup>,其中一个重要的原因就是目前在线健康信息服务市场缺少合适的商业模式和定价机制,导致许多服务提供商无法真正实现收益。尽管如此,在线健康信息服务仍是一片发展的蓝海,并会在未来的健康服务和健康管理过程中占据越来越重要的地位。

对上述营养健身类在线健康信息服务提供商来说,需要研究免费的公共健康信息是如何吸引潜在消费者转换为定制化服务消费者、需要投入多大程度的免费公共健康信息、如何动态确定定制化信息服务价格、如何制订服务推广策略等问题。本研究以此类健康信息服务过程为研究对象,刻画潜在消费者和定制化服务消费者之间的转换机理,建立两类消费者数量之间的动态演化方程,在考虑由信息服务质量引发的“网络外部效应”下以服务提供商在运营期内的利润最大为目标,寻找不同服务时间长度下的服务定价和推广策略。

## 1 文献综述

杜少甫等<sup>[1]</sup>阐述了未来医疗资源分配、个人疾病预防、手术调度管理等方面的发展趋势,预测健康信息服务将成为未来医疗管理发展的热点方向之一。近年来,关于健康信息服务已有较多研究,但主要针对医疗机构的患者群体,研究内容大部分集中在信息服务对医疗效率优化<sup>[2-4]</sup>、改善医疗服务可靠性<sup>[5]</sup>、预约调度医疗服务<sup>[6]</sup>以及协调医院运营效率与医疗服务质量<sup>[7]</sup>等方面的作用,而关于健康信息服务定价的定量分析较少。本研究以在线健康养身信息服务为研究对象,研究

内容侧重于健康信息服务的动态定价与推广策略。与本研究相关的研究包括信息产品和服务定价、物理和信息产品动态定价两个方面,下面分别进行综述。

在信息产品和服务定价方面,Sundararajan<sup>[8]</sup>考虑了不限流量固定价格收费与基于信息流量非线性收费两种策略,发现在零交易成本条件下基于信息流量的非线性收费策略总是优于固定价格收费策略。Chen与Huang<sup>[9]</sup>研究了数据信息服务的定价机制,对比了按分钟(min)、按吉字节(GB)和按兆字节/秒(MB/s)3种不同数据计价方式的最优定价策略。在单一版本信息产品的定价基础上,学者们进一步考虑“多版本”信息产品定价策略。刘志勇等<sup>[10,11]</sup>研究了“多版本”信息产品销售渠道选择与版本控制问题,发现当市场存在网络外部效应时,“多版本”信息产品能够给服务提供商带来更大利润。Chellappa与Mehra<sup>[12]</sup>进一步考虑了信息产品版本控制成本对信息产品定价策略的影响,研究表明,版本控制成本上升会导致信息产品质量下降,使用高版本信息产品的客户数量减少。Bimpikis等<sup>[13]</sup>研究了信息产品在上游垄断卖方与下游竞争市场买方之间的战略互动问题,提出了基于信息产品质量的“多版本”销售策略,研究表明,下游买方客户之间竞争的性质与激烈程度决定了上游卖方的信息产品销售策略。

学者们还将物理产品的各种销售定价策略运用到信息产品的研究中来。Wu等<sup>[14]</sup>考虑不完全信息条件下定制化混合捆绑销售定价策略,并验证了该策略优于单独销售和纯捆绑销售策略。Dou等<sup>[15]</sup>通过建立两阶段博弈模型对比研究了以信息使用时间和使用量两种价值衡量标准下,信息产品租赁策略和销售策略的优、劣势。王春苹等<sup>[16]</sup>研究了双寡头垄断市场条件下基础信息产品与附加服务定价的策略选择问题,分析了潜在消费者构成比例、市场规模等因素对产品价格的影响,并探讨不同服务成本和市场规模条件下企业最优定价策略。Bai等<sup>[17]</sup>考虑了服务提供商保留价格异质性与消费者时间敏感性条件下按需服务平台的收费策略。研究表明,当客户需求增加,

<sup>②</sup> <https://www.cn-healthcare.com/articlewm/20180426/content-4024643.html>

服务容量减少或客户对等待时间变得更敏感时, 服务平台应降低其支付比率。

此外, 学者们还考虑消费者行为和市场特征对信息产品与服务的影响。Kostami 等<sup>[18]</sup>考虑了消费者数量对服务质量的影响, 分别研究了单一价格与价格歧视条件下的服务定价与容量分配策略。Maglaras 等<sup>[19]</sup>考虑了大规模随机排队系统中服务差异化条件下的最优服务定价策略, 研究表明, 当时延敏感度较低的细分市场具有足够的价格弹性时, 差异化服务定价是最优策略。Yang 等<sup>[20]</sup>考虑了消费者偏好、服务效率以及市场结构对最优服务价格的影响, 研究表明, 当存在损失规避型顾客时, 双寡头市场比垄断市场获得更大的收益。Xu 等<sup>[21]</sup>通过实证分析说明了多个在线服务提供商竞争环境下, 卖家提供的电子服务对顾客累积评分的影响程度取决于产品定位和感知风险大小, 通过互联网推广手段提高客户积累评级能够为卖家带来更多的需求和利润。

上述已有研究主要从长期均衡角度考虑信息产品与服务的静态定价与推广策略, 较少考虑服务时长对定价策略的影响。由于互联网平台消费者数量变化较快, 信息服务价值存在明显时间波动性, 需要动态调整服务价格与推广投入。因此, 本研究考虑健康信息服务的动态定价与推广策略, 并探讨服务时长对最优收费策略的影响。

相较于静态定价策略, 动态定价策略具有更大的灵活性和适应性, 有效诱导消费行为<sup>[22]</sup>, 较好适应多类型消费者并存的情形<sup>[23, 24]</sup>, 显著提升服务利润<sup>[25-28]</sup>。Borgs 等<sup>[29]</sup>考虑了服务容量随时间波动条件下的多阶段服务动态定价策略, 研究表明, 服务提供商能够通过动态价格将消费者分配到不同的服务时段, 在实现利润最大化的同时保证客户预期服务质量。田林与徐以汎<sup>[30]</sup>探讨了直销平台和零售渠道的联合动态定价问题, 研究表明, 动态定价策略较好考虑了顾客行为对企业决策的影响。张新鑫等<sup>[31]</sup>探讨了企业与消费者行为对最优定价机制和均衡收益的影响, 研究表明, 企业可以依据市场中策略型消费者数量的比例采取智能的动态定价机制, 从而有效诱导消费行为。Batur 等<sup>[32]</sup>研究了无线网连接服务的动态定价问题, 研究表明, 相较于静态定价策略, 动态定价策略能够更好适应网络用户数量与网络带宽容量的

随机波动。Misra 等<sup>[33]</sup>基于多臂赌博机理论提出了替代性在线动态价格计算方法, 较好适应不完整需求信息条件下在线零售产品的定价策略, 显著提高零售商利润。Huang 等<sup>[34]</sup>针对部分特殊商品卖方事先缺乏需求信息的困难, 提出了具有动态学习功能以及最佳停止时间的定价策略, 有效提升卖方利润。

已有动态定价研究主要针对物理与信息产品, 对信息服务的动态定价涉及较少。本研究提出健康信息服务的动态定价策略, 分析该策略的时间分段结构性, 展示其与消费者数量之间的动态对应关系, 为服务提供商的实际运营过程提供更有应用参考。

综上所述, 本研究与已有研究的不同主要有以下几个方面。

1) 已有研究较少考虑信息服务时间长度对最优定价策略的影响机理, 然而在线健康信息服务过程中, 服务时间长度对服务价格有显著影响。本研究阐述了短期服务与长期服务条件下不同的最优定价策略。

2) 已有信息产品定价策略研究主要侧重于静态的定价机制, 对动态消费行为机理与定价策略研究较少。本研究针对服务人数和服务时间提出动态在线健康信息服务定价策略。

3) 已有研究大多考虑收费信息服务, 而对免费公共健康信息的网络促销推广机制考虑较少。免费公共健康信息是目前在线健康信息服务的主要推广方法之一。本研究考虑基于免费公共健康信息服务的最优推广策略。

4) 已有信息服务定价策略研究大多只考虑一种类型或多种互不相关的消费者, 较少考虑消费过程中消费者类型的转换过程。本研究揭示了在线健康信息服务消费者的转换和动态演化内在机理。

## 2 问题描述与模型构建

### 2.1 问题描述

考虑 1 家在线健康信息服务提供商(以下简称“服务提供商”), 通过互联网平台(例如“微信”等)提供在线健康信息服务。服务提供商提供

两类在线健康信息服务,一类是免费公共健康信息服务,另一类是付费定制化健康信息服务. 免费健康信息服务消费者能够通过例如“微信公众号”等途径免费接收公共健康信息,称免费健康信息服务消费者为“潜在消费者”,记  $t$  时刻这类群体的数量为  $x$ . 付费定制化健康信息服务消费者由于购买了健康信息服务,服务提供商除了提供免费公共健康信息服务外,还会提供定制化健康信息服务,称这类群体为“定制化消费者”,记  $t$  时刻这类群体的数量为  $y$ . 潜在消费者的数量与服务提供商公共健康信息投入程度有关,当投入

程度增加时,一方面平台流量会增加,从而潜在消费者的数量也会增加;另一方面,部分潜在消费者由于从公共健康信息服务中收益,会考虑寻求定制化付费健康信息服务,从而会转换为定制化消费者. 而定制化消费者的数量随着定制化健康信息服务的价格与服务质量动态变化. 因此需要研究服务提供商的公共健康信息投入程度与动态定制化服务价格,使服务提供商在服务期内的收益最大化.

在线健康信息服务与消费者行为动态转换机制如图 1 所示.

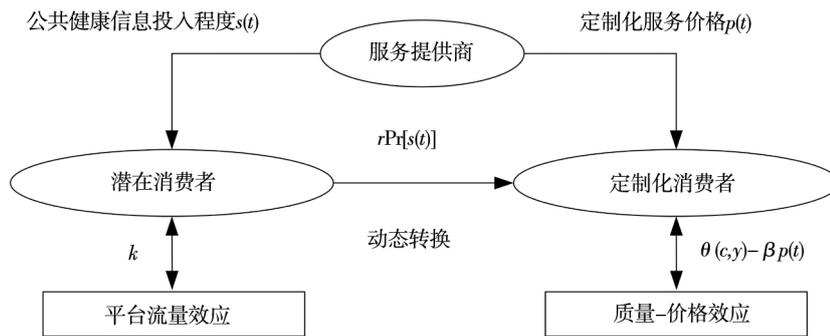


图 1 在线健康信息服务与消费者行为动态转换示意图

Fig. 1 Process of online health information service and dynamic conversion of consumers

### 2.2 符号与假设

根据在线健康信息服务特点,分别从服务成本、服务收益和服务质量 3 方面进行论述并给出相应的假设.

1) 服务成本. 包括服务提供商前期固定成本和公共健康信息投入的成本. 首先,服务提供商提供定制化健康信息服务需要一定的前期固定成本(服务人员培训、硬件设备购买与更新等). 考虑某一特定类型的定制化健康信息服务,得益于互联网的优势,服务提供商能够将具有类似需求的消费者聚集(例如同样是减重健身或是围孕期服务),采取“群体服务”的方式通过互联网平台进行信息推送. 因此假设服务成本与消费者数量没有直接关系,并且忽略消费者健康信息成本的异质性,故设投入的前期固定成本为  $c$ . 其次,服务提供商通过免费的公共健康信息进行互联网营销,设  $t$  时刻公共健康信息投入程度为  $s(t)$ ,参考广告营销<sup>[35,36]</sup>与服务成本<sup>[37-39]</sup>的计算方法,设  $t$  时刻公共健康信息投入成本为  $\frac{1}{2}m s(t)^2$ . 其中,  $m > 0$ , 表示成本随着公共健康信息投入程度

增大而增加.

2) 服务收益. 不考虑定制化消费者特征差异性,假设定制化健康信息服务价格对所有定制化消费者是相同的,只与时间有关. 设  $t$  时刻定制化健康信息服务价格为  $p(t)$ ,那么服务提供商在  $t$  时刻收益为  $p(t)y$ .

3) 服务质量. 服务质量反映了消费者通过健康信息服务,改善身体机能与健康状态,从而获得的效用大小. 定制化健康信息服务质量是影响定制化消费者数量和服务提供商利润的关键因素,设定定制化健康信息服务质量为  $\theta(c,y)$ ,作为特殊的信息服务,健康信息服务同样具有一定规模的网络外部效应<sup>[14,40]</sup>,即消费者获得的服务效用与消费者数量成正比,消费者数量越多,消费者得到的效用就越高. 因此,可以假设  $\theta(c,y)$  依赖于  $c$  和  $y(t)$ ,并满足以下性质.

①有界性  $0 < \theta_0 \leq \theta(c,y) \leq M$ , 其中  $\theta_0$  和  $M$  分别表示定制化消费者获得的服务质量下界与上界.

②递增性  $\frac{\partial \theta(c,y)}{\partial y} > 0, \frac{\partial \theta(c,y)}{\partial c} > 0$ , 定

制化健康信息服务质量随着投入成本与消费者数量的增加而增加. 当定制化消费者数量增加时, 一方面服务提供商能够接触到更多不同健康特征的人群从而获得更多样本数据来改进服务质量; 另一方面, 消费者相互之间也能起到相互交流、监督与鼓励的良性氛围, 进一步提升服务质量.

③ 边际效用递减  $\frac{\partial^2 \theta(c, y)}{\partial y^2} < 0$ . 定制化健

康信息服务质量随着消费者数量的边际效用呈递减趋势.

本研究所建模型涉及的参数与全体变量如表 1 所示.

表 1 符号及含义

Table 1 Denotations and meanings

类型	符号	含义
参数	$P_{\max}$	定制化消费者可接受服务价格上限
	$S_{\max}$	公共健康信息投入程度上限
	$T$	服务时间长度
	$m$	公共健康信息服务投入成本系数
	$c$	在线健康信息服务前期固定成本
	$k$	平台流量效应引发的潜在消费者数量增长率
	$M$	定制化健康信息服务质量上界
	$y_0$	初始时刻定制化消费者数量
	$x_0$	初始时刻潜在消费者数量
	$\theta_0$	定制化健康信息服务质量下界
	$r$	潜在消费者转换系数
	$\beta$	定制化消费者数量增长率相对于服务价格的敏感系数
$\mu$	定制化消费者数量增长率相对于服务质量的敏感系数	
决策变量	$p(t)$	$t$ 时刻定制化健康信息服务价格
	$s(t)$	$t$ 时刻公共健康信息投入程度
状态变量	$\theta(c, y)$	$t$ 时刻定制化健康信息服务质量
	$y(t)$	$t$ 时刻定制化消费者数量
	$x(t)$	$t$ 时刻潜在消费者数量

### 2.3 模型构建

令  $J(p(t), s(t))$  表示在线健康信息服务提供商在整个服务期间  $[0, T]$  的总利润, 则可表示为

$$J(p(t), s(t)) = \int_0^T \left[ p(t)y - \frac{1}{2}m s(t)^2 \right] dt - c \quad (1)$$

定制化消费者数量受到两个主要效应的影响, 一是由定制化信息服务质量和服务价格的综合作用效应, 称为“质量 - 价格”效应. 一方面, 定制化信息服务质量的提升能够给服务提供商带来更多的消费者, 设  $t$  时刻由服务质量引起的定制化消费者数量变化率为  $\mu\theta(c, y)$ , 其中  $\mu$  表示定制化消费者数量变化率相对于服务质量的敏感系数. 另一方面, 服务价格的提升会减少定制化消费者的数量, 设由服务价格引起的定制化消费者数量变化率为  $-\beta p(t)$ , 其中  $\beta$  表示定制化消费者数量变化率相对于服务价格的敏感系数. 因此得

到最终“质量 - 价格”效应下定制化消费者的数量增长率为  $[\mu\theta(c, y) - \beta p(t)]$ . 另一个称为“公共健康信息服务”效应. 受到公共健康信息网络推广作用的影响, 部分潜在消费者被吸引成为定制化消费者. 假设  $t$  时刻潜在消费者受到公共健康信息服务影响的比例为  $\Pr[s(t)]$ , 那么  $t$  时刻潜在消费者成为定制化消费者的最终转换率为  $r\Pr[s(t)]$ , 其中  $\Pr[\cdot]$  是一个以  $s(t)$  为自变量的累积概率函数,  $r$  表示转换系数. 结合“质量 - 价格”与“公共健康信息服务”效应, 定制化消费者数量  $y$  的动态演化方程可以写成以下形式

$$\frac{dy}{dt} = [\mu\theta(c, y) - \beta p(t)]y + r\Pr[s(t)]x \quad (2)$$

潜在消费者数量也受到两不同效应的影响, 一是“公共健康信息服务”效应, 由上文分析可知  $t$  时刻潜在消费者成为定制化消费者的转换率为

$rPr[s(t)]$ , 那么相应潜在消费者的增长率为  $-rPr[s(t)]$ , 另外, 服务提供商依托的互联网平台也影响潜在消费者的数量. 平台流量越大, 服务提供商提供的公众健康信息被感兴趣的消费者添加并关注的概率也就越大, 服务提供商收获的潜在消费者数量也随之增加, 本研究称之为“平台流量”效应. 设“平台流量”效应引发的潜在消费者数量增长率为  $k$ , 通常情况下  $k$  取决于信息平台的规模和知名度, 因此, 假设该增长率  $k$  为常数. 由“平台流量”效应引发的潜在消费者动态演化方程表示如下

$$\frac{dx}{dt} = -rPr[s(t)]x + kx \quad (3)$$

假设  $Pr[s(t)]$  为  $[0, S_{\max}]$  上均匀分布的累

$$\sup_{[p(t), s(t)] \in V} J(p(t), s(t)) = \int_0^T [p(t)y - \frac{1}{2}m s(t)^2] dt - c \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [\mu\theta(c, y) - \beta p]y + r \frac{s(t)}{S_{\max}}x \\ \frac{dx}{dt} = -r \frac{s(t)}{S_{\max}}x + kx \end{cases} \quad (7)$$

其中  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ ;  $V$  表示模型可行解集合, 记  $V = \{ [p(t), s(t)] \mid 0 \leq p(t) \leq P_{\max}, 0 \leq s(t) \leq S_{\max} \}$ .

### 3 模型求解

引理 1 任给  $t \in [0, T]$ , 模型(6) ~ 模型(7)的最优解  $p^*(t)$  与  $s^*(t)$  为

$$p^*(t) = \begin{cases} P_{\max}, & \lambda_1(t) \leq \frac{1}{\beta} \\ 0, & \lambda_1(t) > \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

$s^*(t) =$

$$\begin{cases} S_{\max}, & \frac{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}{mS_{\max}}xr \geq S_{\max} \\ \frac{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}{mS_{\max}}xr, & 0 \leq \frac{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}{mS_{\max}}xr < S_{\max} \\ 0, & \frac{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}{mS_{\max}}xr < 0 \end{cases}$$

其中  $\lambda_1(t)$  与  $\lambda_2(t)$  满足以下关系

积概率表达式, 则  $Pr[s(t)]$  可写成以下形式

$$Pr[s(t)] = \frac{s(t)}{S_{\max}}$$

则消费者动态演化方程(2)与动态演化方程(3)可以写成以下形式

$$\frac{dy}{dt} = [\mu\theta(c, y) - \beta p(t)]y + r \frac{s(t)}{S_{\max}}x \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = -r \frac{s(t)}{S_{\max}}x + kx \quad (5)$$

其中  $S_{\max}$  表示服务提供商的公共健康信息投入程度上限;  $P_{\max}$  表示定制化消费者能够接受的服务价格上限. 综上所述, 本研究构建的在线健康信息服务动态定价问题可以表示成如下最优控制模型

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -p(t) + \lambda_1 [\beta p(t) - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y] \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = r\lambda_2 \frac{s(t)}{S_{\max}} - r\lambda_1 \frac{s(t)}{S_{\max}} - \lambda_2 k \end{cases}$$

边界条件为

$$\begin{cases} \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2(T) = 0 \end{cases}$$

证明 见附录.

由引理 1 可知  $p^*(t)$  和  $s^*(t)$  是取决于  $\lambda_1(t)$  与  $\lambda_2(t)$  的分段函数, 进一步可以证明  $p^*(t)$  和  $s^*(t)$  与健康信息服务的时间长度  $T$  有关. 为此定义

$$T_0 = \frac{1}{\beta P_{\max} - \mu \theta_0} \ln \left( \frac{\beta P_{\max}}{\mu \theta_0} \right) \quad (8)$$

$$T_1 = \frac{1}{\beta P_{\max} - 2\mu M} \ln \left( \frac{\beta P_{\max}}{2\mu M} \right) \quad (9)$$

显然  $T_0 > T_1$ .

具体证明见附录.

3.1  $T \geq T_0$  时定制化健康信息服务定价和公共健康信息投入程度最优策略

当  $T \geq T_0$  时, 也就是说某类健康信息服务时间较长时, 有以下定理.

定理 1 当  $T \geq T_0$  时, 存在满足以下关系的  $T_d$   
 $T - T_0 \leq T_d \leq T - T_1$  (10)

使得最优定制化健康信息服务定价为

$$p^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_d] \\ P_{\max}, & t \in [T_d, T] \end{cases}$$

当  $k < \min(\mu\theta_0 r)$  (称为低平台流量) 时, 最优公共健康信息服务投入程度满足

$$s^*(t) = \begin{cases} \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \frac{1 - e^{-(k-r)(T-t)}}{r - k} \frac{xr}{S_{\max}} > 0, & t \in [0, T_d] \\ 0, & t \in [T_d, T] \end{cases}$$

当  $k > \max(2\mu M r)$  (称为高平台流量) 时, 最优公共健康信息服务投入程度满足

$$s^*(t) \leq \begin{cases} s^*(T_d) e^{(T_d-t)r}, & t \in [0, T_d] \\ P_{\max} \frac{e^{(T-t)k} - e^{(T-d)r}}{k - r} \frac{xr}{m S_{\max}}, & t \in [T_d, T] \end{cases}$$

证明 见附录.

定理 2 当  $T \geq T_0$  且  $\mu\theta_0 \geq \beta P_{\max}$  时, 最优定制化健康信息服务价格也可表示为关于消费者数量  $y(t)$  的函数, 即

$$p^*(t) = \begin{cases} 0, & y < y(T_d) \\ P_{\max}, & y \geq y(T_d) \end{cases}$$

其中  $y(T_d)$  满足以下的关系

$$y_1 < y(T - T_0) < y(T_d) < y(T - T_1) < y_2$$

$y_1$  与  $y_2$  表达式如下

$$\begin{cases} y_1 = y_0 e^{\mu\theta_0(T-T_0)} \\ y_2 = y_0 e^{\mu M(T-T_1)} + x_0 \frac{e^{k(T-T_1)} - e^{\mu M(T-T_1)}}{k - \mu M} \end{cases}$$

证明 见附录.

定理 1 从服务时长视角探讨最优价格  $p^*(t)$ , 当服务时间较长 (大于  $T_0$ ) 时, 称为“长期健康信息服务”. 从收费策略的时间结构上来说, 整个服务期可以划分为  $[0, T_d]$  与  $[T_d, T]$  两个阶段, 在  $[0, T_d]$  阶段上价格为 0, 在  $[T_d, T]$  阶段上价格为消费者可接受价格上限. 将  $[0, T_d]$  阶段称为“免费体验期”, 将  $[T_d, T]$  阶段称为“收费期”, 如图 2 的横坐标所示 (当定制化服务消费者数量持续上升时).

定理 2 从定制化消费者数量视角探讨最优价格  $p^*(t)$ . 图 2 表示消费者数量  $y$  在不同收费阶段随时间的动态变化趋势, 同时也显示了消费者数量与动态收费策略时间结构之间的对应关系: 当消费者低于一定数量  $y_1$  时, 免费体验期仍应继续进行, 而当消费者逐渐增多, 达到一定数量  $y_2$  时, 服务提供商应结束免费体验期, 转为收费期. 由于在实际运营中消费者数量较易观测与记录, 因此服务提供商可以依据消费者数量来决定收费策略.

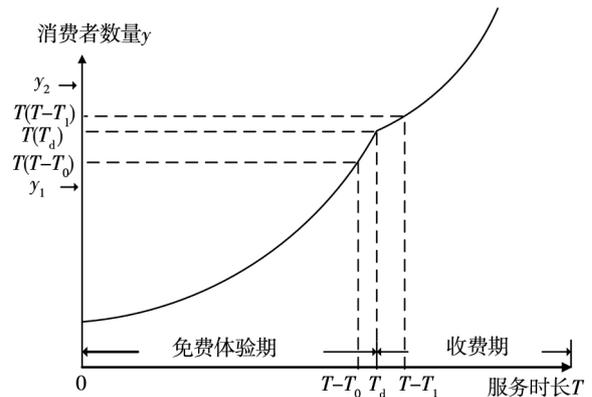


图 2 消费者数量与服务时长之间的关系图

Fig. 2 Relationship between number of consumers and service duration

当潜在消费者数量增长率较小时 (即  $k < \min(\mu\theta_0 r)$ ) 在“免费体验期”期间, 公共健康信息投入程度不低于与潜在消费者数量有关的下界. 而在“收费期”, 公共健康信息投入也是必不可少. 当平台流量不足以支撑定制化消费者的转换率时, 服务提供商便需要增大公共健康信息来吸引更多的消费者. 在整个服务期, 公共健康信息的投入一直没有间断, 可见其对服务提供商在网络推广与促销方面起着重要作用. 当潜在消费者数量增长率较大时 (即  $k > \max(2\mu M r)$ ) 时, 公共健康信息投入程度存在上界. 在“免费体验期”, 该上界与时间有关; 在“收费期”, 该上界与潜在消费者数量有关. 这是因为高流量平台能够带来更多的潜在消费者, 这个结果也解释了目前运营较好的服务提供商大多选择例如“微信”或者“淘宝”之类的高流量平台.

综上所述, 对长期健康信息服务而言, 服务提供商在进行服务收费之前应该先设置一定时长的

免费体验期,吸引足够数量的消费者,聚集平台人气,从而提升服务提供商知名度与服务质量,为后续的收费期做准备.而一旦聚集了足够的消费者数量,服务提供商应结束免费体验期,转而进入收费期.在收费期阶段,由于服务时间长度有限,因而在收费期内服务提供商应尽可能高地设置服务价格,从而获得最大利润. Demirezen 等<sup>[41]</sup>也得到类似的结论.现实中这种分阶段定价策略也被许多服务提供商所采用.本研究的贡献在于给出了具体的免费体验期长度,对实际应用具有参考价值.

总之,长期服务下的最优定价策略具备以下几个方面特点:首先,从定价机制结构上来说服务提供商应先为消费者设置“免费体验期”,然后才进入“收费期”;其次,“免费体验期”应具有一定时间长度,使得服务提供商吸引足够数量的消费者;最后在收费期阶段,服务提供商应该尽可能高地设置服务价格.

### 3.2 $T < T_1$ 时定制化健康信息服务定价和公共健康信息投入程度最优策略

当  $T < T_1$  时,也就是说某类健康信息服务的时间较短时,有以下定理.

**定理3** 当  $T < T_1$  时,在整个服务期  $[0, T]$ ,最优定制化健康信息服务定价为

$$p^*(t) = P_{\max}$$

存在  $[a, b] \subset [0, T]$ ,使得  $\forall t \in [a, b]$ ,最优公共健康信息服务投入程度满足

$$s^*(t) > 0$$

当  $k > \max(2\mu M, r)$  (称为高平台流量)时,最优公共健康信息服务投入程度满足

$$s^*(t) \leq P_{\max} \frac{e^{(T-t)k} - e^{(T-t)r}}{k - r} \frac{xr}{m S_{\max}}, \forall t \in [0, T]$$

证明 见附录.

相较于长期健康信息服务,当服务时间较短(小于  $T_1$ )时,称为“短期健康信息服务”.短期健康信息服务主要针对消费者在特定时间内健康管理需求,目前具有较大的市场潜力.例如,特别为孕妇提供的备孕服务、产前管理以及产后调理等.与长期健康信息服务不同之处在于这类服务通常持续几个星期至1年左右,且不具备周期性,消费者通常一次性接受服务,一般不存在持续反复的消费行为.根据定理3,对短期健康信息服务来说,没有必要设置“免费体验期”,可能的原因是由于服务时间较短,消费者未必有足够的时间来体验服务质量,也不会造成过大的经济负担.以备孕服务为例,准母亲为了胎儿的健康通常会有很大的意愿接受服务,顺利情形下需要的服务时间较短,因此消费者通常没有足够的时间来检验服务质量或是更换其他的服务提供商.再者,较短的服务时间对消费行为也难以起到显著作用.因此没有必要设置“免费体验期”,最优的定价策略是在整个服务期间收取消费者可接受的价格上限.

关于公共健康信息投入程度,不管平台流量有多高,在整个服务期间,总存在某个时间段内需要公共健康信息来吸引消费者,说明即使平台流量很高,服务提供商还是需要依靠公共健康信息来吸引消费者.这也从一定程度上解释了现实中许多在线健康信息服务提供商在已经选择了高流量平台的前提下,仍然持续不断地发布公共健康信息进行网络推广与促销.这也进一步论证了公共健康信息的必要性.

综上,最优定制化健康信息服务价格  $p^*(t)$ 、最优公共健康信息投入程度  $s^*(t)$  与服务时长之间的关系如表2所示.

表2  $p^*(t)$ 、 $s^*(t)$  与服务时间长度关系

Table 2 Relation of  $p^*(t)$ 、 $s^*(t)$  and service time length

在线健康信息服务		长期服务		短期服务
时间 $t$		$[0, T_d]$	$[T_d, T]$	$[0, T]$
最优服务价格		$p^*(t) = 0$		$p^*(t) = P_{\max}$
最优投入程度	高平台流量	$s^*(t) \leq s^*(T_d) e^{(T_d-t)r}$		$s^*(t) \leq P_{\max} \frac{e^{(T-t)k} - e^{(T-t)r}}{k - r} \frac{xr}{m S_{\max}}$
	低平台流量	$s^*(t) > \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \frac{1 - e^{(k-r)(T-t)}}{r - k} \frac{xr}{S_{\max}}$		$s^*(t) > 0$

以上探讨了不同服务时间长度与平台流量条件下的最优服务定价与公共健康信息投入程度策略, 得到以下结论.

1) 长期健康信息服务在收费之前应该为消费者提供一定时间长度的“免费体验期”, 从而积累消费者数量, 提升服务效果和知名度. 当消费者积累到一定数量后, 服务提供商以消费者可接受上限为最优价格.

2) 公共健康信息投入程度范围与潜在消费者数量以及服务提供商依托平台流量有关.

3) 不管服务时间长度与平台流量如何变化, 公共健康信息的投入总是必不可少.

## 4 灵敏度分析

本节讨论消费者可接受的定制化健康信息服务价格上限、服务时间长度等对服务提供商利润的影响.

定理 4 如果式 (6) 和式 (7) 所示模型同时满足下列条件: 1)  $x_0 = 0$  或  $r = 0$ , 2)  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} < \frac{-2}{y} \times$

$\frac{\partial \theta}{\partial y}$  则有  $\frac{dT_d}{dP_{\max}} > 0$ .

证明 见附录.

定理 4 探讨健康信息服务上线初期的定价策略与“免费体验期”、“收费期”的时间分配优化问题. 当初上线的健康信息服务面临潜在消费者数量较少且潜在消费者向定制化消费者的转换效应较弱(如条件 1)所示), 且信息服务质量函数是凸函数, 其二阶导数与  $y$  满足一定条件(如条件 2)所示)时, 服务提供商可以对具有更高价格上限的消费者适当延长“免费体验期”.

定理 4 表示服务提供商可以根据不同的消费者特征来设置不同时间长度的“免费体验期”, 对收入更高或者服务购买意愿更大的消费者应适当延长“免费体验期”. 使这部分人群更多体验在线信息服务, 从而聚集更多数量的消费者, 获得更高的收益. 从某种角度讲, 延长“免费体验期”实质

上也相当于提升了定制化信息服务质量. 虽然定理 4 的结论目前在健康信息服务中尚未应用, 但是许多线下健身培训服务机构却采取类似的措施, 针对高收入群体设置 VIP 服务, 提供更长时间的免费体验期, 以提高服务口碑, 从而通过后期服务获得更大的收益.

下面讨论单位服务时间长度的平均利润. 令  $AJ(p(t), s(t))$  表示服务时间  $[0, T]$  过程中的平均利润, 则有

$$AJ(p(t), s(t)) = \frac{J(p(t), s(t))}{T} \\ = \frac{\int_0^T \left[ p(t)y - \frac{1}{2}ms(t)^2 \right] dt - c}{T} \quad (11)$$

可以得到以下结论.

定理 5 如果  $y(T) > \frac{\int_0^T y dt}{T}$ , 则

$$\sup_{(p,s) \in V_{T+\Delta T}} AJ(p,s) > \sup_{(p,s) \in V_T} AJ(p,s) \\ \text{从而 } \frac{d \sup_{(p,s) \in V_T} AJ(p,s)}{dT} > 0.$$

证明 见附录.

在一些长期服务中, 有些时候并不能确定服务时间长度, 对服务提供商来说, 选择合适的服务时间长度来获得最优的平均利润尤为重要. 定理 5 探讨了不确定服务时间长度下服务提供商平均利润的优化问题, 服务提供商可以根据定制化服务消费者数量来决定应当结束或是继续提供服务. 如果当前定制化消费者数量大于消费者平均数量, 则延长服务时间能够增加服务提供商平均利润. 这个结论可以为服务提供商选择服务结束时间提供理论支持和参考. 以国内外知名的健康信息服务提供商 FitTime (<http://www.rjFitTime.com/>) 为例, FitTime 于 2013 年开始了名为“减脂营”的在线健康信息服务. FitTime 原本打算进行为期 1 年的服务, 但随着人数不断增加, FitTime 开始不断延长服务时间<sup>③</sup>, 从某种程度上验证了定理 5 的正确性.

③ <https://news.pedaily.cn/201709/419901.shtml>

### 5 数值算例

通过数值算例来分析验证模型性质. 设服务

质量函数为以下形式

$$\theta(c, y) = 0.8(1 - e^{-cy}) + \theta_0 \quad (12)$$

容易验证  $\theta$  满足 2.2 节中的 3 个假设条件, 其余参数赋值见表 3.

表 3 模型参数

Table 3 Model parameters

$P_{\max}$	$S_{\max}$	$\mu$	$m$	$c$	$k$	$M$	$y_0$	$x_0$	$\theta_0$	$r$
10	6	1	0.1	2	0.5	0.9	2	2	0.1	1

首先, 根据消费者价格敏感度设置不同的情景  $\beta$  表示定制化消费者增长率相对于服务价格敏感系数, 反映了消费者对于价格的敏感程度, 从式 (2) 中可以看出  $\beta$  越大, 消费者对价格越敏感. 考虑两类不同的情景, 令情景 1 中的  $\beta=0.06$ , 情景 2 中的  $\beta=0.12$ , 表明情景 2 下消费者具有更大的价格敏感度. 其次, 考虑不同服务时长的结果. 令  $T=5$  与  $T=0.65$ . 当  $T=5$  时, 计算得到情景 1 中的  $T_0$  与  $T_1$  分别为  $T_0=3.58$ ,  $T_1=0.92$ , 情景 2 中的  $T_0$  与  $T_1$  分别为

$T_0=2.26$ ,  $T_1=0.68$ . 在两种情景下, 都有  $T > T_0$ , 说明  $T=5$  为长期服务. 同样可以验证, 当  $T=0.65$  时两种情景均为短期服务. 本研究结合四阶龙格—库塔 (Runge-Kutta) 数值计算与边界值残差收敛算法求解式 (6) 和式 (7) 所示微分方程边界值模型. 为了更好的展示数值结果, 分别用图表示长期服务 ( $T=5$ ) 和短期服务 ( $T=0.65$ ) 的计算结果.

图 3 和图 4 表示定制化消费者 (上部分) 与潜在消费者 (下部分) 数量的动态演化轨迹.

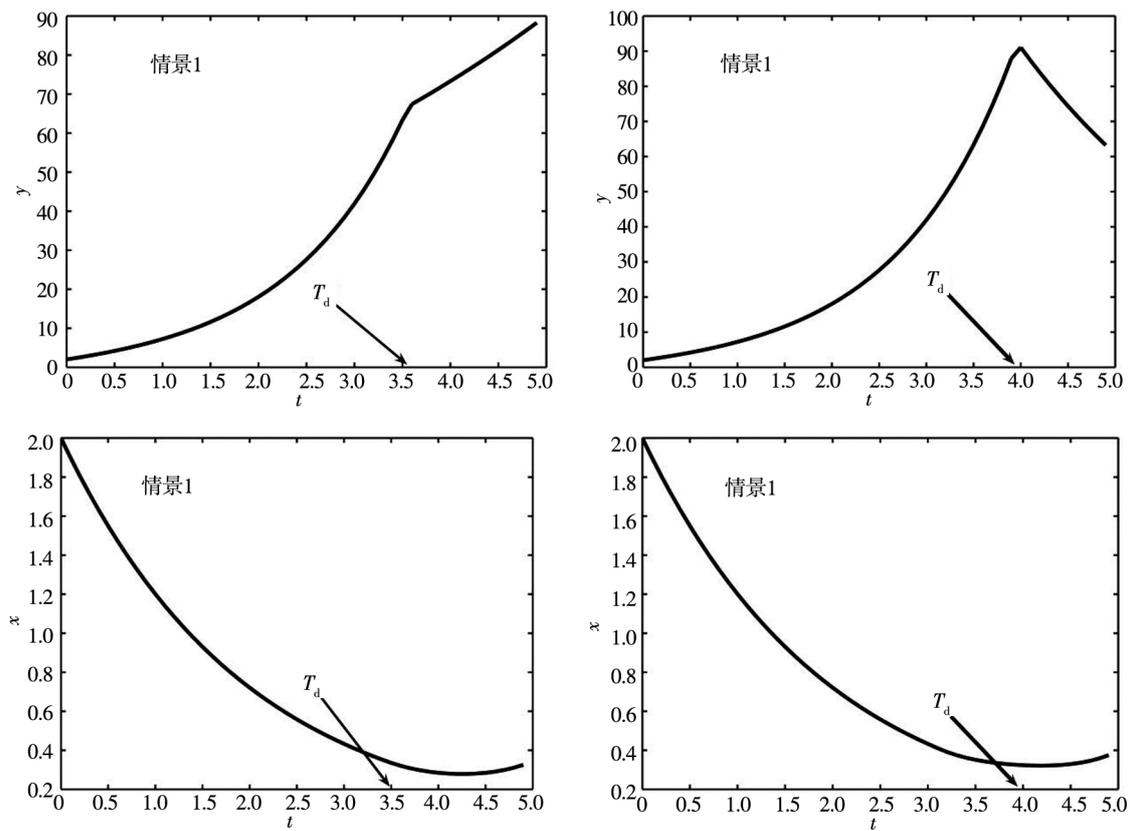


图 3(a) y 与 x 演化轨迹(长期服务)

Fig. 3(a) Trajectory of y and x under long-term service

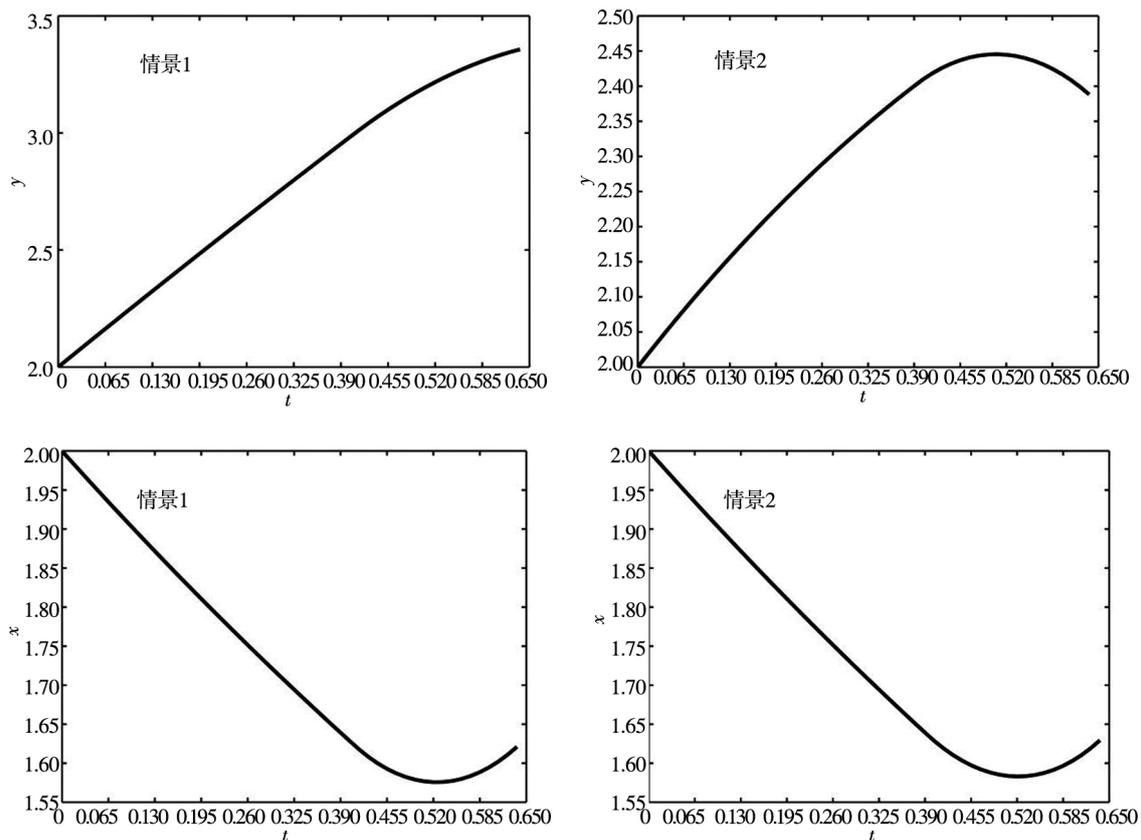


图 3(b)  $y$  与  $x$  演化轨迹(短期服务)

Fig. 3(b) Trajectory of  $y$  and  $x$  under short-term service

根据定理 1 中式(10) 可以计算得到情景 1 中的  $T_d$  满足  $1.42 \leq T_d \leq 4.08$  ,情景 2 中的  $T_d$  满足  $2.74 \leq T_d \leq 4.32$  .而图 3(a) 和图 4(a) 表明长期服务( $T=5$ ) 时情景 1 中  $T_d$  约在 3.5 附近 ,情景 2 中  $T_d$  约在 3.8 附近 ,表明了两种情景下  $T_d$  都满足定理 1 所示范围 ,从而验证了定理 1 的正确性.

从图 3(a) 可见 ,在“免费体验期”期间定制化消费者数量增加 ,而潜在消费者的数量减少 ,展示出消费者类型的动态转换过程. 情景 1 中定制化消费者数量一直呈递增的态势 ,而情景 2 中的定制化消费者数量在“收费期”呈下降趋势. 从图 3(b) 可见 ,虽然没有“免费体验期” ,但是短期服务中两类消费者数量变化趋势展现出与长期服务类似的结果 ,可见消费者价格敏感度对消费者数量具有明显影响.

图 4(a) 表示长期服务下最优的定制化信息服务与公共健康信息投入程度轨迹 ,通过动态价

格曲线显示了“免费体验期”的时间跨度. 图 4(b) 显示出定制化服务价格为常量 ,这两个结果都验证了上文解析结果的正确性. 同时还可看出在长期和短期服务下 ,不论消费者价格敏感度如何 ,公共健康信息投入在整个服务过程中都是必不可少的. 可见公共健康信息在健康信息服务过程中的重要性.

图 5 ~ 图 8 显示模型参数对公共健康信息服务投入程度的影响. 图 5 显示了消费者可接受价格上限对公共健康信息投入程度的影响 ,在长短期服务和两种不同情景下  $s^*(t)$  均展现出类似的轨迹. 从图 5(a) 中可以看出 ,长期服务中 , $P_{max}$  对公共健康信息投入程度的影响不大 ,说明当消费者的收入程度与购买服务意愿发生变化时 ,服务提供商不需要过多地调整相应的公共健康信息投入程度 ,也说明模型得到的最优公共健康信息投入程度策略能够较好适应不同特征的消费人群. 从图 5(b) 可看

出,短期服务中,  $P_{\max}$  对公共健康信息投入程度的影响要大于长期服务. 说明短期服务中,服务提供

商应该更加关注消费者的购买意愿与收入程度,并对公共健康信息投入程度作相应调整.

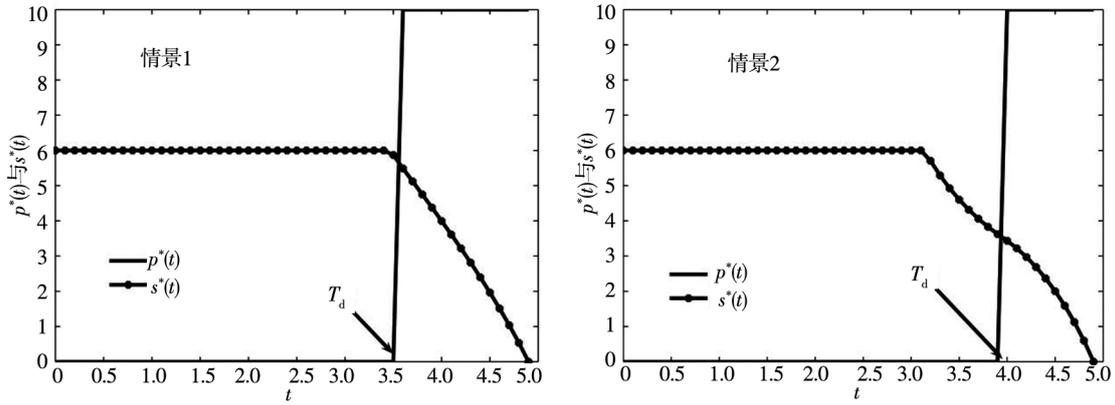


图 4(a)  $p^*(t)$  与  $s^*(t)$  演化轨迹(长期服务)

Fig. 4(a) Trajectory of  $p^*(t)$  and  $s^*(t)$  under long-term service

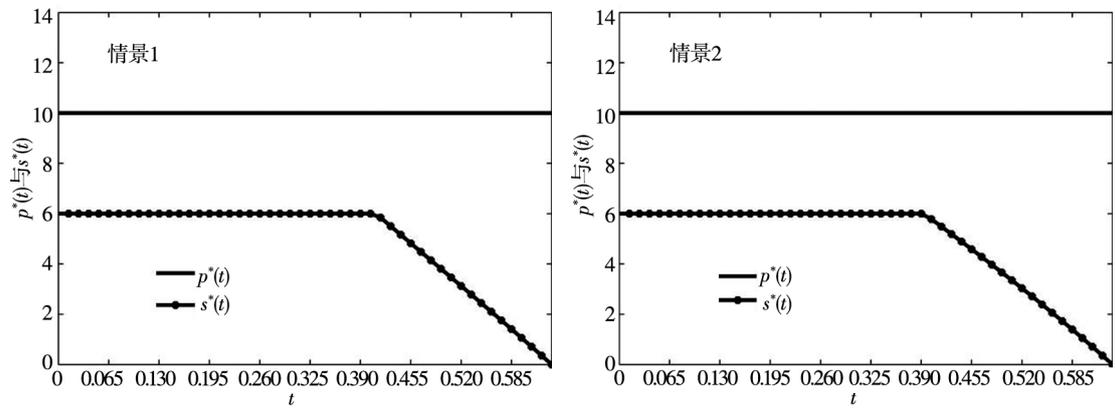


图 4(b)  $p^*(t)$  与  $s^*(t)$  演化轨迹(短期服务)

Fig. 4(b) Trajectory of  $p^*(t)$  and  $s^*(t)$  under short-term service

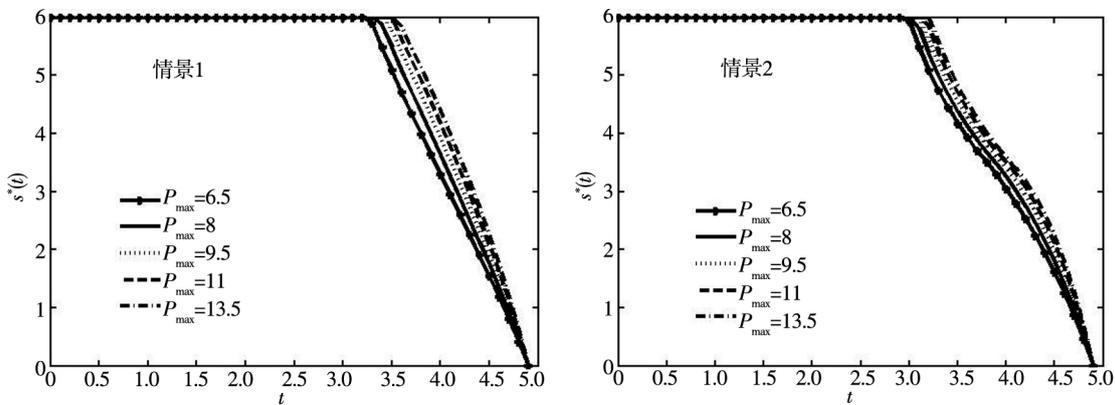


图 5(a) 不同  $P_{\max}$  条件下最优公共健康信息投入程度(长期服务)

Fig. 5(a) Optimal level of public health information input under different  $P_{\max}$  under long-term service

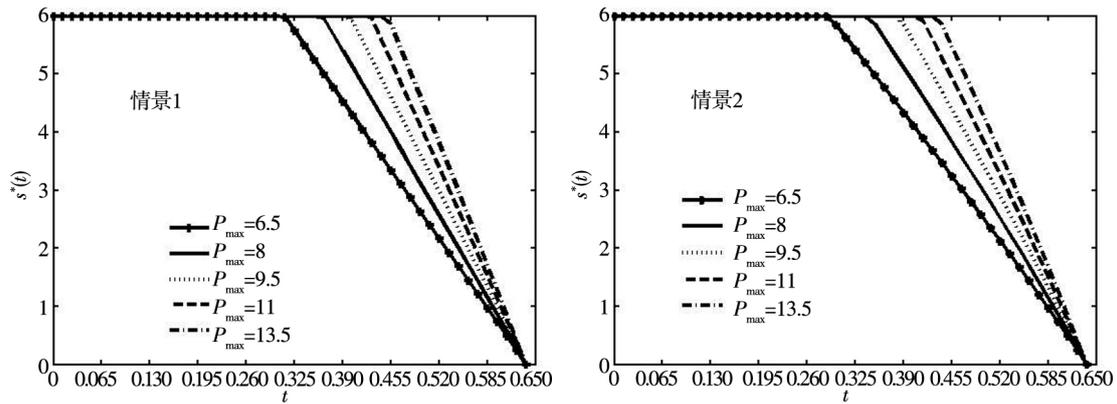


图 5(b) 不同  $P_{max}$  条件下最优公共健康信息投入程度(短期服务)

Fig. 5(b) Optimal level of public health information input under different  $P_{max}$  under short-term service

图 6 与图 7 显示出公共健康信息服务投入成本系数  $m$  与潜在消费者数量增长率  $k$  对公共健康信息服务具有显著的影响,但表现出相反的作用规律. 图 6 显示出  $s^*(t)$  随着  $m$  的增加而增加. 表明随着公共健康信息服务投入成本系数的

增加 服务提供商应减少公共健康信息投入以控制推广成本. 其原因是  $m$  增加表明公共健康信息投入的推广成本增大,因此服务提供商可以通过缩减公共健康信息投入,在不影响推广效果的前提下减小成本 提升总利润.

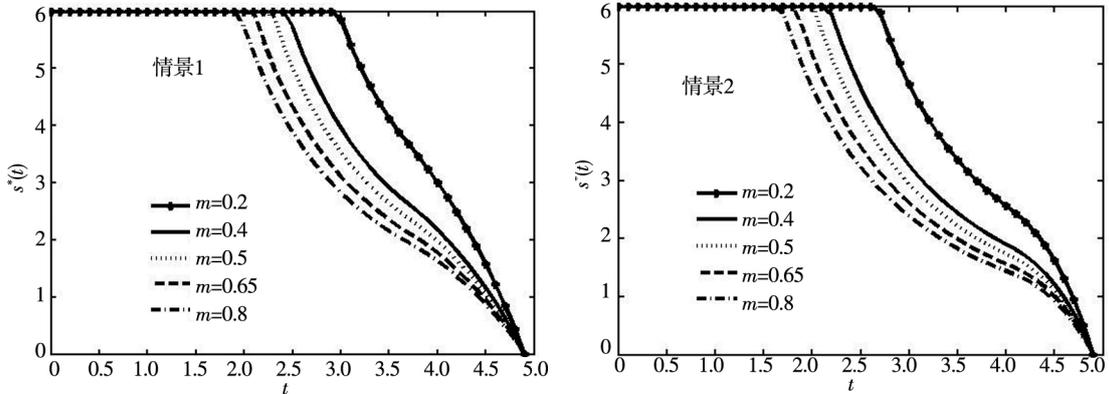


图 6(a) 不同成本系数条件下的最优公共健康信息投入程度(长期服务)

Fig. 6(a) Optimal public health information input level under different cost efficiency under long-term service

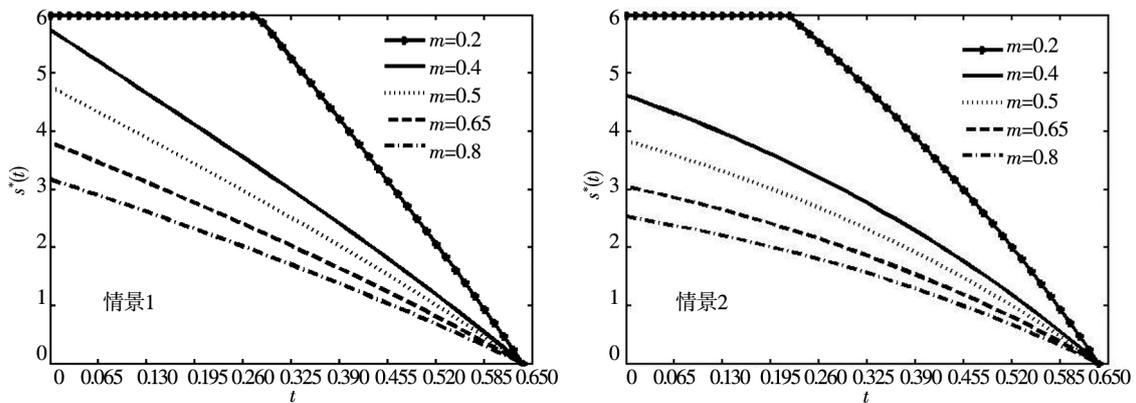


图 6(b) 不同成本系数条件下的最优公共健康信息投入程度(短期服务)

Fig. 6(b) Optimal public health information input level under different cost efficiency under short-term service

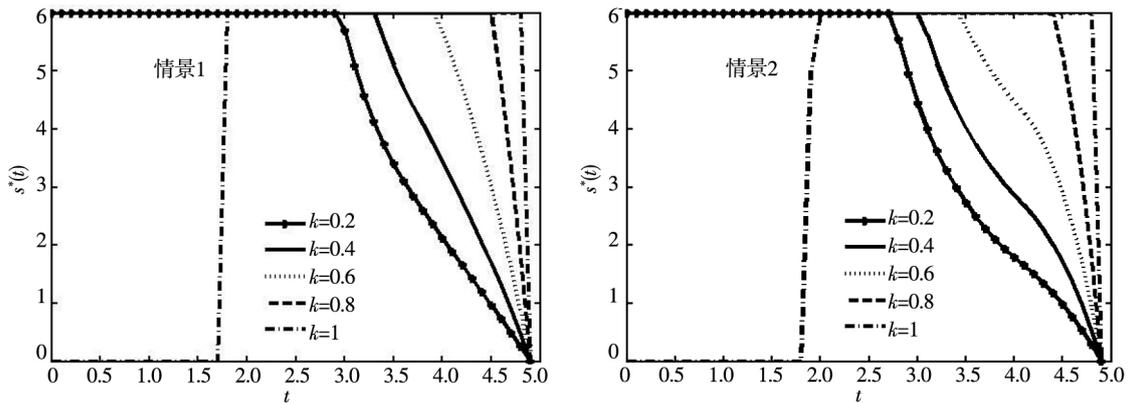


图7(a) 潜在消费者数量增长率k对最优公共健康信息投入程度的影响(长期服务)

Fig. 7(a) Influence of potential customer increase rate  $k$  on optimal public health information input level under long-term service

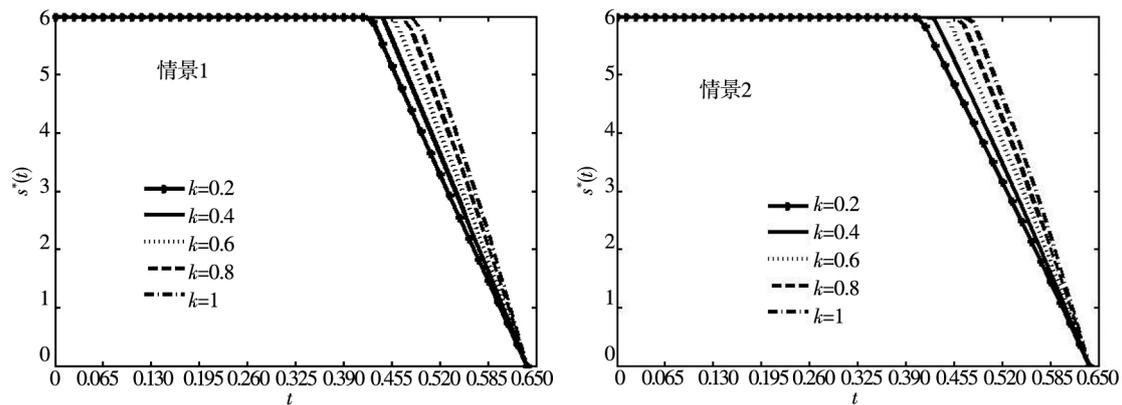


图7(b) 潜在消费者数量增长率k对最优公共健康信息投入程度的影响(短期服务)

Fig. 7(b) Influence of potential customer increase rate  $k$  on optimal public health information input level under short-term service

图7显示在两种情景下,当潜在消费者数量增长率 $k$ 在一定范围内变动时(0.2~0.8)随着 $k$ 的增长,服务提供商应增加公共健康信息投入。与 $m$ 不同的是虽然 $k$ 的增加表明消费者数量增长更快,但是相对应的最优策略却不是减少而是继续增加公共健康信息的投入。可能的原因是当潜在消费者数量在一定范围内增速变大时,同样的公共健康信息投入程度更加有效,需要用更高的转换率来与之协调,因此服务提供商需要更大的公共健康信息投入程度来与之相匹配。这与现实中的情形也较为一致,近年来随着互联网技术的提升,各类平台流量逐渐增加,各种在线健康信息服务的潜在消费者数量也随之增加,但是服务提供商对于公共健康信息的投入程度在一定范围内却非减反增,这从某种程度上也验证了上述结果的正确性。

另外,对比分析表明,长、短期服务下最优公共健康信息投入程度对成本系数和潜在消费

者数量增长率具有不同的敏感度。对比图6(a)与图6(b)可见,短期服务下 $s^*(t)$ 受到 $m$ 的影响较大,相反,对比图7(a)与图7(b)可见,长期服务下 $s^*(t)$ 受到潜在消费者数量增长率 $k$ 的影响较大。因此,对服务提供商而言,短期服务时应该更加关注公共健康信息服务投入成本系数,而长期服务应更加关注“平台流量”效应引发的潜在消费者数量增长率。

最大平均利润随服务时间长度与前期固定成本 $c$ 的变化关系,以及根据式(11)计算平均成本 $AJ$ 得到结果如图8所示。

图8显示出平均利润受到服务时长 $T$ 与前期固定成本 $c$ 的显著影响。在两种不同的情景下平均利润均随着服务时长 $T$ 的增长而增加。说明在一定范围内,长期服务比短期服务更具优势。从图8(a)可看出,长期服务条件下,平均利润随着 $c$ 的增长先增大后减小,说明长期服务存在最优的前期固定成本。图8(b)表明对短期服务来说,平均

利润随着  $c$  的增长而减小,因此在一定范围内减

少前期固定成本能够带来更大的平均利润.

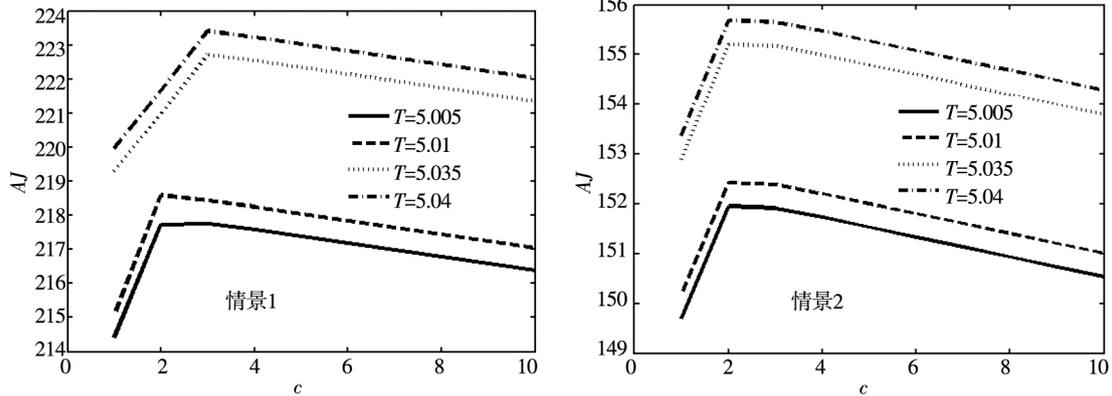


图 8(a) 不同服务时长与前期固定成本条件下的平均利润(长期服务)

Fig. 8(a) Average profit under different service time and Pre-fixed cost under long-term service

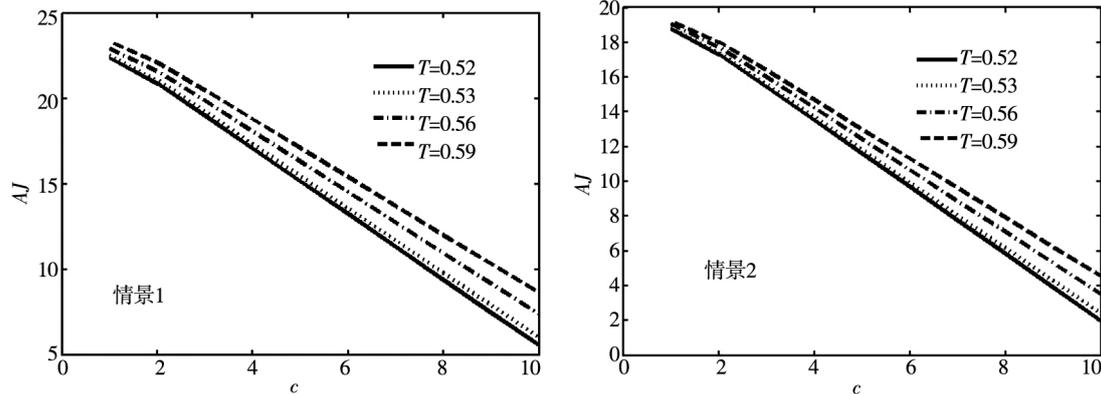


图 8(b) 不同服务时长与前期固定成本条件下的平均利润(短期服务)

Fig. 8(b) Average profit under different service time and Pre-fixed cost under short-term service

### 6 结束语

随着互联网技术的迅速发展,在线健康信息服务逐渐成为影响居民日常生活和健康管理的重要方式.本研究考虑基于互联网平台在线健康信息服务动态定价与推广策略.首先考虑免费公共健康信息和收费定制化健康信息两类不同性质的在线信息,研究两类信息服务消费者数量的动态演化与类型转换机理.进一步考虑信息服务的“网络外部效应”,构建基于利润最大化的信息服务定价机制,最终表达成为最优控制模型形式.运用 Pontryagin 极大值原理解析模型性质,分析最优定价机制和推广策略的作用机理,并通过灵敏度分析为信息服务提供商提出了相应的管理建议.最后通过数值算例验证了模型的正确性和有效性,得到主要结论如下:

1) 定制化服务的最优定价策略与服务时间

长度有关.对长期定制化服务,信息服务提供商在收费之前应该给予一定时间长度的“免费体验期”,在聚集了足够消费者数量后再进行收费;对短期信息服务,由于消费者难以在短时间内对服务质量和价格做出比较和选择,因此没有必要设置“免费体验期”.

2) 互联网平台潜在消费者数量的增长率对公共健康信息投入程度存在显著影响,可以根据不同的增长率来计算相应的公共健康信息投入程度范围,但是无论潜在消费者数量增长率如何变化,公共健康信息投入总是必不可少.

3) 在新服务上线初期,信息服务提供商可以对高收入消费者延长“免费体验期”来提高总利润.

4) 在不确定服务时长条件下,信息服务提供商可以根据定制化消费者的数量来决定是否结束服务.

本研究仅考虑 1 个在线健康信息服务提供商,没有考虑同一平台上多个信息服务提供商

之间的竞争对信息服务价格的影响,也忽略了消费者之间在服务偏好、可接受价格上限的个体随机差异.在后续研究中,将在时空上做进一步扩

展,考虑多个信息服务提供商之间的竞争与合作关系.运用微分博弈理论,探讨多个服务提供商在同一互联网平台的动态定价与推广策略.

#### 参 考 文 献:

- [1]杜少甫,谢金贵,刘作仪. 医疗运作管理: 新兴研究热点及其进展[J]. 管理科学学报, 2013, 16(8): 1-19.  
Du Shaofu, Xie Jingui, Liu Zuoyi. Progress and prospects in an emerging hot topic: Healthcare operations management [J]. Journal of Management Sciences in China, 2013, 16(8): 1-19. (in Chinese)
- [2]Enayati S, Mayorga M E, Rajagopalan H K, et al. Real-time ambulance redeployment approach to improve service coverage with fair and restricted workload for EMS providers[J]. Omega, 2018, 79: 67-80.
- [3]Yang Y, Zhang X, Lee P Kn C. Improving the effectiveness of online healthcare platforms: An empirical study with multi-period patient-doctor consultation data[J]. International Journal of Production Economics, 2019, 207: 70-80.
- [4]Zhong X, Hoonakker P, Bain P A, et al. The impact of e-visits on patient access to primary care[J]. Health Care Management Science, 2017, 21(4): 1-17.
- [5]Hejazi T H, Badri H, Yang K. A reliability-based approach for performance optimization of service industries: An application to healthcare systems[J]. European Journal of Operational Research, 2019, 273(3): 1016-1025.
- [6]Wang D, Muthuraman K, Morrice D. Coordinated patient appointment scheduling for a multistation healthcare network[J]. Operations Research, 2019, 67(3): 599-618.
- [7]Ferreira D C, Marques R C. Do quality and access to hospital services impact on their technical efficiency? [J]. Omega, 2019, 86: 218-236.
- [8]Sundararajan A. Nonlinear pricing of information goods[J]. Management Science, 2004, 50(12): 1660-1673.
- [9]Chen Y J, Huang K W. Pricing data services: Pricing by minutes, by Gigs, or by Mega Bytes per second? [J]. Information Systems Research, 2016, 27(3): 596-617.
- [10]刘志勇,李敏强,寇纪淞. 网络外部性因素影响下信息产品版本化策略研究[J]. 管理科学学报, 2015, 18(7): 13-26.  
Liu Zhiyong, Li Minqiang, Kou Jisong. Versioning information products in the presence of network externality [J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(7): 13-26. (in Chinese)
- [11]Liu Z, Li M, Kou J. Selling information products: Sale channel selection and versioning strategy with network externality [J]. International Journal of Production Economics, 2015, 166: 1-10.
- [12]Chellappa R K, Mehra A. Cost drivers of versioning: Pricing and product line strategies for information goods[J]. Management Science, 2017, 64(5): 2164-2180.
- [13]Bimpikis K, Crapis D, Tabbaz-Salehi A. Information sale and competition[J]. Management Science, 2019, 65(6): 2646-2664.
- [14]Wu S Y, Hitt L M, Chen P Y, et al. Customized bundle pricing for information goods: A nonlinear mixed-integer programming approach[J]. Management Science, 2008, 54(3): 608-622.
- [15]Dou Y, Hu Y J, Wu D J. Selling or leasing? Pricing information goods with depreciation of consumer valuation[J]. Information Systems Research, 2017, 28(3): 585-602.
- [16]王春苹,南国芳,李敏强,等. 寡头市场信息产品与服务的最优定价策略[J]. 管理科学学报, 2016, 19(3): 92-106.  
Wang Chunping, Nan Guofang, Li Minqiang, et al. Optimal pricing for information goods and complementary services in duopoly markets [J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(3): 92-106. (in Chinese)
- [17]Bai J, So K C, Tang C S, et al. Coordinating supply and demand on an on-demand service platform with impatient customers [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2018, 21(3): 556-570.
- [18]Kostami V, Kostamis D, Ziya S. Pricing and capacity allocation for shared services[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2017, 19(2): 230-245.
- [19]Maglaras C, Yao J, Zeevi A. Optimal price and delay differentiation in large-scale queueing systems [J]. Management Science, 2017, 64(5): 2427-2444.
- [20]Yang L, Guo P, Wang Y. Service pricing with loss-averse customers[J]. Operations Research, 2018, 66(3): 761-777.
- [21]Xu X, Munson C L, Zeng S. The impact of e-service offerings on the demand of online customers[J]. International Journal of Production Economics, 2017, 184: 231-244.
- [22]Liu Y, Cooper W L. Optimal dynamic pricing with patient customers[J]. Operations Research, 2015, 63(6): 1307-1319.

- [23] Cao P, Fan M, Liu K. Optimal dynamic pricing problem considering patient and impatient customers purchasing behaviour [J]. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(22): 6719–6735.
- [24] Ødegaard F, Wilson J G. Dynamic pricing of primary products and ancillary services [J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, 251(2): 586–599.
- [25] He Q C, Chen Y J. Dynamic pricing of electronic products with consumer reviews [J]. *Omega*, 2018, 80: 123–134.
- [26] Chen J, Dong M, Rong Y, et al. Dynamic pricing for deteriorating products with menu cost [J]. *Omega*, 2018, 75: 13–26.
- [27] Xiao G, Yang N, Zhang R. Dynamic pricing and inventory management under fluctuating procurement costs [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2015, 17(3): 321–334.
- [28] Otero D F, Akhavan-Tabatabaei R. A stochastic dynamic pricing model for the multiclass problems in the airline industry [J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 242(1): 188–200.
- [29] Borgs C, Candogan O, Chayes J, et al. Optimal multiperiod pricing with service guarantees [J]. *Management Science*, 2014, 60(7): 1792–1811.
- [30] 田林, 徐以汎. 基于顾客行为的企业动态渠道选择与定价策略 [J]. *管理科学学报*, 2015, 18(8): 39–51.  
Tian Lin, Xu Yifan. Dynamic channel selection and pricing based on customer behavior [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2015, 18(8): 39–51. (in Chinese)
- [31] 张新鑫, 申成霖, 侯文华. 考虑竞争者进入威胁的易逝品动态定价机制 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(10): 34–47.  
Zhang Xinxin, Shen Chenglin, Hou Wenhua. Dynamic pricing for perishable product considering the threat of entry and consumer behaviors [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(10): 34–47. (in Chinese)
- [32] Batur D, Ryan J K, Zhao Z, et al. Dynamic pricing of wireless internet based on usage and stochastically changing capacity [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2019, 21(4): 833–852.
- [33] Misra K, Schwartz E M, Abernethy J. Dynamic online pricing with incomplete information using multiarmed bandit experiments [J]. *Marketing Science*, 2019, 38(2): 226–252.
- [34] Huang G, Luo H, Xia J. Invest in information or wing it? A model of dynamic pricing with seller learning [J]. *Management Science*, 2019, 65(12): 5556–5583.
- [35] Chutani A, Sethi S P. Dynamic cooperative advertising under manufacturer and retailer level competition [J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 268(2): 635–652.
- [36] Karray S, Martín-Herrón G. Fighting store brands through the strategic timing of pricing and advertising decisions [J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 275(2): 635–647.
- [37] 毛照昉, 刘鹭, 李辉. 考虑售后服务合作的双渠道营销定价决策研究 [J]. *管理科学学报*, 2019, 22(5): 47–56.  
Mao Zhaofang, Liu Lu, Li Hui. Pricing decision of a dual channel under after-sales service cooperation [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(5): 47–56. (in Chinese)
- [38] 谢家平, 夏宇, 梁玲, 等. 产品后市场服务渠道选择: 垂直式或网络化? [J]. *管理科学学报*, 2019, 22(5): 31–46.  
Xie Jiaping, Xia Yu, Liang Ling, et al. Channel selection in service aftermarket: Vertical or networked? [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2013, 16(8): 1–19. (in Chinese)
- [39] Jena S K, Meena P L. Price and service competition in a tourism supply chain [J]. *Service Science*, 2019, 11(4): 279–291.
- [40] 周雄伟, 蔡丹, 李世刚, 等. 基于网络外部性和质量差异化的产品定价策略 [J]. *管理科学学报*, 2019, 22(8): 1–16.  
Zhou Xiongwei, Cai Dan, Li Shigang, et al. Monopoly pricing strategy of quality-differentiated products with network externality [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(8): 1–16. (in Chinese)
- [41] Demirezen E M, Kumar S, Sen A. Sustainability of healthcare information exchanges: A game-theoretic approach [J]. *Information Systems Research*, 2016, 27(2): 240–258.
- [42] Fleming W, Rishel R. *Deterministic and Stochastic Optimal Control* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

## Dynamic pricing and promotion strategy of online health information service

LIN Xu-xun<sup>1,2</sup>, WANG Hai-yan<sup>1</sup>

1. School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 211189, China;

2. Business School of Changzhou University, Changzhou 213164, China

**Abstract:** Online health information service has increasingly become an effective means for health manage-

ment. It is widely concerned by people from all walks of life. In order to solve the dynamic pricing and promotion strategy of online health information service, this paper considers an online health information service provider, which simultaneously provides customized health information service and free public health information service. Aiming at maximizing the profit of online health information service providers, based on the differential dynamics theory, this paper analyzes the dynamic conversion characteristics between consumers of free public health information and customized health information service, and constructs an optimal control model of dynamic pricing mechanism for health information service. The results show that for online health information service with long service periods, giving consumers a certain period of ‘free-charge period’ before charging service can increase the optimal profit of online information service providers. However, for online health service with short service periods, it is not necessary to set the ‘free-charge period’. Also, both the growth rate of potential customers of online health information service providers and the length of service time have significant impacts on the degree of public health information delivery. At the initial stage of online health information service, the service providers can get more profits by appropriately extending the ‘free-charge period’ for high-income consumers. All these conclusions are valuable for health information service providers to make service pricing and promotion strategies.

**Key words:** online health information service; customized and public healthcare information service; dynamic pricing and promotion strategy; optimal control

附录

引理 1 证明

根据 Fleming 与 Rishel<sup>[42]</sup> 的最优控制理论可以得到模型(6)和模型(7)的哈密尔顿方程(Hamilton Function)

$$H(t, y, p, s) = p(t)y - \frac{1}{2}ms(t)^2 + \lambda_1(t) \left\{ [\mu\theta(c, y) - \beta p(t)]y + r \frac{s(t)}{S_{\max}}x \right\} + \lambda_2(t) \left\{ -r \frac{s(t)}{S_{\max}}x + kx \right\}$$

对决策变量求导得到

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = y - y\lambda_1(t)\beta \\ \frac{\partial H}{\partial s} = -ms(t) + \lambda_1(t)r \frac{x}{S_{\max}} - \lambda_2(t)r \frac{x}{S_{\max}} \end{cases}$$

因为  $0 \leq p(t) \leq P_{\max}$  不难得到  $p^*(t)$  的表达式 因为

$$\begin{cases} p(t) = P_{\max}, & \frac{\partial H}{\partial p} \geq 0 \\ p(t) = 0, & \frac{\partial H}{\partial p} < 0 \end{cases}$$

又因为  $y > 0$  所以  $\frac{\partial H}{\partial p} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_1(t)\beta \leq 1, \frac{\partial H}{\partial p} < 0 \Leftrightarrow \lambda_1(t)\beta > 1$ . 由此可得

$$\begin{cases} p^*(t) = P_{\max}, & \lambda_1(t) \leq \frac{1}{\beta} \\ p^*(t) = 0, & \lambda_1(t) > \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

类似可以得到  $s^*(t)$  表达式如引理 1 所示.

另外,  $\lambda_1(t)$  与  $\lambda_2(t)$  分别是关于  $y$  与  $x$  的协变量. 根据 Fleming 与 Rishel<sup>[42]</sup> 的最优控制理论 满足以下条件

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p(t) + \lambda_1(t) [\beta p(t) - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y] \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_2(t)r \frac{x}{S_{\max}} - \lambda_1(t)r \frac{x}{S_{\max}} - \lambda_2(t)k \end{cases}$$

因为是末端无约束控制, 因此得到以下边界条件  $\begin{cases} \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2(T) = 0 \end{cases}$

证毕.

$T_0 > T_1$  的证明

记  $\beta P_{\max}$  为  $a$ , 考虑函数  $g(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}, x \in (0, +\infty)$  则有  $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{\frac{x-a}{x} - (\ln x - \ln a)}{(x-a)^2}$ . 由拉格朗日中值

定理,  $g(x)$  的导数可写成以下形式

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{\frac{x-a}{x} - (\ln x - \ln a)}{(x-a)^2} = \frac{(x-a) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\varepsilon} \right)}{(x-a)^2} = \frac{(\varepsilon - x)}{(x-a)x\varepsilon}$$

其中  $\varepsilon$  满足以下关系  $\begin{cases} 0 < a < \varepsilon < x, & a < x \\ 0 < x < \varepsilon < a, & x < a \end{cases}$ .

因为  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{1}{a^2} < 0$  所以  $\frac{dg(x)}{dx} < 0, x \in (0, +\infty)$ . 又因为  $\theta_0 < M < 2M$ , 从而

$$T_0 = g(\mu\theta_0) > g(2\mu M) = T_1$$

证毕.

定理 1 证明

第一部分

首先, 证明  $\forall c > 0, \forall t \in [0, T], \theta_0 \leq \theta(c, y) + y \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} \leq 2M$ .

根据假设条件, 不等式第一个(左边的“ $\leq$ ”显然成立. 下面证明不等式第二个(右边的“ $\leq$ ”成立. 用反证法, 假设存在某个  $c^* > 0, y^* > 0$ , 满足  $\theta(c^*, y^*) + y^* \frac{\partial \theta(c^*, y^*)}{\partial y} \Big|_{y=y^*} > 2M$ , 因此得到  $\frac{\partial \theta(c^*, y^*)}{\partial y} \Big|_{y=y^*} > \frac{2M - \theta(c^*, y^*)}{y^*}$ .

根据假设可知, 对于固定的  $c^*$ ,  $\frac{\partial \theta(c^*, y)}{\partial y}$  关于  $y$  递减, 所以, 对所有  $0 \leq y \leq y^*$ , 有

$$\frac{\partial \theta(c^*, y)}{\partial y} > \frac{\partial \theta(c^*, y)}{\partial y} \Big|_{y=y^*}$$

所以

$$\theta(c^*, y^*) - \theta(c^*, 0) = \int_0^{y^*} \frac{\partial \theta(c^*, s)}{\partial s} ds > \int_0^{y^*} \frac{\partial \theta(c^*, y)}{\partial y} \Big|_{y=y^*} ds > \int_0^{y^*} \frac{2M - \theta(c^*, y^*)}{y^*} ds$$

$$\theta(c^*, y^*) - \theta(c^*, 0) > 2M - \theta(c^*, y^*)$$

$$2\theta(c^*, y^*) > \theta(c^*, 0) + 2M > 2M$$

与假设条件矛盾.

其次, 证明  $\lambda_1(t)$  在  $[0, T]$  上单调递减, 证明过程如下:

根据引理 1 的证明过程, 知  $\lambda_1(t)$  满足以下关系

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -P_{\max} + \lambda_1(t) \left[ \beta P_{\max} - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y \right], & \lambda_1(t) \leq \frac{1}{\beta} \\ \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\lambda_1(t) \left[ \mu\theta(c, y) + \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y \right] & \lambda_1(t) > \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

根据  $\lambda_1(t)$  的微分表达式分成两种情况.

1) 当  $\lambda_1(t) \leq \frac{1}{\beta}$  时, 由于  $-P_{\max}(1 - \lambda_1\beta) \leq 0, -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y < 0$ . 所以

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -P_{\max} + \lambda_1(t) \left[ \beta P_{\max} - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y \right] < 0$$

2) 当  $\lambda_1(t) > \frac{1}{\beta}$  时, 由于  $-\lambda_1(t) \left[ \mu\theta(c, y) + \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y \right] < 0$ , 所以

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\lambda_1(t) \left[ \mu\theta(c, y) + \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y \right] < 0$$

综上, 对任意  $t \in [0, T]$ , 有  $\frac{d\lambda_1(t)}{dt} < 0$ , 因此,  $\lambda_1(t)$  在  $[0, T]$  上单调递减. 根据边界条件可知  $\lambda_1(T) = 0$ .

最后, 证明  $\exists t \in [0, T]$  s.t.  $\lambda_1(t) \geq \frac{1}{\beta}$ . 用反证法, 假设  $\forall t \in [0, T], \lambda_1(t) < \frac{1}{\beta}$ , 可知

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -P_{\max} + \lambda_1(t) \left[ \beta P_{\max} - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta(c, y)}{\partial y} y \right]$$

由于  $\theta \leq \theta_0$  则

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} \leq -P_{\max} + \lambda_1(t) (\beta P_{\max} - \mu\theta_0)$$

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} - \lambda_1(t) (\beta P_{\max} - \mu\theta_0) \leq -P_{\max} + \lambda_1(t) (\beta P_{\max} - \mu\theta_0)$$

$$\frac{d[\lambda_1(t) e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})t}]}{dt} \leq -P_{\max} e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})t}$$

$$\lambda_1(s) e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})s} \Big|_t^T \leq \int_t^T -P_{\max} e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})s} ds$$

分3种情况讨论:

1) 当  $\mu\theta_0 - \beta P_{\max} = 0$  时, 有  $T - t \geq \frac{1}{\beta P_{\max}}$ , 所以  $\lambda_1(s) \Big|_t^T \leq \int_t^T -P_{\max} ds$ ;  $\lambda_1(T) - \lambda_1(t) \leq -P_{\max}(T-t)$ , 由于  $\lambda_1(T) = 0$ , 所以  $\lambda_1(t) \geq P_{\max}(T-t)$ ,  $\lambda_1(t) \geq \frac{1}{\beta}$ .

2) 当  $\mu\theta_0 - \beta P_{\max} > 0$  时, 有  $T - t \geq \frac{1}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} \ln\left(\frac{\mu\theta_0}{\beta P_{\max}}\right)$ ,  $e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})(T-t)} \geq \frac{\mu\theta_0}{\beta P_{\max}} \geq 1$ ,  $-\lambda_1(t) e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})t} \leq \frac{P_{\max}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} [e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})t} - e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T}]$ .  $\lambda_1(t) \geq \frac{P_{\max}}{\theta_0 - \beta P_{\max}} [e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})(T-t)} - 1]$ ,  $\lambda_1(t) \geq \frac{P_{\max}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} \left[ \frac{\mu\theta_0}{\beta P_{\max}} - 1 \right] \geq \frac{1}{\beta}$

3) 当  $\mu\theta_0 - \beta P_{\max} < 0$  时, 有  $T - t \geq \frac{1}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} \ln\left(\frac{\mu\theta_0}{\beta P_{\max}}\right)$ ,  $e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})(T-t)} \leq \frac{\mu\theta_0}{\beta P_{\max}} < 1$ ,  $\lambda_1(t) \geq \frac{P_{\max}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} [e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})(T-t)} - 1] \geq \frac{P_{\max}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} \left[ \frac{\mu\theta_0}{\beta P_{\max}} - 1 \right] \geq \frac{1}{\beta}$ . 由于  $\lim_{\mu\theta_0 - \beta P_{\max} \rightarrow 0} \frac{1}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} \ln\left(\frac{\mu\theta_0}{\beta P_{\max}}\right) = \frac{1}{\beta P_{\max}}$ , 因此情

况(1) 可以看成情况(2) 与情况(3) 的极限形式. 与假设矛盾, 说明存在  $t$  使得  $\lambda_1(t) > \frac{1}{\beta}$ , 又因为  $\lambda_1(t)$  是递减函数,

因此存在  $T_d \in [0, T]$  使得  $\lambda_1(T_d) = \frac{1}{\beta}$  并且

$$\begin{cases} \lambda_1(t) \geq \frac{1}{\beta}, & t \in [0, T_d] \\ \lambda_1(t) < \frac{1}{\beta}, & t \in (T_d, T] \end{cases}$$

结合引理 1 中  $p^*(t)$  的表达式可知

$$p^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_d] \\ p_{\max}, & t \in [T_d, T] \end{cases}$$

### 第二部分

证明  $T \geq T_0$  时  $T - T_0 \leq T_d \leq T - T_1$ .

根据引理 1 有  $\frac{d\lambda_1}{dt} = -P_{\max}(1 - \lambda_1\beta) - \lambda_1[\mu\theta(c-y) + \mu \frac{\partial\theta(c-y)}{\partial y}y]\lambda_1 \leq \frac{1}{\beta}$ ,  $\lambda(T_d) = \frac{1}{\beta}$ ,  $\lambda(T) = 0$ .

根据定理 1 的证明, 有  $\theta_0 \leq \theta + \frac{\partial\theta}{\partial y}y \leq 2M$ , 因此

$$\frac{d\lambda_1}{dt} \leq -P_{\max} + \lambda_1[\beta P_{\max} - \mu\theta_0] \lambda_1 \leq \frac{1}{\beta}, \frac{d\lambda_1}{dt} + \lambda_1[\mu\theta_0 - \beta P_{\max}] \leq -P_{\max}, \frac{de^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})t}}{dt} \leq -e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})t} P_{\max}$$

两边积分 得到

$$e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T} \lambda_1(T) - e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T_d} \lambda_1(T_d) \leq -P_{\max} \frac{e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T} - e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T_d}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}}$$

$$e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T_d} \geq \beta P_{\max} \frac{e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T} - e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T_d}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}}$$

$$\frac{e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T_d}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} \geq \frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0} \frac{e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T}}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}}$$

1) 当  $\mu\theta_0 - \beta P_{\max} < 0$  时,  $e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T_d} \leq \frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0} e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T}$ ,  $T_d \geq T + \frac{\ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0}\right)}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}}$ .

2) 当  $\mu\theta_0 - \beta P_{\max} > 0$  时,  $e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T_d} \geq \frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0} e^{(\mu\theta_0 - \beta P_{\max})T}$ ,  $T_d \geq T + \frac{\ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0}\right)}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}}$ .

3) 当  $\mu\theta_0 - \beta P_{\max} = 0$  时,  $\lim_{\mu\theta_0 \rightarrow \beta P_{\max}} \frac{\ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0}\right)}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}} = -\frac{1}{\mu\theta_0}$ ,  $T_d \geq T - \frac{1}{\mu\theta_0} = T + \frac{\ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0}\right)}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}}$ . 因此, 得到  $T_d \geq T + \frac{\ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{\mu\theta_0}\right)}{\mu\theta_0 - \beta P_{\max}}$ . 即

$$T_d \geq T - T_0$$

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -P_{\max} + \lambda_1(t) \left[ \beta P_{\max} - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial\theta(c, y)}{\partial y} y \right] < 0, \lambda_1(t) \leq \frac{1}{\beta}$$

根据前面的证明过程可知  $\theta(c, y) + y \frac{\partial\theta(c, y)}{\partial y} \leq 2M$ ,  $(\beta P_{\max} - 2\mu M) \lambda_1 - P_{\max} \leq -P_{\max} + \lambda_1 \left[ \beta P_{\max} - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial\theta(c, y)}{\partial y} y \right]$ ,  $\frac{d\lambda_1(t)}{dt} \geq (\beta P_{\max} - 2\mu M) \lambda_1 - P_{\max}$ ,  $\frac{d[e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)t} \lambda_1(t)]}{dt} \geq -P_{\max} e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)t}$ .

两边积分, 可得

$$\int_{T_d}^T d e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)t} \lambda_1(t) \geq \int_{T_d}^T -P_{\max} e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)t} dt \geq -P_{\max} e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)t} dt$$

$$e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T} \lambda_1(T) - e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T_d} \lambda_1(T_d) \geq \frac{P_{\max}}{\beta P_{\max} - 2\mu M} (e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T} - e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T_d}), \lambda_1(T) = 0, \lambda_1(T_d) = \frac{1}{\beta}$$

$$(\beta P_{\max} - 2\mu M) \lambda_1 - P_{\max} \leq -P_{\max} + \lambda_1 \left[ \beta P_{\max} - \mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial\theta(c, y)}{\partial y} y \right]$$

$$-e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T_d} \frac{1}{\beta} \geq \frac{P_{\max}}{\beta P_{\max} - 2\mu M} (e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T} - e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T_d})$$

$$-e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T_d} \frac{2\mu M}{(\beta P_{\max} - 2\mu M)\beta} \geq \frac{P_{\max}}{\beta P_{\max} - 2\mu M} e^{-(\beta P_{\max} - 2\mu M)T}$$

根据  $\beta P_{\max} - 2\mu M$  的符号继续分情况讨论可以得到

$$\begin{cases} e^{(\beta P_{\max} - 2\mu M)T} \geq \frac{\beta P_{\max}}{2\mu M} e^{(\beta P_{\max} - 2\mu M)T_d}, & \beta P_{\max} > 2\mu M \\ e^{(\beta P_{\max} - 2\mu M)T} \geq \frac{2\mu M}{\beta P_{\max}} e^{(\beta P_{\max} - 2\mu M)T_d}, & \beta P_{\max} < 2\mu M \end{cases}$$

当  $\beta P_{\max} = 2\mu M$  时, 知  $T \geq T_d + \frac{1}{\beta P_{\max}}$ , 而  $\frac{1}{\beta P_{\max}} = \lim_{\beta P_{\max} \rightarrow 2\mu M} \ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{2\mu M}\right)$

综上, 不管  $\beta P_{\max}$  与  $2\mu M$  关系如何都有以下结果  $T \geq T_d + \frac{1}{\beta P_{\max} - 2\mu M} \ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{2\mu M}\right)$ , 即

$$T_d \leq T - T_1$$

### 第三部分

证明平台低流量条件下 ( $k < \min(\mu\theta_0, r)$ ) 的公共健康信息投入程度表达式.

1) 令  $\eta(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t)$ ,  $\Pr[s(t)] = l(t)$  知

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \begin{cases} [rl(t) - k]\eta(t) + \lambda_1 \left[ -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial\theta}{\partial y} y + k \right], & t \in [0, T_d] \\ (\lambda_1\beta - 1)P_{\max} + [rl(t) - k]\eta(t) + \lambda_1 \left[ -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial\theta}{\partial y} y + k \right], & t \in [T_d, T] \end{cases}$$

对任意  $t \in [0, T_d]$  因为  $\lambda_1 > \frac{1}{\beta}$  则

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t)}{dt} + [k - rl(t)]\eta(t) &< \lambda_1 \left[ -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial\theta}{\partial y} y + k \right] \\ &< \frac{1}{\beta} \left[ -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial\theta}{\partial y} y + k \right] \\ &< \frac{k - \mu\theta_0}{\beta} \end{aligned}$$

因此  $\frac{d\eta(s)}{ds} e^{\int_{T_d}^s [k - rl(u)] du} < \frac{k - \mu\theta_0}{\beta} e^{\int_{T_d}^s [k - rl(u)] du}$ . 两边同时对区间  $[t, T_d]$  积分得到

$$\eta(T_d) - \eta(s) e^{\int_{T_d}^s [k - rl(u)] du} < \frac{k - \mu\theta_0}{\beta} \int_t^{T_d} e^{\int_{T_d}^u [k - rl(u)] du} < \frac{k - \mu\theta_0}{\beta} \int_t^{T_d} e^{(k-r)(s-T_d)} ds$$

$$\eta(s) e^{\int_{T_d}^{t} [k-r(u)] du} > \eta(T_d) + \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \int_t^{T_d} e^{(k-r)(s-T_d)} ds > \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \int_t^{T_d} e^{(k-r)(s-T_d)} ds$$

又因为  $0 \leq l(u) \leq 1$  则有

$$\eta(t) e^{\int_{T_d}^{t} [k-r(u)] du} > \eta(t) e^{\int_{T_d}^{t} [k-r(u)] du} > \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \int_t^{T_d} e^{(k-r)(s-T_d)} ds = \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \frac{1 - e^{(k-r)(t-T_d)}}{k-r}$$

$$\eta(t) > \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \frac{e^{(k-r)(T_d-t)} - 1}{k-r}$$

$$s^*(t) = \frac{\eta(t)}{mS_{max}} r x > \frac{\mu\theta_0 - k}{\beta} \frac{e^{(k-r)(T_d-t)} - 1}{k-r} \frac{rx(t)}{mS_{max}}$$

2) 已经证明了

$$\begin{cases} \lambda_1(t) \geq \frac{1}{\beta}, & t \in [0, T_d] \\ \lambda_1(t) < \frac{1}{\beta} & t \in (T_d, T] \end{cases}$$

因此 对任意  $t \in [T_d, T]$  ,有  $[\lambda_1(t)\beta - 1] P_{max} \leq 0$  . 又由  $-\theta(c, y) - \frac{\partial \theta}{\partial y} y \leq -\theta_0$  可得

$$(\lambda_1\beta - 1) P_{max} + \lambda_1 \left[ -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} y + k \right] \leq k - \mu\theta_0 < 0$$

则有

$$\frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{dt} - [rl(t) - k](\lambda_1 - \lambda_2) < 0$$

另外 对任意  $t \in [0, T_d]$  , 因为  $\lambda_1(t) \geq \frac{1}{\beta}$  , 且由  $-\theta(c, y(t)) - \frac{\partial \theta}{\partial y} y + k \leq k - \theta_0 < 0$  , 可得

$$\frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{dt} = [rl(t) - k](\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \left[ -\mu\theta(c, y(t)) - \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} y + k \right] < [rl(t) - k](\lambda_1 - \lambda_2)$$

由此得到 对任意  $t \in [0, T]$  , 有  $\frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{dt} - [rl(t) - k](\lambda_1 - \lambda_2) < 0$  , 从而

$$\left[ \frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{dt} - [rl(t) - k](\lambda_1 - \lambda_2) \right] e^{\int_{T_d}^{t} [rl(u) - k] du} < 0$$
 因此

$$\frac{d \left[ (\lambda_1 - \lambda_2) e^{\int_{T_d}^{t} [rl(u) - k] du} \right]}{dt} < 0$$

根据边界条件有  $\lambda_1(T) - \lambda_2(T) = 0$  , 不等式两边对区间  $[0, T]$  积分 得到  $-[\lambda_1(t) - \lambda_2(t)] e^{\int_{T_d}^{t} [rl(u) - k] du} < 0$  , 则有  $\lambda_1(t) - \lambda_2(t) > 0$  , 从而有  $s^*(t) > 0$  .

#### 第四部分

证明平台高流量条件下 ( $k > \max(2\mu M, r)$ ) 的公共健康信息投入程度表达式.  $\forall t \in [0, T_d]$  时有

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = [rl(t) - k]\eta(t) + \lambda_1 \left[ -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} y + k \right]$$

由于  $k > \max(2\mu M, r)$  , 所以  $\frac{d\eta(t)}{dt} + [k - rl(t)]\eta(t) \geq \frac{k - 2\mu M}{\beta}$  , 则  $\frac{d\eta(s)}{ds} e^{\int_{T_d}^{s} [k-l(u)] du} \geq \frac{k - 2\mu M}{\beta} e^{\int_{T_d}^{s} [k-l(u)] du}$  ,

$$\eta(s) e^{\int_{T_d}^{s} [k-l(u)] du} \Big|_{T_d}^{T_d} \geq \frac{k - 2\mu M}{\beta} \int_{T_d}^{T_d} e^{\int_{T_d}^{s} [k-l(u)] du} ds \geq \frac{k - 2\mu M}{\beta} \int_{T_d}^{T_d} e^{k(s-T_d)} ds, \eta(T_d) - \eta(t) e^{\int_{T_d}^{t} [k-r(u)] du} \geq \frac{k - 2\mu M}{\beta} \frac{1 - e^{k(t-T_d)}}{k}$$
 ,

$$\eta(t) e^{\int_{T_d}^{t} [k-r(u)] du} \leq \eta(T_d) - \frac{k - 2\mu M}{\beta} \frac{1 - e^{k(t-T_d)}}{k}, \eta(t) e^{\int_{T_d}^{t} [k-r(u)] du} \leq \eta(T_d) .$$

计算潜在消费者数量  $x$  得到  $x e^{(k-r)(T_d-t)} \leq x(T_d) \leq x e^{k(T_d-t)}$  , 所以  $s^*(t) \leq s^*(T_d) e^{(T_d-t)r}$  .

$$\forall t \in [T_d, T] \text{ 时, 有 } \frac{d\eta(t)}{dt} = (\lambda_1\beta - 1) P_{max} + [rl(t) - k]\eta(t) + \lambda_1 \left[ -\mu\theta(c, y) - \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} y + k \right], \text{ 所以 } \frac{d\eta}{dt} + [k -$$

$$rl(t)]\eta(t) \geq -P_{max}, \frac{d e^{\int_{T_d}^{t} [k-r(u)] du} \eta(s)}{ds} \geq -P_{max} e^{\int_{T_d}^{s} [k-r(u)] du}, e^{\int_{T_d}^{t} k du} \eta(t) \leq P_{max} \int_{T_d}^T e^{\int_{T_d}^{s} (k-r) du} ds .$$

如果  $\eta(t) < 0$  , 那么  $s^*(t) = 0$  . 考虑  $\eta(t) \geq 0$  , 所以

$$\eta(t) \leq P_{max} \int_{T_d}^T e^{\int_{T_d}^{s} (k-r) du} ds = P_{max} \frac{e^{(T-t)k} - e^{(T-t)r}}{k-r}$$

$$s^*(t) \leq P_{\max} \frac{e^{(T-t)k} - e^{(T-t)r}}{k-r} \frac{xr}{mS_{\max}} \quad \text{证毕.}$$

定理 2 证明

当  $\mu\theta_0 \geq \beta P_{\max}$  时  $\frac{dy}{dt} = [\mu\theta(c, y) - \beta p(t)]y + rPr[s(t)]x \geq 0$ , 所以  $y$  在  $[0, T]$  上单调增, 又由定理 1 可知,  $T \geq T_0$  时  $T - T_0 \leq T_d \leq T - T_1$ . 所以有  $y(T - T_0) \leq y(T_d) \leq y(T - T_1)$ .

又  $\forall t \in [0, T_d]$  时有  $\frac{dy}{dt} = [\mu\theta(c, y) - \beta p(t)]y + rPr[s(t)]x \geq y\mu\theta_0$ . 所以  $\frac{dy}{dt} - y\mu\theta_0 \geq 0$ . 两边同时乘以  $e^{-\mu\theta_0 t}$ , 并对区间  $[0, T - T_0]$  作积分, 得到  $y(T - T_0) \geq y_0 e^{\mu\theta_0(T-T_0)}$ . 因为  $\frac{dx}{dt} = -r \frac{s(t)}{S_{\max}}x + kx \leq kx$ . 所以  $x \leq x_0 e^{kt}$ . 又由 2.2 中假设条件知  $\theta(c, y) \leq M$  所以  $\forall t \in [0, T]$  时

$$\frac{dy}{dt} = [\mu\theta(c, y) - \beta p(t)]y + rPr[s(t)]x \leq y\mu M + x_0 e^{kt}$$

运用同样的方法可以得到

$$y(T - T_1) \leq y_0 e^{\mu M(T-T_1)} + x_0 \frac{e^{k(T-T_1)} - e^{\mu M(T-T_1)}}{k - \mu M} \quad \text{证毕.}$$

定理 3 证明

1) 根据定理 2 可知  $T \geq T_d + \frac{1}{\beta P_{\max} - 2\mu M} \ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{2\mu M}\right)$  因此, 如果有  $T < \frac{1}{\beta P_{\max} - 2\mu M} \ln\left(\frac{\beta P_{\max}}{2\mu M}\right)$ , 那么  $T_d = 0$ , 即不存在“免费体验期”, 也即  $\forall t \in [0, T], p^*(t) = P_{\max}$ .

2) 假设对  $\forall t \in [0, T], s^*(t) = 0$  则因  $\forall t \in [0, T], s^*(t) = 0$  所以  $Pr[s] = 0, \frac{d\lambda_2}{dt} = \lambda_2 r Pr[s] - \lambda_2 r Pr[s] - \lambda_2 k, \left[\frac{d\lambda_2}{dt} + \lambda_2 k\right]e^{kt} = 0, \lambda_2(T) e^{kT} - \lambda_2(t) e^{kt} = 0, \forall t \in [0, T], \lambda_2(t) = 0, \forall t \in [0, T], \lambda_1(t) > 0, \forall t \in [0, T], \lambda_1(t) - \lambda_2(t) > 0, \forall t \in [0, T], s^*(t) > 0$ .

与证明假设矛盾, 因此  $\exists t^* \in [0, T], s^*(t^*) > 0$ . 又由  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  的连续性知  $s^*(t)$  的连续性, 因此,  $\exists [a, b] \subset [0, T]$  使得  $\forall t \in [a, b]$ , 最优公共健康信息服务投入程度满足  $s^*(t) > 0$ .

“ $\leq$ ”的证明过程与定理 1 证明“ $\forall t \in [T_d, T], s^*(t) \leq P_{\max} \frac{e^{(T-t)k} - e^{(T-t)r}}{k-r} \frac{xr}{mS_{\max}}$ ”的过程类似, 具体可参考定理 1 的证明过程. 证毕.

定理 4 证明

令  $P_{\max}^* > P_{\max}$ , 记相应的解空间为  $V^*$  与  $V$  对应其他参数:  $T_d^*$  与  $T_d, \lambda_1^*$  与  $\lambda_1, y^*$  与  $y$ . 用反证法, 假设  $T_d^* \leq T_d$ . 首先, 证明  $\forall t \in [T_d^*, T_d], y^* \leq y$ . 由于  $y^*(0) = y(0) = y_0$ , 则  $\forall t \in [0, T_d^*], p^*(t) = p(t) = 0$ , 因此  $\forall t \in [0, T_d^*], y^* = y, \frac{dy^*}{dt} = \mu\theta(c, y^*)y^* = \mu\theta(c, y)y = \frac{dy}{dt}, \forall t \in [0, T_d^*], y^* = y$  以及  $\frac{dy^*}{dt}|_{t=T_d^*} = [\mu\theta(c, y^*(T_d^*)) - \beta P_{\max}^*]y^*(T_d^*) < \mu\theta(c, y(T_d^*))y(T_d^*) = \frac{dy}{dt}|_{t=T_d^*}$ , 假设存在  $t^* \in [T_d^*, T]$  满足  $y^*(t^*) = y(t^*)$ . 如果  $t^* \in [T_d^*, T_d]$  则有

$$\frac{dy^*}{dt}|_{t=t^*} = [\mu\theta(c, y^*(t^*)) - \beta P_{\max}^*]y^*(t^*) < \mu\theta(c, y(t^*))y(t^*) = \frac{dy}{dt}|_{t=t^*}$$

如果  $t^* \in [T_d, T]$  则有

$$\frac{dy^*}{dt}|_{t=t^*} = [\mu\theta(c, y^*(t^*)) - \beta P_{\max}^*]y^*(t^*) < [\mu\theta(c, y(t^*)) - \beta P_{\max}]y(t^*) = \frac{dy}{dt}|_{t=t^*}$$

因此, 一旦  $y^*(t^*) = y(t^*)$ , 有  $\frac{dy^*}{dt}|_{t=t^*} < \frac{dy}{dt}|_{t=t^*}, \forall t \in [T_d^*, T_d], y^* \leq y$ .

其次, 证明  $\forall t \in [T_d, T], \lambda_1^*(t) > \lambda_1(t)$ . 由边界条件可知  $\lambda_1^*(T) = \lambda_1(T) = 0, \frac{d\lambda_1^*(t)}{dt}|_{t=T} = -P_{\max}^* < -P_{\max} = \frac{d\lambda_1(t)}{dt}|_{t=T}$ . 如果存在  $t^* \in [T_d, T]$  满足  $\lambda_1^*(t^*) = \lambda_1(t^*)$  则有  $\beta\lambda_1^*(t) - 1 = \beta\lambda_1(t) - 1 < 0, P_{\max}^*[\beta\lambda_1^*(t) - 1] < P_{\max}[\beta\lambda_1(t) - 1] < 0$ . 根据定理 4 条件有  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} < \frac{-2}{y} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} y + 2 \frac{\partial \theta}{\partial y} < 0, \frac{d}{dy}[\theta(c, y) + \frac{\partial \theta}{\partial y} y] < 0$ .

已经证明  $\forall t \in [0, T] \ y^*(t) \leq y(t)$  则有  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\theta(c, y) + \frac{\partial \theta}{\partial y} y < \theta(c, y^*) + \frac{\partial \theta}{\partial y} y^* ,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1^*(t)}{dt} \Big|_{t=t^*} &= P_{\max}^* [\beta \lambda_1^*(t^*) - 1] - \lambda_1^*(t^*) \left[ \mu \theta(c, y^*(t^*)) + \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} y^*(t^*) \right] \\ &< P_{\max}^* [\beta \lambda_1(t^*) - 1] - \lambda_1(t^*) \left[ \mu \theta(c, y(t^*)) + \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} y(t^*) \right] = \frac{d\lambda_1(t)}{dt} \Big|_{t=t^*} \end{aligned}$$

因此,  $\forall t^* \in [T_d, T]$ , 一旦  $\lambda_1^*(t^*) = \lambda_1(t^*)$  有  $\frac{d\lambda_1^*(t)}{dt} \Big|_{t=t^*} < \frac{d\lambda_1(t)}{dt} \Big|_{t=t^*}$ ,  $\lambda_1^*(T) = \lambda_1(T) = 0$ ,  $\forall t \in [T_d, T] \ \lambda_1^*(t) > \lambda_1(t)$ ,  $\lambda_1^*(T_d) = \lambda_1(T_d) = \frac{1}{\beta}$ ,  $T_d^* > T_d$ . 与假设  $T_d^* \leq T_d$  矛盾. 综上,  $P_{\max}^* > P_{\max} \Rightarrow T_d^* > T_d$  即  $\frac{dT_d}{dP_{\max}} > 0$ . 证毕.

**定理 5 证明**

令  $\Delta T > 0$ , 令  $p_1^*(t), s_1^*(t)$  满足如下关系

$$(p_1^*(t), s_1^*(t)) = \begin{cases} (p_1^*(t), s_1^*(t)), & \forall t \in [0, T] \\ (P_{\max}, 0), & \forall t \in [T, T + \Delta T] \end{cases}$$

令  $AJ_T(p, s)$  表示定制化健康信息服务价格与公共健康信息投入程度分别为  $p(t)$  与  $s(t)$  条件下服务时间为  $[0, T]$  的平均利润, 则有

$$\begin{aligned} AJ_{T+\Delta T}(p_1, s_1) - AJ_T(p^*, s^*) &= \frac{J_{T+\Delta T}(p_1, s_1)}{T + \Delta T} - \frac{J_T(p^*, s^*)}{T} \\ &= \frac{T \int_0^{T+\Delta T} \left[ p_1(t) y_1 - \frac{1}{2} m s_1^2(t) \right] dt - (T + \Delta T) \int_0^T \left[ p^*(t) y - \frac{1}{2} m s^{*2}(t) \right] dt + \Delta T c}{T(T + \Delta T)} \\ &= \frac{T \int_0^{T+\Delta T} \left[ p_1(t) y_1 - \frac{1}{2} m s_1^2(t) \right] dt - (T + \Delta T) \int_0^T \left[ p^*(t) y - \frac{1}{2} m s^{*2}(t) \right] dt + \Delta T c}{T(T + \Delta T)} \\ &= \frac{T \int_T^{T+\Delta T} \left[ p_1(t) y_1 - \frac{1}{2} m s_1^2(t) \right] dt - \Delta T \int_0^T \left[ p^*(t) y - \frac{1}{2} m s^{*2}(t) \right] dt + \Delta T c}{T(T + \Delta T)} \\ &= \frac{T \int_T^{T+\Delta T} P_{\max} y_1 dt - \Delta T \int_0^T \frac{1}{2} m s^{*2}(t) dt + \Delta T c}{T(T + \Delta T)} \\ &\geq \frac{P_{\max} \left[ T \int_T^{T+\Delta T} y_1 dt - \Delta T \int_0^T y dt \right] + \Delta T \int_0^T \frac{1}{2} m s^{*2}(t) dt + \Delta T c}{T(T + \Delta T)} \end{aligned}$$

令  $F(u) = P_{\max} \left[ T \int_T^{T+u} y_1 dt - u \int_0^T y dt \right] + u \int_0^T \frac{1}{2} m s^{*2}(t) dt + uc$  则

$$\frac{dF(u)}{du} = P_{\max} \left[ T y_1(T + u) - \int_0^T y dt \right] + \int_0^T \frac{1}{2} m s^{*2}(t) dt + c$$

$$\frac{dF(u)}{du} \Big|_{u=0} = P_{\max} \left[ T y_1(T) - \int_0^T y dt \right] + \int_0^T \frac{1}{2} m s^{*2}(t) dt + c$$

因为  $y_1(T) = y(T)$  所以

$$\frac{dF(u)}{du} \Big|_{u=0} = P_{\max} \left[ T y_1(T) - \int_0^T y dt \right] + \int_0^T \frac{1}{2} m s^{*2}(t) dt + c > 0$$

因为  $F(0) = 0$  因此, 可知存在  $\delta > 0$  使得  $\forall t \in [0, \delta] \ F(t) > 0$  所以有  $\forall \Delta T \in [0, \delta] \ AJ_{T+\Delta T}(p_1, s_1) > AJ_T(p^*, s^*)$  故

$$\sup_{(p, s) \in V_{T+\Delta T}} AJ_{T+\Delta T}(p, s) \geq AJ_{T+\Delta T}(p_1, s_1) > AJ_T(p^*, s^*) = \sup_{(p, s) \in V_T} AJ_T(p, s) .$$

证毕.