

doi:10.19920/j.cnki.jmsc.2021.03.003

多拉格朗日乘子情形下影子价格的判别和计算^①

陶 杰, 高 岩*

(上海理工大学管理学院, 上海 200093)

摘要: 非线性优化模型中经常出现多重 Lagrange 乘子现象, 导致决策者错误地计算资源的影子价格. 本文针对该问题指出最小欧几里得范数的 Lagrange 乘子是影子价格. 同时, 还提出了一个无约束优化模型用以求解最小欧几里得范数 Lagrange 乘子, 该无约束优化模型可以通过经典的非光滑优化算法求解. 最后, 本文提出一个基于次梯度的算法求解影子价格, 该算法是次线性收敛的, 且计算时间与约束条件的个数及自变量的个数线性相关.

关键词: 运筹与管理; 影子价格; 非线性规划; 多重 Lagrange 乘子; 最小范数乘子

中图分类号: C931.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2021)03-0032-13

0 引 言

近年来, 随着环境问题和资源分配问题越来越受到学界的关注, 影子价格在能源经济^[1,2]和资源分配等领域^[3,4]得到了很广泛的应用. 比如经济学中边际的概念, 可以更准确的描述为数学规划测度的影子价格问题. 要实现资源优化配置, 就要用影子价格作为激励机制^[5]. 影子价格指的是资源在被最优利用的状态下, 增加一单位该资源所能获得的超额剩余价值^[6]. 计算影子价格的模型很多, 包括: 数据包络分析模型^[4,7], 社会福利最大化模型^[8,9]等. 在约束优化领域当我们使用优化模型对经济系统建模时, 影子价格常与 Lagrange 乘子联系在一起, 即价值函数对于每种资源供给的敏感性系数. 在 Lagrange 乘子存在且唯一的情况下, 影子价格可以通过计算 Lagrange 乘子而获得; 但是当 Lagrange 乘子存在但不唯一时, 影子价格往往无法轻易求出, 因为并不是所有的 Lagrange 乘子都可以被用来作为影子价格. 因此, 在多重 Lagrange 乘子的情形下, 如何正确计

算影子价格是一个值得研究的问题.

Koopmans 将影子价格定义为在完全有效资源配置条件下, 某种资源的供给水平对经济系统整体效用的最优水平的贡献^[10]. 因此影子价格在早期又被称为“目标导向价值”. 张守一和刘树成将影子价格定义为高效能的稀缺资源在最优利用的条件下, 其每单位所能获得的超额剩余价值^[11]. 范里安^[12]和阿西莫格鲁^[13]认为影子价格是指商品或生产要素可用量的任一边际变化对国民收入增长的贡献. 综合学者们给出的定义, 本文认为影子价格可以理解为反映社会经济处于某种最优状态下的资源稀缺程度和对最终产品的需求情况的度量.

在约束优化领域, Kantorovich 最早说明了 Lagrange 乘子是影子价格, 这为影子价格的计算提供了方便, 使得影子价格得以广泛应用^[6,14]. 在经济学领域, 也提到影子价格恰好是线性规划里的 Lagrange 乘子^[5]. 但是, 该论断仅当 Lagrange 乘子唯一时才正确. 当 Lagrange 乘子不唯一的时候, 并不是所有的 Lagrange 乘子都是影子价格.

① 收稿日期: 2018-08-19; 修订日期: 2020-02-14.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71601117; 72071130); 上海市软科学项目(19692104600); 教育部人文社科资助项目(17YJC630094).

通讯作者: 高 岩(1962—), 男, 黑龙江五常人, 教授, 博士生导师. Email: gaoyan@usst.edu.cn

对于线性规划模型,多重 Lagrange 乘子情形下的影子价格识别和计算问题已经得到了充分的研究. Jansen 等^[15]指出:当 Lagrange 乘子不唯一时,利用现成的商业优化软件(比如: Cplex, Osl 等)计算影子价格都会出现偏误,这样求出的影子价格会造成投资决策的失误. Zhang 等^[16]在电力产品定价建模时注意到了类似的问题,他们提出了一个解决线性规划模型下 Lagrange 乘子不唯一的策略. Aucamp 和 Steinberg^[17]以及 Akgul^[18]指出,在线性规划问题中,当 Lagrange 乘子不唯一时,有两类乘子具有影子价格的特性,它们分别对应经济学中的“买入价格”和“卖出价格”,即:生产资料在被最优利用的状态下,生产者所愿为买入一单位生产资料而支付的最高价格和卖出一单位生产资料而接受的最低价格. 同时他们还给出了一种改进的单纯形法用以求出“买入价格”和“卖出价格”. Chambers 和 Fare^[19]指出在数据包络分析模型中也存在着多重 Lagrange 乘子问题. 刘舒燕^[20]指出线性规划模型存在多重 Lagrange 乘子的主要原因是最优解退化. 马赞甫^[21]认为:在线性规划下影子价格的非唯一性反映了影子价格不同定义方式的不协调性,包括:影子价格与会计价格之间的差异,机会成本与边际收益之间的一致等. 同时马赞甫还指出“买入价格”和“卖出价格”均是单一资源的影子价格,它并不能指导多种资源的优化配置,实际应用中组合影子价格更为实用.

然而,经济活动中有很多重要的关系实际上呈现了非线性特征,例如,需求函数和收入分配制度^[5]. 因此,在经济管理领域,非线性规划模型应用更为广泛. 在非线性规划模型中,由于保证 Lagrange 乘子存在且唯一的条件过于苛刻,因此经常出现 Lagrange 乘子不唯一的情形^[22]. 比如在多资源(火电、水电、风电)约束的条件下智能电网定价模型中,各种资源约束对应的 Lagrange 乘子不唯一,对影子价格的识别和计算造成困难^[23]. 据本文所知,对于非线性优化模型,目前并没有学者研究影子价格的识别和计算问题. 因此本文将在非线性优化模型的框架下研究影子价格的性质,给出识别影子价格的充分条件,并基于此设计

计算影子价格的算法.

1 符号说明

若无特殊说明,本文所用的向量范数均指欧几里得范数, \mathbb{R}^n 表示 n 维欧氏空间; $\{x_k\}, x_k \rightarrow x$ 表示点列 $\{x_k\}$ 的极限是点 x ; $g^+ = \max\{0, g\}$; 对于不等式约束 $g_j(x) \leq 0$,用 $A(x^*)$ 表示在 x^* 点起作用的这些不等式约束的集合,即 $A(x^*) = \{j \mid g_j(x^*) = 0\}$; ∇ 表示梯度算子;对于函数 $f(x)$ 和定义域内的某点 x^* , $\partial f(x)$ 代表 $f(x)$ 在点 x 点处的次梯度, $f'(x; d)$ 表示函数 $f(x)$ 在 x 点处沿方向 d 的方向导数.

2 影子价格的识别

在本节中讨论影子价格的定义、特征与识别问题. 首先,给出一个非线性规划下的多重 Lagrange 乘子的例子,并利用函数一阶导数性质来刻画影子价格;其次,引入 Bertsekas 等^[24]提出的信息 Lagrange 乘子的概念,并证明信息 Lagrange 乘子是影子价格;最后,利用信息 Lagrange 乘子的性质给出识别影子价格的方法.

2.1 Lagrange 乘子与影子价格

根据微观经济学理论,一般的经济系统可以由一个非线性优化模型来刻画

$$\begin{aligned} & \max f(x) \\ & \text{s. t. } h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, \\ & \quad g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $f(x), h_i(x), g_j(x), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ 为定义在 \mathbb{R}^n 上的连续可微函数, $x \in \mathbb{R}^n$ 为决策变量. 目标函数 $f(x)$ 指的是价值函数,一般用利润函数来表示, $h_i(x), g_j(x), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ 代表了各种资源约束. 该非线性规划模型的经济意义为:在有限资源约束的条件下,采用何种策略能让当前决策者所获的价值最大. 由于在非线性优化模型中影子价格与 Lagrange 乘子之间具有很强的联系,因此这里先给出 Lagrange 乘子的定义.

定义 1 对于优化模型(1), 设 x^* 为其一个局部极小值点, 若存在 $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^{m+r}$ 满足

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) - \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0,$$

$$\mu^* \geq 0, \mu_j^* = 0, j \in A(x^*)$$

则 (λ^*, μ^*) 称为模型(1)在 x^* 点处的 Lagrange 乘子.

需要注意的是 Lagrange 乘子不可以通过求解对偶规划来直接获得. 因为对偶规划的最优解是几何乘子^②, 而在一般情形下 Lagrange 乘子并不等价于几何乘子. 根据最优化理论, 当模型(1)的 Lagrange 乘子存在且唯一时, 影子价格存在且即为 Lagrange 乘子. 但是当模型(1)的 Lagrange 乘子不唯一的时候, Lagrange 乘子与影子价格之间具有什么样的联系呢? 在讨论这个问题之前, 首先讨论在非线性优化模型中影子价格的含义. 由于等式约束可以转化为两个不等式约束, 因此在模型(1)中仅考虑不等式约束.

对于模型(1), 当某种资源的供给水平提升时, 经济系统价值会得到提升, 本文把经济系统价值提升量 δ_f 与该种资源供给水平微小的提升量 δ_i 比值的极限值

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0^+} \frac{\delta_f}{\delta_i}$$

称为该种资源的影子价格. 假设模型(1)的最优解为 x . 从目标函数和资源供给函数的一阶导数性质来看, 若资源 i 的影子价格大于零, 则意味着存在某个单位方向 d , 使得资源 i 的供给水平在这个方向上有正的增量 $\nabla g_i(x)^T d$, 同时价值函数在这个方向上也有正的增量 $\nabla f(x)^T d$; 若资源 i 的影子价格等于零, 则意味着任一导致价值函数上升的方向 d 均不会使资源 i 的供给水平上升. 因此, 设当前对应影子价格为正的资源指标集合为 I , 对应影子价格为零的资源指标集合为 I^c , 那么一定可以找到一个方向 d , 使得 $\nabla g_i(x)^T d \geq 0, \forall i \in I, \nabla g_i(x)^T d \leq 0, \forall i \in I^c$, 且 $\nabla f(x)^T d \geq 0$. 从几何上看, 在最优解 x 处可以找到一个超平面分离集合 $\{\nabla g_i(x), i \in I, \nabla f(x)\}$ 与集合 $\{\nabla g_i(x),$

$i \in I^c\}$. 由于 Lagrange 乘子唯一时具有上述性质, 所以它可以作为影子价格. 但当 Lagrange 乘子不唯一的时候, 并不是所有的 Lagrange 乘子都具有上述性质.

本文首先举一个非线性优化模型下多重 Lagrange 乘子的例子, 在这个例子中会发现, 只有一个乘子起到影子价格的作用.

$$\max x_1^2 + x_2^2 \tag{2}$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0$$

显然该问题仅有唯一可行解 $x^* = (1, 0)$, 当然它也是全局最优解. 根据定义 1, 若 $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$ 为 Lagrange 乘子, 则应满足

$$\lambda_1^* - \lambda_2^* = 2, \lambda_1^* - \lambda_3^* = 0,$$

$$\lambda_1^* \geq 0, \lambda_2^* \geq 0, \lambda_3^* \geq 0$$

集合 $M = \{(k+2, k, k+2) \mid k \geq 0\}$ 中的任意元素都是该问题的 Lagrange 乘子, 因此该非线性优化问题的 Lagrange 乘子不唯一. 并非 M 中所有元素都是影子价格. 分两种情况来讨论:

情形 1 $k > 0$. 此时所有约束对应的 Lagrange 乘子都大于 0;

情形 2 $k = 0$. 此时 Lagrange 乘子为 $(2, 0, 2)$. 将该例中的信息绘制在图 1 中.

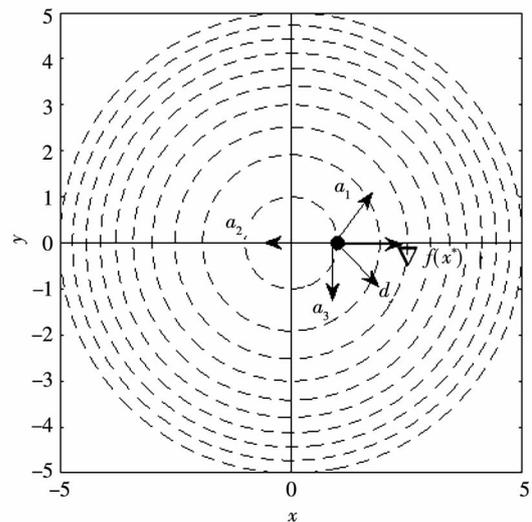


图 1 Lagrange 乘子不唯一时影子价格分析

Fig. 1 Analysis of shadow prices with multiple Lagrange multipliers
如图 1 所示, 虚线绘制的是函数 $f(x) = x_1^2 +$

② 几何乘子的定义可以参阅文献[22].

x_2^2 等值线, 位于横轴 $(1, 0)$ 位置的点是上述问题的全局最优解 x^* , $\nabla f(x^*)$ 表示目标函数 $f(x)$ 的梯度方向, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 三个向量分别是不等式约束 $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 1$ 和 $x_2 \geq 0$ 对应的法方向. 对于情形 1, 由于 Lagrange 乘子的三个分量都大于 0, 如果它具有影子价格的意义, 则存在单位方向 d , 使得 d 与 $\nabla f(x^*)$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 都处于某个以 d 为法向的半空间内. 显然这样的 d 是不存在的. 因此情形 1 中的 Lagrange 乘子不能代表影子价格. 同理对于情形 2, 即: Lagrange 乘子为 $(2, 0, 2)$. 若该乘子能代表影子价格, 那么一定可以在图 1 中找到一个方向 d , 使得 d 与 $\nabla f(x^*)$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ 都处于某个半空间内, 而 \mathbf{a}_2 位于另一个对应的另一个半空间内. 显然这样的 d 是可以找到的, 如图 1 中所示. 因此 Lagrange 乘子 $(2, 0, 2)$ 可以作为影子价格. 通过这个算例可知, 对于一般非线性优化模型, 经常会碰到 Lagrange 乘子不唯一的情形. 当乘子不唯一时, 并不是所有的乘子都可以作为影子价格, 而只有满足一定性质的乘子才具有影子价格的含义. 同时注意到, 乘子 $(2, 0, 2)$ 是上述乘子集合 M 中欧几里得范数最小的, 后文将说明最小欧几里得范数乘子是影子价格.

综合上述分析, 本文可以得出非线性优化模型下, 经济系统中各种资源的影子价格可以定义如下:

定义 2 设 x^* 为优化模型(1)的局部最优解, 在 x^* 点处起作用的不等式约束的指标集为 $A(x^*)$, (λ^*, μ^*) 为其对应的某个 Lagrange 乘子, $I^+ = \{i \mid \lambda_i^* > 0\}$, $I^- = \{i \mid \lambda_i^* < 0\}$, $J = \{j \mid \mu_j^* > 0\}$. 若存在一个单位方向 d , 使得

$$\begin{aligned} \forall i \in I^+, \nabla h_i(x^*)^T d &\geq 0, \\ \forall i \in I^-, \nabla h_i(x^*)^T d &\leq 0, \\ \forall j \in J, \nabla g_j(x^*)^T d &\geq 0, \\ \nabla f(x^*)^T d &\geq 0 \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \forall i \notin I^+ \cup I^-, \nabla h_i(x^*)^T d &= 0, \\ \forall j \in A(x^*)/J, \nabla g_j(x^*)^T d &\leq 0 \end{aligned}$$

则 (λ^*, μ^*) 是模型(1)的影子价格

2.2 信息 Lagrange 乘子与影子价格

在本节引入 Bertsekas 等^[24]提出的信息 La-

grange 乘子的概念, 并证明信息 Lagrange 乘子就是影子价格. 信息 Lagrange 乘子由 Bertsekas 等人在“强 Fritz John 条件”基础上提出的, 因此本文先引入“强 Fritz John 条件”.

引理 1 (“强 Fritz John 条件”) 假设 x^* 为模型(1)的一个局部最优解, f, g, h 一阶连续可微, 则存在 (λ_i^*, μ_j^*) , $i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, r$ 满足:

$$(1) \mu_0^* \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) - \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$(2) \mu_j^* \geq 0, j = 0, \dots, r$$

$$(3) (\lambda^*, \mu^*) \text{ 不全为 } 0$$

(4) 若 $I^+ \cup I^- \cup J \neq \emptyset$, 则存在点列 $\{x_k\}$ 满足 $x_k \rightarrow x^*$, 使得如下关系成立

$$f(x_k) > f(x^*),$$

$$\lambda_i^* h_i(x_k) > 0, i \in I^+ \cup I^-,$$

$$\mu_j^* g_j(x_k) > 0, j \in J,$$

$$|h_i(x_k)| = o(\omega(x_k)), \forall i \notin I^+ \cup I^-,$$

$$g_j^+(x_k) = o(\omega(x_k)), \forall j \notin J,$$

$$\omega(x_k) = \min \left\{ \min_{i \in I^+ \cup I^-} |h_i(x_k)|, \min_{j \in J} g_j(x_k) \right\}$$

“强 Fritz John 条件”的证明可参见 Bertsekas^[22]. 这里指出几点关于“强 Fritz John 条件”需要注意的地方.

1) “强 Fritz John 条件”中的第(4)条被称为“约束违背条件”, 它也是“强 Fritz John 条件”唯一区别与经典 Fritz John 条件的地方. 对于 Fritz John 条件, 除了满足上述条件(1)至条件(3)之外, 还满足互补松弛条件, 即 $\mu_j^* g_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, r$. 实际上“约束违背条件”可以推出“互补松弛条件”. 假若“互补松弛条件”不成立, 即: 存在某个 $j \in J$ 使得 $g_j(x^*) < 0$. 那么由函数 g_j 的连续性以及 $x_k \rightarrow x^*$ 可知: 对于充分大的 k , 有 $g_j(x_k) < 0$. 因此 $\mu_j^* g_j(x_k) < 0$, 这与“约束违背条件”相矛盾. 因此, “互补松弛条件”成立.

2) “强 Fritz John 条件”无法保证 $\mu_0 > 0$, 因此引理 1 中的乘子并不是 Lagrange 乘子. 然而本文只需要添加一些额外的条件(即约束品性^[24]),

便可以保证 $\mu_0 > 0$,那么此时“强 Fritz John 条件”中的乘子即为 Lagrange 乘子. 基于此 Bertsekas^[22] ,提出了信息 Lagrange 乘子的概念.

定义 3 (信息 Lagrange 乘子)对于非线性优化模型(1),假设 x^* 为其局部最优解, (λ^*, μ^*) 为其对应的 Lagrange 乘子,又若 (λ^*, μ^*) 满足“强 Fritz John 条件”中的“约束违背条件”,那么该 Lagrange 乘子被称为是信息 Lagrange 乘子. Bertsekas 等^[24] 已经刻画了信息 Lagrange 乘子的性质和判别方法. 如果能证明信息 Lagrange 乘子是影子价格,那么信息 Lagrange 乘子的性质和判别方法便可以用来识别影子价格. 因此通过如下定理证明信息 Lagrange 乘子是影子价格.

定理 1 信息 Lagrange 乘子是影子价格.

证明 令

$$d_k = \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|},$$

$$\theta_k = \|x_k - x^*\| > 0$$

显然 d_k 是单位向量,因此有收敛的子列. 再由点列 $x_k \rightarrow x^*$ 可知 θ_k 收敛到零. 为了方便起见,不妨假设当 $k \rightarrow \infty$ 时,有 $d_k \rightarrow d, \theta_k \rightarrow 0$.

首先证明对于任意的 $j \in J$,必有 $\nabla g_j(x^*)^T d \geq 0$. 假设存在某个 $j \in J$ 使得 $\eta = \nabla g_j(x^*)^T d < 0$, 那么由 $d_k \rightarrow d$ 可知:对于任意的 $\varepsilon > 0$,一定存在一个正整数 K 使得对于任意的 $k > K$,有 $\nabla g_j(x^*)^T d_k < \eta + \varepsilon$. 由于 $x_k = x^* + \theta_k d_k$,因此可以得出

$$\begin{aligned} g_j(x_k) &= g_j(x^* + \theta_k d_k), \\ &= g_j(x^*) + \theta_k \nabla g_j(x^*)^T d_k + o(\theta_k), \\ &= \theta_k (\nabla g_j(x^*)^T d_k + o(1)), \\ &= \theta_k (\eta + \varepsilon + o(1)) \end{aligned}$$

根据“约束违背条件”,由于 $g_j(x_k) > 0$ 和 $\theta_k > 0$, 因此 $\eta + \varepsilon + o(1) > 0$. 这与假设的 $\eta < 0$ 矛盾,因此对于任意的 $j \in J$,必有 $\nabla g_j(x^*)^T d_k \geq 0$. 类似的,可以证明对于任意的 $i \in I^+$,必有 $\nabla h_i(x^*)^T d \geq 0$;对于任意的 $i \in I^-$,必有 $\nabla h_i(x^*)^T d \leq 0$. 这里不再赘述.

接下来证明对于任意的 $j \notin J$,必有 $\nabla g_j(x^*)^T d \leq 0$. 假设存在某个 $j \notin J$ 使得 $\eta = \nabla g_j(x^*)^T d > 0$,那么由 $d_k \rightarrow d$ 可知:对于任意的 $\varepsilon > 0$,一定存在一个正整数 K 使得对于任意的 $k > K$ 有 $\nabla g_j(x^*)^T d_k > \eta - \varepsilon$ 因此可以得到

$$\begin{aligned} g_j(x_k) &= g_j(x^* + \theta_k d_k), \\ &= g_j(x^*) + \theta_k \nabla g_j(x^*)^T d_k + o(\theta_k), \\ &= \theta_k (\nabla g_j(x^*)^T d_k + o(1)), \\ &= \theta_k (\eta - \varepsilon + o(1)) \end{aligned} \tag{3}$$

根据“约束违背条件”,因为 $g_j^+(x_k) = o(\omega(x_k))$, 所以分 $g_j(x_k) \leq 0$ 和 $0 < g_j(x_k) = o(\omega(x_k))$ 两种情形来考虑. 当 $g_j(x_k) \leq 0$ 时,由式(3)可知 $\eta - \varepsilon + o(1) < 0$,与 $\eta > 0$ 矛盾. 当 $0 < g_j(x_k) = o(\omega(x_k))$ 时,根据 $\omega(x_k)$ 的定义,由于 $\omega(x_k) = \min\{\min_{i \in I^+ \cup I^-} |h_i(x_k)|, \min_{j \in J} g_j(x_k)\}$,所以由函数 g, h 的连续可微性可知:对于每个固定的 k ,必有

$$\begin{aligned} \omega(x_k) &= \omega(x^*) + \theta_k (\nabla \omega(x^*)^T d_k + o(1)), \\ &= \theta_k (\nabla \omega(x^*)^T d_k + o(1)) \end{aligned}$$

其中

$$\nabla \omega(x^*) = \begin{cases} \nabla g_j(x^*), & \text{if } \omega(x_k) = g_j(x_k), j \in J, \\ \nabla h_i(x^*), & \text{if } \omega(x_k) = h_i(x_k), i \in I^+, \\ -\nabla h_i(x^*), & \text{if } \omega(x_k) = h_i(x_k), i \in I^- \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} o(\omega(x_k)) &= \theta_k (\nabla \omega(x^*)^T d_k + o(1)) o(1), \\ \text{将其代入式(3)可得} \\ (\nabla \omega(x^*)^T d_k - 1) o(1) &> \eta - \varepsilon + (o(1))^2 \end{aligned} \tag{4}$$

由于式(4)右边大于零,而左边为一个有界数列与无穷小量的乘积,得到矛盾. 所以,对于任意的 $j \notin J$,必有 $\nabla g_j(x^*)^T d \leq 0$. 采用类似的方法,可以证明对于任意的 $i \notin I^+ \cup I^-$,必有 $\nabla h_i(x^*)^T d = 0$.

最后由 $f(x_k) = f(x^*) + \theta_k (\nabla f(x^*)^T d_k + o(1))$ 和 $f(x_k) > f(x^*)$,得到 $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$. 综上,信息 Lagrange 乘子满足影子价格定义中的所有条件,所以信息 Lagrange 乘子是影子价格.

证毕.

需要注意的是,引理 1 和定理 1 给出了在多重 Lagrange 乘子情形下影子价格的存在性条件. 对于一般的非线性优化模型,若在最优解 x^* 处任一约束品性成立,则信息 Lagrange 乘子一定存

在,因此影子价格也一定存在.

2.3 影子价格的判别

由于已经证明了信息 Lagrange 乘子就是影子价格,因此,信息 Lagrange 乘子的性质可以用来识别影子价格. 根据文献^[24],信息 Lagrange 乘子有如下性质.

引理 2 假设 x^* 为其局部最优解, $M \neq \emptyset$ 为其对应的 Lagrange 乘子集合,则集合 M 中具有最小欧几里得范数的元素是信息 Lagrange 乘子.

因此,在 Lagrange 乘子不唯一的情形下,只要找到其中欧几里得范数最小的 Lagrange 乘子(后文统一简称为:最小范数乘子),那它一定是影子价格.

3 影子价格的计算

3.1 影子价格模型

在上一节中得到最小范数乘子是影子价格的结论. 基于此,影子价格可以由求解如下模型得到

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|(\lambda, \mu)\| \\ \text{s. t.} \quad & \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) - \\ & \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0, \\ & \lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

将约束 $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \geq 0$ 看作一个抽象约束,则模型(5)是一个带抽象约束的凸二次规划问题,当 $(m+r)$ 较大时,并不容易求得最优解. 基于此,本节将设计一个简单的求解最小范数乘子的方法.

考虑模型(5)的对偶规划. 设模型(5)中线性约束对应的乘子为 $d \in \mathbb{R}^n$, 则模型(5)的对偶函数 $q(d)$ 为

$$q(d) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \geq 0} \{L(\lambda, \mu)\} \quad (6)$$

这里 $L(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \|(\lambda^T, \mu^T)\|^2 + (\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) - \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla g_j(x^*))^T d$ 为模型(5)的 Lagrange 函数. 由于 $L(\lambda, \mu)$ 是关于 (λ, μ) 的凸

函数,且约束集合 $\{(\lambda, \mu) \mid \lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \geq 0\}$ 是一个闭凸集,因此式(6)中 $q(d)$ 的最小值在 $\lambda_i^* = \nabla h_i(x^*)^T d, i=1, \dots, m, \mu_j^* = (\nabla g_j(x^*)^T d)^+, j=1, \dots, r$ 处取得,并由此可以得出对偶函数 $q(d)$ 可以化简为

$$q(d) = \nabla f(x^*)^T d - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m (\nabla h_i(x^*)^T d)^2 + \sum_{j=1}^r ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+)^2 \right]$$

所以,模型(5)的对偶规划如下

$$\begin{aligned} \max_{d \in \mathbb{R}^n} \quad & l(d) = \nabla f(x^*)^T d - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m (\nabla h_i(x^*)^T d)^2 + \sum_{j=1}^r ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+)^2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

模型(7)是一个无约束优化问题,相对于模型(5)来说更容易求解. 因此如果证明了原规划模型(5)和对偶规划模型(7)之间强对偶性成立,那么模型(5)的解便可以由求解更为简单的模型(7)来得到. 直接利用优化理论中强对偶性成立的充分性条件—比如 Slater 条件来说明模型(5)和模型(7)之间的存在强对偶性并不容易. 注意到原规划与对偶规划的实质分别是对 Lagrange 函数求极大极小值和极小极大值. 基于这个想法,本文从模型(7)的 Lagrange 函数出发,通过构造一个鞍点问题来证明模型(5)的最优解可以由模型(7)的最优解得到. 由于每个的等式约束都可以转化为两个不等式约束,因此为了方便起见,只考虑不等式约束的情形,即证明模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|\mu\|^2 \\ \text{s. t.} \quad & \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0, \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

的最优解可以由模型

$$\max_{d \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x^*)^T d - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \left((\nabla g_j(x^*)^T d)^+ \right)^2 \quad (9)$$

的最优解得到.

定理 2 设 μ^* 和 d^* 分别为模型(8)和模型(9)的最优解,则有如下关系成立

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^T d^* &= \|\mu^*\|^2, \\ (\nabla g_j(x^*)^T d^*)^+ &= \mu_j^*, j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

证明 构造模型(8)的 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} L(\mu, d) &= \left(-\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^r \nabla g_j(x^*) \right)^T \times \\ & d - \frac{1}{2} \|\mu\|^2 \end{aligned}$$

考虑如下鞍点问题

$$\sup_{\mu \geq 0} \inf_{d \in \mathbb{R}^n} L(d, \mu) = \inf_{d \in \mathbb{R}^n} \sup_{\mu \geq 0} L(d, \mu) \quad (10)$$

由于 $L(d, \mu)$ 在 $\{(\mu, d) \mid \mu \geq 0, d \in \mathbb{R}^n\}$ 上是强制的, 因此根据鞍点存在性定理可知鞍点问题(8)存在鞍点解 $(\bar{d}, \bar{\mu})$, 且由最优性条件可知

$$\nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^r \bar{\mu}_j \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (11)$$

$$\bar{\mu}_j = (\nabla g_j(x^*)^T \bar{d})^+, j = 1, \dots, r \quad (12)$$

由此可以得到如下结论:

1) 式(11)和式(12)说明 $\bar{\mu}$ 是一个 Lagrange 乘子.

2) 将式(11)和式(12)代入式(10)可得 $L(\bar{d}, \bar{\mu}) = -\frac{1}{2} \|\bar{\mu}\|^2$.

3) 将式(12)代入式(11)可得 $\nabla f(x^*)^T \bar{d} = \|\bar{\mu}\|^2$.

因此, 如果证明了模型(8)和模型(9)的最优解 μ^* 和 d^* 分别等于鞍点解 $\bar{\mu}$ 和 \bar{d} , 那么定理 2 便得以证明.

首先证明 $\mu^* = \bar{\mu}$. 注意到当 $\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla g_j(x^*)$ 时, $\inf_{d \in \mathbb{R}^n} L(d, \mu) = -\frac{1}{2} \|\mu\|^2$. 所以由 μ^* 是最小范数乘子可知

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \|\mu^*\|^2 &= \sup_{\{\mu \mid \mu \geq 0, \nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla g_j(x^*)\}} -\frac{1}{2} \|\mu\|^2, \\ &= \sup_{\mu \geq 0} \inf_{d \in \mathbb{R}^n} L(d, \mu) \leq \inf_{d \in \mathbb{R}^n} \sup_{\mu \geq 0} L(d, \mu), \\ &= L(\bar{d}, \bar{\mu}), = -\frac{1}{2} \|\bar{\mu}\|^2 \end{aligned}$$

所以得到 $\|\mu^*\| \geq \|\bar{\mu}\|$. 另一方面由于 μ^* 是最小范数 Lagrange 乘子, 即 $\|\mu^*\| \leq \|\bar{\mu}\|$. 综上可得 $\|\mu^*\| = \|\bar{\mu}\|$. 注意到模型(8)的目标函数严格凸, 所以模型(8)的最优解 μ^* 唯一, 这也说明了 $\bar{\mu} = \mu^*$.

下面证明 $\bar{d} = d^*$. 根据最优性条件式(12), 将 $\bar{\mu} = \mu^*$ 代入到鞍点问题(10)中可得

$$\begin{aligned} L(\bar{d}, \mu^*) &= \inf_{d \in \mathbb{R}^n} L(d, \mu^*), \\ &= \inf_{d \in \mathbb{R}^n} \{ -\nabla f(x^*) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+)^2 \} \end{aligned}$$

因此

$$\bar{d} = \arg \max_{d \in \mathbb{R}^n} \left\{ \nabla f(x^*) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+)^2 \right\},$$

即 \bar{d} 是模型(9)的最优解. 因此 $\bar{d} = d^*$. 证毕.

注意到对于 $j \notin A(x^*)$, $\mu_j^* = 0$, 因此模型(9)可以简化为

$$\max_{d \in \mathbb{R}^n} l(d) = \nabla f(x^*) - \frac{1}{2} \sum_{j \in A(x^*)} ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+)^2,$$

因此, 将定理 2 的结论推广至同时含有等式和不等式约束的非线性优化模型, 有如下推论.

推论 1 设 (λ^*, μ^*) 和 d^* 分别为模型(5)和模型(7)的最优解, 则

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^T d^* &= -\|(\lambda^*, \mu^*)\|^2, \\ \nabla h_i(x^*)^T d^* &= \lambda_i^*, i = 1, \dots, m, \\ (\nabla g_j(x^*)^T d^*)^+ &= \mu_j^*, j \in A(x^*), \\ \mu_j^* &= 0, j \notin A(x^*) \end{aligned}$$

值得注意的是, 推论 1 可以被用来解释模型(7)的经济意义. 设 d^* 为模型(7)的最优解, 则存在点列 $\{x_k\}$ 满足 $x_k \rightarrow x^*$, $\frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} \rightarrow d^* (k \rightarrow \infty)$ ^③. 由函数 f, g 和 h 的连续可微性以及推论 1 可知

③ 实际上, 令 $x_k = x^* + d^* + \varepsilon_k$, 其中 $\varepsilon_k \rightarrow 0$ 即可.

$$f(x_k) = f(x^*) + \|x_k - x^*\| \nabla f(x^*)^T (d^* + \varepsilon_k) + o(\|x_k - x^*\|) \quad (13)$$

$$= f(x^*) + \|x_k - x^*\| (-\|(\lambda^*, \mu^*)\|^2) + o(\|x_k - x^*\|)$$

$$g_j(x_k) = \|x_k - x^*\| \nabla g_j(x^*)^T (d^* + \varepsilon_k) + o(\|x_k - x^*\|) \quad (14)$$

$$= \mu_j^* \|x_k - x^*\| + o(\|x_k - x^*\|)$$

$$h_i(x_k) = \|x_k - x^*\| \nabla h_i(x^*)^T (d^* + \varepsilon_k) + o(\|x_k - x^*\|) \quad (15)$$

$$= \lambda_i^* \|x_k - x^*\| + o(\|x_k - x^*\|)$$

进而可以推出

$$\mu_j^* g_j(x_k) = \|x_k - x^*\| (\mu_j^*)^2 + o(\|x_k - x^*\|),$$

$$\lambda_i^* h_i(x_k) = \|x_k - x^*\| (\lambda_i^*)^2 + o(\|x_k - x^*\|).$$

由式(13)、式(14)和式(15)可得

$$f(x_k) = f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* h_i(x_k) - \sum_{j=1}^r \mu_j^* g_j(x_k) + o(\|x_k - x^*\|) \quad (16)$$

又因为 d^* 为模型(7)的最优解,因此 d^* 也是下述问题

$$\begin{aligned} & \max \nabla f(x^*)^T d \\ & \text{s. t. } \sum_{i=1}^m (\nabla h_i(x^*)^T d)^2 + \sum_{j \in A(x^*)} ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+)^2 = \bar{\beta} \end{aligned}$$

的最优解,这里

$$\bar{\beta} = \sum_{i=1}^m (\nabla h_i(x^*)^T d^*)^2 + \sum_{j \in A(x^*)} ((\nabla g_j(x^*)^T d^*)^+)^2$$

因此对于任意的 $\beta > 0$,都存在 $\theta > 0$,使得 θd^* 是下述问题

$$\begin{aligned} & \max \nabla f(x^*)^T d \\ & \text{s. t. } \sum_{i=1}^m (\nabla h_i(x^*)^T d)^2 + \sum_{j \in A(x^*)} ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+)^2 = \beta \end{aligned} \quad (17)$$

的最优解.根据推论1,由于 $\lambda_i^* = \nabla h_i(x^*)^T d^*$, $\mu_j^* = (\nabla g_j(x^*)^T d^*)^+$,所以优化模型(17)的经济意义为:当给定所有资源供给水平的一个变化量 $\beta = \|(\lambda^*, \mu^*)\|^2$ 时,模型(7)的最优解 d^* 代表着使得整个经济系统价值函数增长最快的方向.同时结合式(16)可得:效用函数沿着 d^* 方向增加量为

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* h_i(x_k) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* g_j(x_k) \quad (18)$$

从这里可以看出, $h_i(x_k)$ 和 $g_j(x_k)$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ 分别代表每种资源的增加量, λ_i^* 和 μ_j^* 分别代表每种资源对应的影子价格,因而式(18)代表整个经济系统价值的上升量.所以具有最小范数的 Lagrange 乘子 (λ^*, μ^*) 的经济意义是:当每一种资源的供给水平每增加一个单位,整个经济系统的价值最多可以增加的量.

3.2 计算影子价格的算法

在上一节证明了最小范数乘子可以通过求解一个无约束优化问题(即:模型(7))来得到,在这一节给出一个求解该无约束优化问题并得到最小范数乘子的算法.注意到模型(7)的目标函数是非光滑的,因此这里选择次梯度法来求解模型(7).次梯度法是一种迭代求解方法,通过在每步迭代中选择合适的方向和步长使目标函数值与最优值的差异逐渐缩小,进而得到最优解.当目标函数可微的时候,次梯度法就是经典的梯度下降法.对于模型(7),选择归一化后的目标函数的次梯度 $\frac{g}{\|g\|}$ ($g \in \partial l(d)$) 作为迭代方向,其中

$$\begin{aligned} \partial l(d) = \nabla f(x^*) - \left[\sum_{i=1}^m (\nabla h_i(x^*)^T d) \nabla h_i(x^*) + \sum_{j \in A(x^*)} ((\nabla g_j(x^*)^T d)^+ \nabla g_j(x^*)) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

对于迭代步长 θ_k ,选择边际递减步长,即 $\theta_k \rightarrow 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k = \infty$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k^2 < \infty$.特别地,可以取 $\theta_k = \frac{1}{k+2}$.这样的迭代方向和步长的取法可以保证得到的点列 $\{d_k\}$ 收敛到最优解 d^* ,且收敛速度为次线性收敛^[25].

据此设计计算影子价格的算法如下:

算法 1(影子价格计算)		
第 0 步		初始化模型(7)的解向量 d_0 , 设定误差界 ε
第 1 步		计算模型(1)的局部最优解 x^* 和对应的 Lagrange 乘子
第 2 步		如果 Lagrange 乘子唯一, 那么: 该 Lagrange 乘子即为影子价格, 输出影子价格, 结束程序; 否则: 进入第 3 步
第 3 步循环		检查模型(7)当前的目标函数值与最优值之间差异是否小于误差界 ε . 如果大于误差界, 则执行 3.1 步, 否则进入第 4 步
	3.1 步	设置步长 $\theta_k = \frac{1}{k+2}$
	3.2 步	应用公式(19)计算次梯度
	3.3 步	更新模型(7)的解向量 $d_{k+1} = d_k + \theta_k \frac{g_k}{\ g_k\ }$, $g_k \in \partial l(d_k)$
3.4 步		计算模型(7)当前的目标函数值 $l(d_{k+1})$
第 4 步		输出当前的解向量 $d^* = \bar{d}$
第 5 步		计算影子价格 $\lambda_i^* = \nabla h_i(x^*)^T d^*$, $i = 1, \dots, m$, $\mu_j^* = (\nabla g_j(x^*)^T d^*)^+$, $j \in A(x^*)$, $\mu_j^* = 0$, $j \notin A(x^*)$
第 6 步		输出影子价格

需要注意的是, 由于次梯度法收敛速度较慢, 因此如果事先设定一个误差界并等到当前函数值与最优值差异小于误差界时才停止迭代, 往往效率会很低. 而且在多数情形下, 模型(7)的最优值事先并不知道. 针对这个问题, Boyd 和 Vandenberghe 提出, 在实际操作中可以根据经验预先设定迭代的次数 N 来作有限次迭代, 这样会提升计算效率^[14].

下面分析算法 1 的计算时间复杂度. 首先引入经典优化理论中关于次梯度法的收敛性结论作为计算复杂度分析的基础^[25].

引理 3 考虑利用次梯度法求解优化问题 $\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, 设 $f(x_k)$ 为第 k 次迭代后的目标函数值, f_{opt} 为最优值. 若该优化问题满足如下条件: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续凹函数. 则有如下结论:

1) 次梯度法迭代产生的点列 x_k 收敛到某个最优解;

2) $f(x_k)$ 收敛到该优化问题的最优值;

3) 对于任意的 k , 存在常数 c 使得

$$f_{\text{opt}} - f(x_k) \leq \frac{cM}{\sqrt{k+1}}$$

由于模型(7)的目标函数关于变量 d 是连续的凹函数, 引理 3 中的条件满足, 所以给定误差界 ε , 算法 1 会在 $O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ 步迭代内收敛. 注意到算

法 1 在每次迭代过程中, 第 3.2 步计算次梯度需要的计算量最大, 为 $O((m+r)n)$. 因此算法 1 的计算复杂度为 $O(\frac{(m+r)n}{\varepsilon^2})$, 其中 m, r, n 分别为等式约束的个数、不等式约束的个数和自变量的个数.

4 算例测试

本节将测试算法 1 的数值效果, 算例测试分为两个部分. 首先用两个算例说明算法 1 是可以正确求得影子价格的, 第一个例子是本文第 2.1 节中构造的多重 Lagrange 乘子的例子, 第二个例子时候在文献[26]中随机选取 1 个非线性优化的例子. 第二部分, 用随机生成的样本测试算法 1 的计算效率.

4.1 算法正确性测试

首先, 考虑 3.1 节中的非线性优化例子. 由 2.1 节中的分析可知最优解 $x^* = (1, 0)$, 三个不等式约束都是起作用的约束. 将算法 1 应用于该算例, 设定误差界为 $\varepsilon = 10^{-3}$, 可以求得 $d^* = (4, -2)$. 因此最小范数 Lagrange 乘子为

$$\mu_1^* = (\nabla g_1(x^*)^T d^*)^+ = \left((1, 1) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^+ = 2,$$

$$\mu_2^* = (\nabla g_2(x^*)^T d^*)^+ = \left((-1, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^+ = 0,$$

$$\mu_3^* = (\nabla h(x^*)^T d^*)^+ = \left((0, -1) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^+ = 2$$

因此利用算法 1 求得的最小范数乘子为 $\mu^* = (2, 0, 2)$, 和本文在 2.1 节中分析的结果 $(2, 0, 2)$ 是一致的.

为了进一步说明算法 1 的普适性, 在文献 [26] 中随机选择一个问题来分析利用算法 1 是如何获得影子价格的. 本文选择文献 [26] 中第 325 个算例, 如式 (20) 所示. 选择该算例的原因是因为该算例中同时包含了等式约束和不等式约束, 所以更具有代表性

$$\begin{aligned} \max & -x_1^2 - x_2^2 \\ \text{s. t.} & -(x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \\ & -(x_1 + x_2^2) + 1 \geq 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

该问题最优解为 $x^* = (-2.372, -1.836)^T$. 本文注意到在最优解 x^* 处第一个不等式不起作用, 所以其对应的 Lagrange 乘子一定为 0, 起作用的约束为第二个不等式约束和等式约束. 应用算法 1 可得 $d^* = (9.5874 \times 10^8, 9.5874 \times 10^8)^T$, 最小范数 Lagrange 乘子为 $(0, 0, -8.0687 \times 10^9)^T$. 这表明在 x^* 处第二个不等式约束的影子价格为 0, 等式约束影子价格为负.

将算例式 (20) 的信息绘制在图 2 中来分析求得的乘子是否具有影子价格的意义. 在图 2 中, 绘制了目标函数的等值线 (如图例 1 所示)、第一个不等式约束 (如图例 2 所示)、第二个不等式约束 (如图例 3 所示) 和等式约束 (如图例 4 所示), 当前最优解 $x^* = (-2.372, -1.836)^T$ 用黑色的点表示. 在最优解处, 除了不起作用的第一个约束外, 绘制了 4 个方向: 目标函数梯度方向 ∇f , 等式约束梯度方向 ∇h , 第二个不等式约束梯度方向 ∇g 和算法 1 求出的最速上升方向 d^* . 本文发现以 d^* 为法向可以构造出一个超平面分离 ∇f 、 d^* 和 ∇g 、 ∇h . 这个超平面分离的几何意义在于 d^* 是使得目标函数上升的方向, 且在这个

方向上第二个不等式约束并没有违反. 经济意义在于: 价值函数提升不是由第二个不等式所代表的资源供给水平提升造成的, 因此第二个不等式约束对应的影子价格为 0. 另一方面, 等式约束梯度 ∇h 与 d^* 也被该超平面分离, 其经济意义在于: 等式约束供给水平提升会给目标函数带来反作用, 因此等式约束的影子价格为负数. 综上所述, 算法 1 求出的 Lagrange 乘子是具有影子价格意义的.

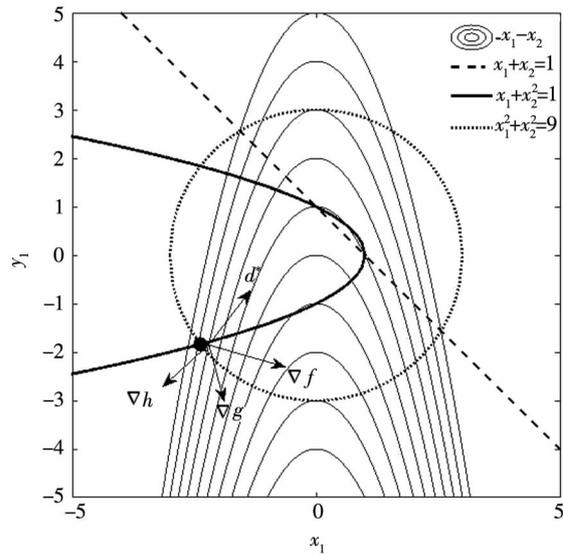


图 2 算例分析 (文献 [26] 第 325 号算例)

Fig. 2 Analysis of numerical example

4.2 算法计算效率测试

根据 3.1 节模型 (5) 可知: 最小范数乘子也可以通过求解一个二次规划来得到. 因此, 在本节利用算法 1 和模型 (5) (将利用模型 (5) 来求解影子价格的方法记为算法 2) 来计算影子价格, 通过对比这两种方法的计算时间来说明算法 1 的计算效率. 需要注意的是, 过去的研究中并没有研究者提出过在非线性规划模型下计算影子价格方法, 因此只能对比算法 1 和算法 2 的计算效率. 按照如下方式产生随机样本:

步骤 1 随机产生一个 $m \times n$ 的矩阵 C 满足 $m < n$, 和一个 n 维向量 x , 并计算出 $d = Cx$;

步骤 2 随机产生一个 $\left[\frac{m}{2} \right] \times n$ 的矩阵 A ,

构造 $b = Ax + \varepsilon$, 其中 ε 是一个随机产生的 $\left[\frac{m}{2}\right] \times 1$ 的列向量;

步骤 3 将矩阵 $[A; b]$ 扩充成 $m \times (n + 1)$ 维, 满足 $[A; b]$ 的后 $\left[\frac{m}{2}\right] \times 1$ 至 m 行是由其前 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 的线性组合构成;

步骤 4 构造非线性优化模型

$$\min_x \|Cx - d\|^2 \quad (21)$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

其中步骤 2 和步骤 3 的目的是为了让线性约束的系数矩阵 A 非满秩, 从而使模型 (21) 不满足正则性约束品性, 即存在多重 Lagrange 乘子. 本文选取不同的 m 和 n 随机生成若干组样本, 每组样本

计算 10 次, 取计算时间的算术平均数作为每一种算法的计算时间. 所有测试在个人电脑上完成, 处理器为 Intel(R) Core(TM) i3 - 2 359M, 内存为 4.00GB, 编译软件为 Matlab 2017b. 运行结果如表 1 所示, 单位为秒. 表 1 显示了两种计算方法在不同样本上的计算时间, 整体上看算法 1 的计算效率要高于算法 2. 同时可以看出, 随着约束条件个数 m 逐渐增大, 算法 2 的计算效率显著降低. 这说明算法 2 的计算效率对于约束条件的个数非常敏感, 反观算法 1, 则没有表现出这种现象. 算法 1 的运行时间对于自变量个数 n 和 约束条件个数 m 的增长基本呈现线性增长的趋势, 这与本文分析的算法 1 的计算复杂度为 $O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}(m+r)n\right)$ 的结论是一致的.

表 1 影子价格计算时间对比

Table 1 Computation time of shadow prices with different algorithms

样本	算法 1 的平均运行时间	算法 2 的平均运行时间
$m = 200, n = 500$	0.899 0	3.868 8
$m = 200, n = 800$	1.622 0	4.602 0
$m = 200, n = 1\ 000$	1.927 9	6.536 4
$m = 300, n = 500$	1.999 0	6.770 4
$m = 300, n = 800$	3.248 8	9.469 3
$m = 300, n = 1\ 000$	4.131 3	11.700 1
$m = 400, n = 500$	3.667 9	17.503 0
$m = 400, n = 800$	5.712 2	18.829 3
$m = 400, n = 1\ 000$	6.744 0	19.188 1
$m = 500, n = 800$	8.275 4	27.971 3
$m = 500, n = 1\ 000$	10.071 8	29.640 2

5 结束语

5.1 结论

本文针对非线性优化模型中多重 Lagrange 乘子问题, 讨论了 Lagrange 乘子与影子价格的关系, 并指出欧几里得范数最小 Lagrange 乘子一定为影子价格. 基于此, 本文还提出了在非线性优化模型下计算影子价格的算法, 该算法的计算复杂度为 $O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}(m+r)n\right)$, 其中 m, r, n 和 ε 分别为等

式约束的个数、不等式约束的个数、自变量的个数和算法的误差界. 由于影子价格对于资源定价起着指导作用, 因此本文提出的影子价格计算方法对于资源定价实践有着重要的意义. 本文得出的结论如下:

1) 影子价格与 Lagrange 乘子有如下的关系: 对于一个经济系统来说, Lagrange 乘子可能不唯一, 影子价格也可能不唯一. 若 Lagrange 乘子唯一, 则该 Lagrange 乘子就是影子价格; 若 Lagrange 乘子不唯一, 则欧几里得范数最小的 Lagrange 乘子就是影子价格.

2) 判别某个 Lagrange 乘子是否具有影子价格的意义可以从几何角度来刻画,即:如果某个 Lagrange 乘子是具有影子价格意义,那么一定存在一个方向,使得该乘子非零分量对应的资源约束和价值函数在这个方向上的方向导数为正,而零分量对应的资源约束在这个方向上的方向导数为负.

3) 虽然目前尚无有效的办法可以求解出所有的具有影子价格意义的 Lagrange 乘子,但是可以通过求解一个简单的无约束优化模型便得到“性质最好”的影子价格—欧几里得范数最小的 Lagrange 乘子.

5.2 展望

1) 本文考虑的一般经济模型中假设价值函数和资源供给函数都是光滑的,然而在很多文献

中,价值函数和资源供给函数并不一定满足光滑性条件.因此考虑模型(1)在缺少光滑性假设条件下的影子价格识别和计算问题将是一个重要的研究方向.

2) 本文考虑的模型(1)中假设决策变量 x 的定义域为 \mathbb{R}^n . 然而在很多实际问题中,决策变量的定义域会受到很多额外的制约因素,比如“盒约束”等.此时定义域在 x^* 的切锥和法锥都会发生变化,影子价格甚至可能不存在.因此考虑模型(1)施加额外抽象约束后,影子价格识别和计算问题将是另一个重要研究方向.

3) 本文提出了一个计算最小欧几里得范数 Lagrange 乘子的方法.未来的研究可以在本文的研究基础上,提出不同的计算最小范数 Lagrange 乘子的算法,并与算法1的计算效率进行对比.

参考文献:

- [1] Wei X, Zhang N. The shadow prices of CO₂ and SO₂ for Chinese coal-fired power plants: A partial frontier approach[J]. Energy Economics, 2020, 85: 104576. DOI: 10.1016/j.eneco.2019.104576.
- [2] Meng W, Wang X. Distributed energy management in smart grid with wind power and temporally coupled constraints[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(8): 6052–6062.
- [3] Col B, Durnev A, Molchanov A. Foreign risk, domestic problem: Capital allocation and firm performance under political instability[J]. Management Science, 2018, 64(5): 2102–2125.
- [4] 王明喜, 李明, 郭冬梅, 等. 碳排放权的非对称拍卖模型及其配置效率[J]. 管理科学学报, 2019, 22(7): 34–51.
Wang Mingxi, Li Ming, Guo Dongmei, et al. An asymmetric auction model of carbon emission rights and its allocation efficiency[J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(7): 34–51. (in Chinese)
- [5] 周小川. 数学规划与经济分析[M]. 北京: 中国金融出版社, 2019.
Zhou Xiaochuan. Mathematical Programming and Economic Analysis[M]. Beijing: China Financial Publishing House, 2019. (in Chinese)
- [6] Kantorovich L V. Mathematics in economics: Achievements, difficulties, perspectives[J]. Mathematical Programming, 1976, 11(1): 204–211.
- [7] 宋马林, 吴杰, 杨力, 等. 非期望产出、影子价格与无效决策单元的改进[J]. 管理科学学报, 2012, 15(10): 1–10.
Song Malin, Wu Jie, Yang Li, et al. Undesirable outputs, shadow prices and improvement on inefficient decision making units[J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(10): 1–10. (in Chinese)
- [8] 潘文卿, 范庆泉. 生产性财政支出、经济增长与社会福利最大化[J]. 管理科学学报, 2019, 22(7): 1–19.
Pang Wenqing, Fan Qingquan. Impact of optimal fiscal production expenditure on economic growth and social welfare[J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(7): 1–19. (in Chinese)
- [9] 朱红波, 高岩, 后勇, 等. 马尔可夫过程下多类用户智能电网实时电价[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(3): 807–816.
Zhu Hongbo, Gao Yan, Hou Yong, et al. Real-time pricing considering different type of users based on Markov decision processes in smart grid[J]. System Engineering: Theory & Practice, 2018, 38(3): 807–816. (in Chinese)
- [10] Carter M W, Price C C. Operations Research: A Practical Introduction[M]. Boca, CRC Press, 2017.
- [11] 张守一, 刘树成. 影子价格的实质[J]. 经济研究, 1982, (9): 40–47.
Zhang Shouyi, Liu Shucheng. The essence of shadow prices[J]. Economic Research Journal, 1982, (9): 40–47. (in Chinese)

Chinese)

- [12] 范里安. 微观经济学: 现代观点[M]. 上海: 格致出版社, 2009.
 Varian. Intermediate Microeconomics[M]. Shanghai: Truth & Wisdom Press, 2019. (in Chinese)
- [13] 阿西莫格鲁. 现代经济增长导论[M]. 北京: 中信出版集团, 2019.
 Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth[M]. Beijing: CITIC Press Group, 2019. (in Chinese)
- [14] Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization[M]. Cambridge: MA, Cambridge University Press, 2004.
- [15] Jansen B, et al. Sensitivity analysis in linear programming: Just be careful! [J]. European Journal of Operational Research, 1997, 101(1): 15 – 28.
- [16] Zhang L, et al. Congestion surplus minimization pricing solutions when Lagrange multipliers are not unique[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2014, 29(5): 2023 – 2032.
- [17] Aucamp D C, Steinberg D I. The computation of shadow prices in linear programming[J]. Journal of the Operational Research Society, 1982, 33(6): 557 – 565.
- [18] Akgul M. A note on shadow prices in linear programming[J]. Journal of the Operational Research Society, 1984, 35(5): 425 – 431.
- [19] Chambers R G, Fare R. A “calculus” for data envelopment analysis[J]. Journal of Productivity Analysis, 2008, 30(3): 169 – 175.
- [20] 刘舒燕. 关于资源影子价格不唯一问题的讨论[J]. 运筹与管理, 2001, (2): 33 – 36.
 Liu Shuyan. Discussion about the problem of non-unique shadow price of resources[J]. Operations Research and Management Science, 2001, (2): 33 – 36. (in Chinese)
- [21] 马赞甫. 线性规划中影子价格的“非唯一性”[J]. 系统工程, 2007, 25(4): 119 – 122.
 Ma Zanfu. The “Non-uniqueness” of shadow prices in linear programming[J]. System Engineering, 2007, 25(4): 119 – 122. (in Chinese)
- [22] 伯特塞卡斯, 等. 凸分析与优化[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
 Bertsekas, et al. Convex Analysis and Optimization[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese)
- [23] 李军祥, 张文财, 高 岩. 基于用户电器分类的智能电网实时定价研究[J]. 中国管理科学, 2019, 27(3): 122 – 128.
 Li Junxiang, Zhang Wencai, Gao Yan. Research on real-time pricing based on the classification of the user’s electrical appliances in smart grid[J]. Chinese Journal of Management Science, 2019, 27(3): 122 – 128. (in Chinese)
- [24] Bertsekas D P, Ozdaglar A E. Pseudonormality and a Lagrange multiplier theory for constrained optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2002, 114(2): 287 – 343.
- [25] 高 岩. 非光滑优化[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2018.
 Gao Yan. Nonsmooth Optimization[M]. 2nd Edition. Beijing: Science Press, 2018. (in Chinese)
- [26] Schittkowski K. More test examples for nonlinear programming codes[A]. Beckmann M, Krelle W. Lecture Notes in Economics and Math, Systems, Volume 282, Berlin: Springer Verlag, 1987: 1 – 181.

Identifying and computing shadow price in case of multiple Lagrange multipliers

TAO Jie, GAO Yan *

Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China

Abstract: Multiple Lagrange multipliers in nonlinear programming usually lead to incorrect computation of shadow price of resources. This paper proves that the minimum Euclidean norm Lagrange multiplier is the shadow price. Moreover, an unconstrained optimization model is proposed to model the minimum Euclidean norm Lagrange multiplier. Finally, a subgradient-based algorithm is proposed to compute the shadow price. This algorithm is sub-linearly convergent, and the computational time grows linearly with the number of constraints and variables.

Key words: operations research and management; shadow price; nonlinear programming; multiple norm Lagrange multipliers; minimum norm Lagrange multiplier