doi:10.19920/j.cnki.jmsc.2023.01.002

基于链与链竞争的延保服务渠道策略选择①

唐 华，艾兴政*，何浩嘉，郭松波
(电子科技大学经济与管理学院，成都 611731)

摘要：构建由两个制造商和两个专有零售商组成的链与链竞争模型，考虑三种延保服务渠道策略选择情形——两条链均由制造商提供延保服务(MM)，两条链均由零售商提供延保服务(RR)和一条链由制造商提供延保服务，另一条链由零售商提供延保服务(H)，以探究链与链竞争环境下的延保服务渠道策略选择问题. 结果表明，从供应链视角，MM 和 RR 都可能成为均衡策略，且这两种均衡策略可能单独存在或同时存在. 有趣的是，从制造商和零售商的视角，研究发现双方并非会一直偏好于接受同一种延保服务渠道策略，存在特定的区域使得制造商和零售商在策略选择上有冲突. 此外，在链与链竞争环境下，分散化渠道情形下的系统总利润可能会优于集中化渠道情形下的系统总利润.

关键词：延保服务；渠道策略选择；链与链竞争

中图分类号：F273 **文献标识码**：A **文章编号**：1007－9807(2023)01－0019－19

0 引 言

延保服务是指在制造商所提供的基本保修期满后的一段时间内消费者仍然可以通过一定的价格享受产品的维修、更换或维护服务. Berner[1]指出，延保服务的利润率几乎是那些零售产品的 18 倍，且大型家电零售商 Best Buy 的延保收入占营业收入的比例接近 50%. 延保服务的销售每年会给福特汽车带来超过 1 亿美元的收入[2]. 因此在激烈的价格竞争使企业利润不断下降的困局下，延保服务已然成为企业新的利润增长点. 对产品进行延长保修是一项高利润且能快速扩张的业务，延保服务为产业链各方带来了积极的价值，尤其是受到了消费者和延保服务提供商的欢迎. 通常，延保市场中有三个主要提供商：制造商、零售商和第三方延保提供商. 例如 Ford，GM，JVC 和 Apple 这些公司是由制造商直接销售延保给消费者. BMW，Mercedes-Benz 和 Sears 的延保服务由经销商直接提供. Best Buy，Circuit City 和 Home Depot 等零售店提供并推广由保险公司承保的第三方延长保修，从而作为延保的经销商[3].

链与链之间的竞争是常态，例如由两个制造商和两个专有零售商组成的两个汽车供应链在共同的汽车市场中竞争. 随着经济全球化，供应链之间的产品竞争变得越来越激烈，更加激烈的产品竞争会缩减供应链的利润[4]. 而因延保服务作为企业新的利润增长点，故在延保服务被广泛销售的汽车行业，两条竞争供应链的延保服务渠道策略选择变得尤为重要. 比如，有竞争关系的 Ford 和 GM 都是采用制造商提供延保服务的策略，而有竞争关系的 BMW 和 Mercedes-Benz 均采用零售商提供延保服务的策略. 面对这些情形，在链与链竞争环境中，是否存在唯一的延保服务渠道均衡策略？如果存在，会是哪种策略？如果不存在，又应如何选择延保服务渠道策略？基于供应链视角所选择的延保服务渠道策略会导致供应链内部

① 收稿日期：2020－03－27；修订日期：2021－09－21.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(72072022；71572030)；国家社会科学基金资助重大项目(20&ZD084).
通讯作者：艾兴政(1969—)，男，四川华蓥人，博士，教授，博士生导师. Email：aixz@uestc.edu.cn

制造商和零售商的利润冲突吗？本文将针对以上几个问题进行探讨.

基于此，本文构建由两个制造商和两个专有零售商组成的供应链模型，探究两条链的延保服务渠道策略选择问题. 为此使用博弈论方法分析三种情形：两条链均选择由制造商提供延保服务（MM 模型），两条链均选择由零售商提供延保服务（RR 模型）和一条链选择由制造商提供延保服务，另一条链选择由零售商提供延保服务（H 模型）. 此外，本文将集中化渠道结构模型（C 模型）作为基准模型，首先对模型进行求解，并比较各个模型的均衡结果；然后，从供应链视角对各模型的绩效进行了比较，得到延保服务渠道策略的均衡结果，再通过与集中化渠道结构模型比较以确定均衡策略下的系统利润是否受到了损害；最后，从制造商和零售商的角度证明均衡策略是否可持续. 本文主要贡献有：1）从以往的研究[5-7]可知，很少有文献关注链与链竞争环境下的延保服务渠道策略选择问题，因此本文丰富了相关文献领域. 2）拓展了 Li 等[3]基于单供应链对延保服务渠道策略的研究. 该研究结果表明，当制造商和零售商的维修成本相等时，零售商提供延保服务会更好. 而本文基于两条竞争供应链模型所得结论与之不同，即：从供应链的视角，本文指出在一定条件下，RR 可能是唯一的均衡策略，MM 也可能是唯一的均衡策略，特别地，RR 和 MM 两种均衡还可能同时存在. 但从制造商和零售商的视角，本文发现他们并非会一直偏好于接受同一种延保服务渠道策略，存在特定的区域使得制造商和零售商在策略选择上有冲突. 3）在链与链竞争环境下对延保服务渠道策略选择的研究中，本文发现分散化渠道情形下的系统总利润可能优于集中化渠道情形下的系统总利润，具体而言，当交叉价格敏感度系数较大时，产品竞争效应成为主导，横向竞争的外部性会增加下游的残酷竞争，从而弱化纵向外部性，使得集中化情形下的系统总利润小于分散化情形下的系统总利润.

1　文献回顾

本文主要从链与链竞争和延保服务两方面内容进行文献回顾.

1.1　链与链竞争

链与链竞争概念最早在市场研究中提出. McGuire 和 Staelin[8]是一项考虑链与链竞争的开创性工作，他们研究了产品替代性对渠道结构策略的影响，研究发现，对于高度可替代产品，两个制造商都希望采用分散式结构. 一些学者（Guo 等[9]，Li 等[10]，Fang 和 Shou[5]，Ma 等[4]）在链与链竞争框架下对相关协调合同（如两部定价合同[11]、服务外包合同[12]和收益分享合同[13]等）进行了研究. 如 Guo 等[9]探讨了链与链竞争中的合同和信息共享策略. Li 等[10]与 Fang 和 Shou[5]分析了两个竞争供应链的协调合同方案. Ma 等[4]基于链与链竞争环境，在零售商销售延保服务的情况下，两条链通过选择具有批发价格合同的分散结构和具有复杂合同的协调结构，建立四种竞争情形. 研究显示，纯粹的协调渠道竞争和纯粹的分散渠道竞争都可能使供应链达到均衡. 而且，供应链间的竞争和延保服务的互动力量对均衡特征会产生重大影响. 赵海霞等[13]，李晓静等[14]针对两个制造商和两个零售商组成的竞争供应链，设计相应的合同机制（如：收益分享合同和批发价格合同）探究实现供应链绩效改进的条件. 部分学者（Lee 等[15]，Wang 等[16]，Li 和 Li[6]等）关注竞争对供应链决策及绩效的影响. 如，Wang 等[16]研究并比较了供应链间竞争强度对两种常见的加价定价政策（即固定加价和百分比加价定价政策）绩效的影响. Niu 等[7]构建链与链竞争模型，以制定全球税收筹划收益与渠道分权损失之间的权衡取舍. Li 和 Li[6]专注于两条供应链中产品可持续性程度的竞争. 他们发现，尽管垂直整合始终是纳什均衡，但当竞争程度较高时，他并不是帕累托最优. Rezapour 等[17]基于汽车行业的现实案例，探讨了供应商中断对供应链竞争和绩效的影响. Sadeghi 等[18]探讨两条竞争逆向供应链中的协调和竞争问题，其中，这两条供应链对反向渠道收集电子废物的政策不同. 研究发现，集中—集中方案虽然不一定是所有成员的最佳策略，但他是纳什均衡. 周晓晗等[19]研究了存在技术溢出下两竞争企业（一个领导企业一个追随企业）的研发合作动机. 结果表明，在序贯产量竞争中，只有当溢出水平较低时，两竞争企业才会建立研发合作关系.

从上述文献中可以了解到，关于链与链竞争的文献非常丰富，但是大多数研究侧重供应链协调合同选择和竞争对供应链决策及绩效影响等问题，这与本文研究重点不同. 而在链与链竞争的供应链框架中，对延保服务的研究仅有寥寥数篇，Ma 等[4] 构建了链与链竞争环境，但只考虑了零售商销售延保服务情形，且研究重点在供应链的结构选择上. 与之不同的是，本文旨在研究链与链竞争环境下的延保服务渠道策略选择问题，即两条链选择由制造商提供延保服务还是选择由零售商提供延保服务.

1.2　延保服务

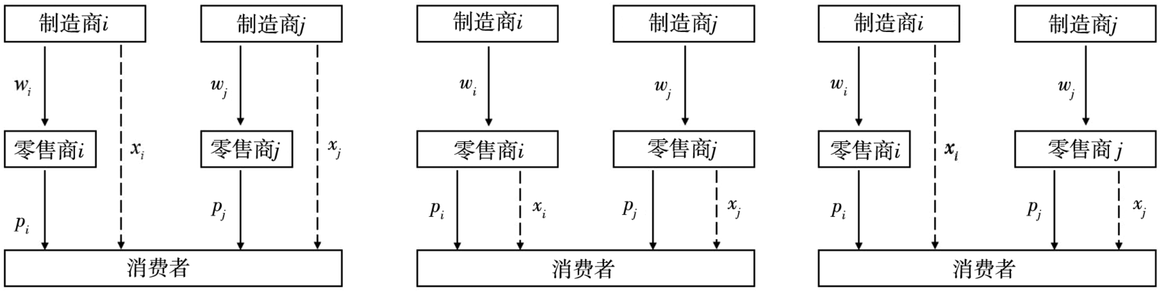
与免费的售后服务不同[20]，延保服务是需要消费者通过一定的价格才能享受的产品维修、更换或维护服务. 延保服务在汽车、家电等行业中的盛行，使之逐渐成为学术界关注的焦点. 延保服务的早期研究主要集中于探究消费者行为，以此识别出消费者购买决策和延保服务需求的影响因素[21]. 而后，对延保服务的政策制定[22]引起了学者的兴趣. 随着研究的深入，很多学者基于供应链管理视角对延保服务进行了探讨.

有的学者在供应链框架下探究制造商提供延保服务的情形. 如，Qin 等[23] 基于三级线上购物供应链研究延保服务和管理策略问题发现：当制造商的维修成本在合适的范围时，制造商提供延保服务对制造商和线上商店均有利，否则，制造商将没有动力提供延保服务. 郑晨等[24] 针对延保服务决策与绩效改进问题，构建竞争零售商供应链模型，识别出了通过两部定价合同实现制造商和零售商帕累托改进的条件. 一些学者考虑了零售商提供延保服务的情形，以及探究了其对供应链决策和绩效的影响. 如，Jiang 和 Zhang[25] 通过考虑质量信号效应，研究了零售商延保服务对制造商基本保修的影响，他们发现，当消费者可以评估产品质量时，零售商延保服务会对制造商基本保修产生负面影响. Heese[26] 考虑基本保修和延保服务的相互作用，开发了一种程式化模型来确定最佳的制造商基本保修和零售商延保服务策略，并证明了相互作用对制造商的基本保修施加了下行压力. 易余胤等[27] 研究了制造商公平偏好对延保服务决策和供应链协调的影响，研究表明，公平偏好加剧了供应链系统决策效率的损失，且两部定价合同能否实现该供应链的完美协调取决于公平偏好程度. 近几年，对延保服务的分销渠道选择成为了新热点，但大多数学者（Desai 和 Padmanabhan[28]，Li 等[3]，He 等[29] 等）是基于单供应链情形对延保服务的分销渠道选择进行了研究. 如，Desai 和 Padmanabhan[28] 在由单个制造商和单个零售商构成的供应链框架下，对比制造商的三种延保服务渠道策略—直接销售、间接销售（比如：通过零售商销售）和双渠道分销—对市场结果和制造商盈利能力的影响，并指出互补货物效应和双重边际效应是影响延保服务策略选择的关键因素. Li 等[3] 构建了由单个制造商和单个零售商组成的供应链模型，探讨了延保服务提供方的选择问题. 通过比较由制造商和零售商提供延保服务时最优价格、延保时长和利润的变化情况，他们发现当制造商和零售商的维修成本相等时，零售商提供延保服务可以得到比制造商提供延保服务更优的帕累托改进. He 等[29] 考虑顾客渠道偏好的情况下，旨在研究如何设计双重供应渠道中的延保服务策略，他们探讨了三种情形：无延保服务，制造商提供延保服务和零售商提供延保服务. 结果表明，无论谁提供延保服务，供应链都将获得高额利润，但是不一定最大化顾客感知的相应服务质量. Mai 等[30] 分析并比较了固定费用、比例分享与制造商直接销售三种延保服务合同对商店自有品牌产品质量的协调情况. 他们发现三种合同均能提高产品质量，其中，制造商直接销售合同可以得到最大的质量改进和最高的利润. 艾兴政等[31] 构建了由单供应商和单零售商分别提供延保服务的单供应链模型，探究不同参与者提供延保服务对供应链绩效的影响. 研究发现延保服务成本与延保服务需求敏感性系数会影响不同参与者提供延保服务的系统利润高低.

由上述文献可知，很多学者对延保服务销售渠道选择进行了研究. 然而，值得注意的是，他们的研究都仅是基于由单个制造商和单个零售商组成的简单供应链框架. 几乎没有学者关注更符合实际的链与链竞争环境. 基于此，本文通过考虑链与链竞争环境，研究延保服务的渠道策略选择问题，所得到的丰富结论可为企业决策者提供理论参考.

2 链与链竞争博弈模型描述

考虑两个竞争供应链销售可替代性产品，每条供应链包括一个制造商和一个专有零售商，并且上游制造商是 Stackelberg 领导者，下游零售商是追随者. i 和 j 是两条竞争供应链的索引符号，其中 $i, j \in \{1,2\}$，$i \neq j$. 两个制造商生产替代性产品，制造商 i 以批发价格 w_i 销售给零售商 i，再由零售商 i 以 p_i 的产品价格转售给消费者. 本文考虑三种延保服务渠道策略选择情形：第一，两条链均由制造商提供延保服务（MM）；第二，两条链均由零售商提供延保服务（RR）；第三，一条链由制造商提供延保服务，另一条链由零售商提供延保服务（H）. 在这三种情形中，延保服务提供商以 x_i 的价格向消费者提供延保服务，并承担所有成本费用. 图 1（a）～图 1（c）描述了这三个模型及其决策变量，实线表示产品决策，虚线表示延保服务决策.



（a）MM 模型　（b）RR 模型　（c）H 模型

图 1　链与链竞争下的延保服务渠道策略选择模型

Fig. 1 The models of channel strategy selection of extended warranties under chain-to-chain competition

与 Wu 等[32]，Zhao 等[33] 和 Wang 等[16] 文献相似，本文假定 i 链产品的需求 q_i 是关于零售价格 p_i 和对手链零售价格 p_j 的函数. 产品需求函数如下所示

$$q_i = a_i - b p_i + \theta p_j,\ i, j = 1,2,\ i \neq j \tag{1}$$

其中 a_i 为产品潜在市场规模，为了侧重关注延保服务的渠道策略选择问题，除了两条竞争供应链可以有不同的延保服务销售渠道选择之外，假定两条竞争供应链是对称的，即 $a_i = a_j = a$. 参数 b 和参数 θ 代表自有价格敏感度系数和交叉价格敏感度系数，且 $0 < \theta < b$. 具体而言，参数 θ 度量的是零售商 i 的销售量对零售商 j 价格变化的敏感度，且零售商 i 降低一个单位的产品价格使自身产品需求增加的量会大于零售商 j 降低一个单位的产品价格使零售商 i 产品需求减少的量，但随着 θ 的增大，这种差距会减小，这意味着两条供应链的竞争强度在增加，本文将这称之为产品竞争效应. 为了简化计算，令 $b = 1$.

由于仅购买产品的消费者才会产生购买延保服务的需求，故 i 链的延保服务需求函数[3,4]为

$$Q_i = q_i - h\frac{x_i}{t},\ i, j = 1,2,\ i \neq j \tag{2}$$

其中 h 为延保价格敏感度系数，t 为延保服务时长，且 $h > 0$，$t > 0$.

Patankar 和 Worm[34] 假定产品的故障数量随时间呈指数增长，据此，假设产品出故障的次数随时间呈二次方增加[26]，即当延保服务保修期 t 固定时，产品出故障的次数为 λt^2，其中，λ 为一个常数. 设 β 为产品单次维修的平均成本，则单位产品的延保成本为

$$C = c_e t^2 \tag{3}$$

其中 $c_e = \lambda\beta$，c_e 代表延保服务成本系数.

其他主要假设：1）不失一般性，假设产品生产成本和库存成本恒定，且归一化为 0；2）由于本文的重点研究对象是延保服务，故假设制造商所提供的产品基本保修期为 0，并固定延保服务时长[30]；3）制造商与零售商均为风险中性且理性. 4）假设产品潜在市场规模足够大且延保时长不会太大，即 $a > a_0 = \dfrac{htc_e(2h(16-9\theta^2)-t(8+\theta-6\theta^2))}{2h(4+3\theta)-2t(1+\theta)}$ 且 $0 < t \leq 2h$，以保障均衡结果和各方利润均为正. 因为只有产品潜在市场规模足够大时，制造商和零售商才愿意生产和销售该产品，并提供相应延保服务. 在大多数行业（比如：汽车、家电和计算机行业等）延保服务时长不是一个固定值，消费者可以选择不同的延保服务时长. 例如：1 年，2 年和 3 年

的延保时长在家电行业中非常普遍，但是，几乎不存在过长的延长保修期．因此，此假设是合理的．

3　链与链竞争博弈模型构建及求解

本节对三种模型（MM 模型、RR 模型和 H 模型）进行了求解．此外，还构建了集中式模型 C 作为基准模型来与其他分散式模型（MM 模型、RR 模型和 H 模型）相比较．

3.1　基准模型

在基准模型下，制造商与零售商构成一个整体系统，两条链均采用集中化渠道结构，以系统利润最大化为决策目标，此时，每条链的系统总利润为

$$\max_{p_i, x_i} \Pi_{T_i}^{C} = p_i q_i + (x_i - c_e t^2) Q_i, \; i = 1, 2 \tag{4}$$

通过式（4）分别求得产品价格和延保价格的一阶条件，令一阶条件为 0 得到均衡的产品价格 p_i^C 和延保价格 x_i^C．将 p_i^C 和 x_i^C 代入需求函数和利润函数中便可得到均衡的产品需求量 q_i^C、延保需求量 Q_i^C 和系统总利润 $\Pi_{T_i}^C$．

命题 1　基准模型下，i 链均衡的产品价格、延保价格、产品需求量、延保需求量和系统总利润为 $p_i^C = \dfrac{a(2h-t)+ht^2c_e}{2h(2-\theta)-t(1-\theta)}$，$x_i^C = \dfrac{t(a-htc_e(2-\theta))}{2h(2-\theta)-t(1-\theta)} + t^2c_e$，$q_i^C = \dfrac{hA}{2h(2-\theta)-t(1-\theta)}$，$Q_i^C = \dfrac{h(a-htc_e(2-\theta))}{2h(2-\theta)-t(1-\theta)}$，$\Pi_{T_i}^C = \dfrac{hA(a(2h-t)+ht^2c_e)+ht(a-htc_e(2-\theta))^2}{(2h(2-\theta)-t(1-\theta))^2}$．

3.2　MM 模型

MM 模型下，两条链均是由制造商提供延保服务．在该情形下，两条链的制造商先各自分别决策产品批发价格 w_i 和延保价格 x_i，然后再由零售商分别决策各自的产品价格 p_i．其中，制造商 i 的利润为

$$\max_{w_i, x_i} \Pi_{M_i}^{MM} = w_i q_i + (x_i - c_e t^2) Q_i, i = 1, 2 \tag{5}$$

零售商 i 的利润为

$$\max_{p_i} \Pi_{R_i}^{MM} = (p_i - w_i) q_i, \; i = 1, 2 \tag{6}$$

为了求解此模型，本文采用以往文献常用的 Nash-Nash 解决方案的概念（例如：Feng 和 Lu[35]，Hsu 等[36]），假定两条链的决策过程是独立且同时进行的．此框架要求两条链不会发生信息交换，这在实践中是很常见的．因为两条链销售的是替代性产品，且链与链之间存在着竞争关系，因此他们不会向对方泄露自己的决策信息．具体而言，在本文中，每条链都需要推测对手链的批发价格、产品价格和延保价格，如果推测与实际最优决策一致，则纳什均衡成立．

命题 2　MM 模型下，i 链均衡的批发价格、产品价格、延保价格、产品需求量、延保需求量、制造商利润和零售商利润为 $w_i^{i(M)j(M)} = \dfrac{a(4h-t)+ht^2c_e(2-\theta)}{L_{MM}}$，$p_i^{i(M)j(M)} = \dfrac{a(6h-t)+ht^2c_e}{L_{MM}}$，$x_i^{i(M)j(M)} = \dfrac{tA}{2L_{MM}} + \dfrac{t^2c_e}{2}$，$q_i^{i(M)j(M)} = \dfrac{hA}{L_{MM}}$，$Q_i^{i(M)j(M)} = \dfrac{hA}{2L_{MM}} - \dfrac{htc_e}{2}$，$\Pi_{M_i}^{MM} = \dfrac{h(8h-t)A^2}{4L_{MM}^2} + \dfrac{ht^3c_e^2}{4}$，$\Pi_{R_i}^{MM} = \dfrac{h^2A^2}{L_{MM}^2}$．

3.3　RR 模型

RR 模型下，两条链均是由零售商提供延保服务．在博弈的第一阶段，两条链的制造商先分别决策各自的产品批发价格 w_i，从而最大化自身利润，其中，制造商 i 的最优化问题为

$$\max_{w_i} \Pi_{M_i}^{RR} = w_i q_i, i = 1, 2 \tag{7}$$

在博弈的第二阶段，产品批发价格 w_i 被给定的情况下，零售商决定产品价格 p_i 和延保价格 x_i 以使自身利润最大化，其中，零售商的最优化问题为

$$\max_{p_i, x_i} \Pi_{R_i}^{RR} = (p_i - w_i) q_i + (x_i - c_e t^2) Q_i, \quad i = 1, 2 \tag{8}$$

RR 模型的求解过程与 MM 模型的求解过程类似．

命题 3　RR 模型下，i 链均衡的批发价格、产品价格、延保价格、产品需求量、延保需求量、制造商利润和零售商利润为 $w_i^{i(R)j(R)} = \dfrac{(4h-t)A}{4L_{RR}}$；$p_i^{i(R)j(R)} = \dfrac{2a(3h-t)+ht^2c_e}{2L_{RR}}$；$x_i^{i(R)j(R)} = \dfrac{tA}{4L_{RR}} + \dfrac{t^2c_e}{2}$；$q_i^{i(R)j(R)} = \dfrac{hA}{2L_{RR}}$；$Q_i^{i(R)j(R)} = \dfrac{hA}{4L_{RR}} - \dfrac{htc_e}{2}$；

$\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)} = \dfrac{h(4h - t)A^2}{8L_{RR}^2}$；$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)} = \dfrac{h(4h - t)A^2}{16L_{RR}^2} + \dfrac{ht^3 {c_e}^2}{4}$.

3.4 H 模型(MR 模型和 RM 模型)

H 模型下，一条链由制造商提供延保服务，另一条链由零售商提供延保服务. 因此，对于由制造商 i 提供延保服务的供应链 i，制造商 i 的最大化问题为

$$\max_{w_i, x_i} \Pi_{M_i}^H = w_i q_i + (x_i - c_e t^2) Q_i, \ i = 1, 2 \tag{9}$$

零售商 i 的最大化问题为

$$\max_{p_i} \Pi_{R_i}^H = (p_i - w_i) q_i, \ i = 1, 2 \tag{10}$$

对于由零售商 j 提供延保服务的供应链 j，$j = 1, 2$，$i \neq j$，制造商 j 和零售商 j 的最优化问题分别为

$$\max_{w_j} \Pi_{M_j}^H = w_j q_j \tag{11}$$

$$\max_{p_j, x_j} \Pi_{R_j}^H = (p_j - w_j) q_j + (x_j - c_e t^2) Q_j \tag{12}$$

H 模型的求解过程与 MM 模型的求解过程类似.

命题 4 MR 模型和 RM 模型下，i 链均衡的批发价格、产品价格、延保价格、产品需求量、延保需求量、制造商利润和零售商利润分别为 $w_i^{i(M)j(R)} = \dfrac{2L_1(a(4h-t) + ht^2 c_e(2-\theta)) + \theta h t^3 c_e}{2L_H}$，$p_i^{i(M)j(R)} = \dfrac{2L_1(a(6h-t) + ht^2 c_e) + \theta h t^3 c_e}{2L_H}$，$x_i^{i(M)j(R)} = \dfrac{tAL_1}{2L_H} + \dfrac{t^2 c_e}{2}$，$q_i^{i(M)j(R)} = \dfrac{hAL_1}{L_H}$，$Q_i^{i(M)j(R)} = \dfrac{hAL_1}{2L_H} - \dfrac{htc_e}{2}$，$\Pi_{M_i}^{i(M)j(R)} = \dfrac{hA^2L_1^2(8h - t)}{4L_H^2} + \dfrac{ht^3 {c_e}^2}{4}$，$\Pi_{R_i}^{i(M)j(R)} = \dfrac{h^2A^2L_1^2}{L_H^2}$；$w_i^{i(R)j(M)} = \dfrac{AL_2(4h - t)}{4L_H}$，$p_i^{i(R)j(M)} = \dfrac{L_2(2a(3h-t) + ht^2 c_e) - \theta h t^3 c_e}{2L_H}$，$x_i^{i(R)j(M)} = \dfrac{tAL_2}{4L_H} + \dfrac{t^2 c_e}{2}$，$q_i^{i(R)j(M)} = \dfrac{hAL_2}{2L_H}$，$Q_i^{i(R)j(M)} = \dfrac{hAL_2}{4L_H} - \dfrac{htc_e}{2}$，$\Pi_{M_i}^{i(R)j(M)} = \dfrac{hA^2L_2^2(4h-t)}{8L_H^2}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(M)} = \dfrac{hA^2L_2^2(4h - t)}{16L_H^2} + \dfrac{ht^3 {c_e}^2}{4}$.

4 延保服务渠道结构选择策略

本章先比较分析以上的均衡结果，然后对延保服务渠道策略选择问题进行讨论，发现链与链竞争环境下，MM 模型和 RR 模型均可能成为均衡策略，且这两种均衡策略可能单独存在，也可能同时存在. 进一步地，对两种均衡策略进行了更细致的探讨，包括延保服务参数对其产品价格和延保价格的影响，以及制造商和零售商对这两种策略的偏好差异.

4.1 均衡结果的比较

命题 5 比较各模型下的产品价格、延保价格、产品需求量和延保需求量，可以得到：(1) $p_i^{i(M)j(M)} > p_i^{i(M)j(R)} > p_i^{i(R)j(M)} > p_i^{i(R)j(R)} > p_i^C$，$\max\{x_i^C, x_i^{i(R)j(M)}\} > x_i^{i(R)j(R)} > x_i^{i(M)j(M)} > x_i^{i(M)j(R)}$，$\max\{q_i^C, q_i^{i(R)j(M)}\} > q_i^{i(R)j(R)} > q_i^{i(M)j(M)} > q_i^{i(M)j(R)}$，$\max\{Q_i^C, Q_i^{i(R)j(M)}\} > Q_i^{i(R)j(R)} > Q_i^{i(M)j(M)} > Q_i^{i(M)j(R)}$. (2) 当 $0 < \theta < \dfrac{\sqrt{784h^4 - 608h^3t + 176h^2t^2 - 22ht^3 + t^4} - 4h^2}{24h^2 - 10ht + t^2}$ 时，$x_i^C > x_i^{i(R)j(M)}$，$q_i^C > q_i^{i(R)j(M)}$，$Q_i^C > Q_i^{i(R)j(M)}$，当 $\dfrac{\sqrt{784h^4 - 608h^3t + 176h^2t^2 - 22ht^3 + t^4} - 4h^2}{24h^2 - 10ht + t^2} < \theta < 1$ 时，$x_i^C < x_i^{i(R)j(M)}$，$q_i^C < q_i^{i(R)j(M)}$，$Q_i^C < Q_i^{i(R)j(M)}$.

零售商比制造商更接近市场，故与 MM 模型相比，RR 模型中的零售商能更灵活的协调产品价格和延保价格，消除外部性，并得到更高水平的产品需求量和延保服务需求量. 因此，不难理解，在 H 模型下，由零售商提供延保服务的供应链在市场上更具侵略性，并且具有高水平的产出，故会进一步抑制由制造商提供延保服务的供应链的产品产出，使得 $q_i^{i(M)j(R)}$ 最小，$q_i^{i(R)j(M)}$ 大于 $q_i^{i(R)j(R)}$. 此外，延保需求量受产品需求量和延保价格两者的影响，但延保需求量排序与产品需求量排序相同，故影响延保需求量的主导因素是产品需求量. 值得注意的是，集中化情形下的产品需求量和延保需求量并不一定是最高的，当交叉价格系数较大时，即 RM 模型下 i 链的产品需求量受 j 链产品价格变化的敏感性较大时，j 链较高的产品价格会使 i 链的产品需求量大大增加，这时，产品竞争

效应的影响超过双重边际效应的影响，从而使 RM 模型下 i 链的产品需求量大于 C 模型下的产品需求量，即 $q_i^{i(R)j(M)} > q_i^C$. 此外，由命题 5，可以得到以下两个推论.

推论 1　比较各模型下的延保服务进入门槛，有如下排序 $a^H > a^{MM} > a^{RR} > a^C$.

满足延保服务需求量为 0 时的产品潜在市场规模阈值即为延保服务进入门槛. 当产品潜在市场规模大于此阈值（延保服务进入门槛）时，延保需求量将大于 0，此时延保服务提供方有动机销售延保服务. 结合命题 5 与推论 1 可知延保服务进入门槛越低其延保需求量相应较高. C 模型的延保服务进入门槛最低，其延保服务需求水平较高. MM 模型的延保服务进入门槛高于 RR 模型，而 MM 模型的延保服务需求量低于 RR 模型. H 模型的延保服务进入门槛最高，而由制造商提供延保服务的供应链有着最低的延保服务需求，即 $Q_i^{i(M)j(R)}$ 最低.

推论 2　给定竞争对手供应链的延保服务渠道策略选择，有：$p_i^{i(M)j(n)} > p_i^{i(R)j(n)}$，$x_i^{i(M)j(n)} < x_i^{i(R)j(n)}$，$q_i^{i(M)j(n)} < q_i^{i(R)j(n)}$，$Q_i^{i(M)j(n)} < Q_i^{i(R)j(n)}$，$n = M$ or R.

当竞争对手供应链的延保服务渠道策略选择被给定时，推论 2 显示，相较于选择由制造商提供延保服务，自身选择由零售商提供延保服务会得到一个更低的产品价格和更高的产品需求量. 零售商提供延保服务消除了产品与延保服务之间的外部性，这降低了产品价格，增大了产品需求量. 由于延保需求量受产品需求量的影响较大，结果导致由零售商提供延保服务的供应链会收取一个较高的延保价格并将延保需求量维持在一个较高的水平.

4.2　供应链视角下各策略的比较

本小节将从供应链视角探究在什么条件下存在均衡策略和均衡策略是否唯一？为了回答此问题，首先比较了各模型的利润函数 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}$ 和 $\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，结果如命题 6 所示.

命题 6　1）当 $0 \leqslant \theta < \theta_1$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(R)j(R)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$；2）当 $\theta_1 \leqslant \theta < \theta_2$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(M)} \geqslant \Pi_{T_i}^{i(R)j(R)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$；3）当 $\theta_2 \leqslant \theta < \min\{\theta_3, 1\}$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)} \geqslant \Pi_{T_i}^{i(R)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(R)j(R)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$；4）当 $0 < t < 1.3671h$ 且 $\theta_3 \leqslant \theta < 1$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(R)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(R)} \geqslant \Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$.

命题 6 表明，并没有任何一种策略使得供应链 i 的总利润一直凌驾于其他策略之上. 对于纯策略 MM 和 RR 来说，存在阈值 θ_1，当交叉价格敏感度系数小于此阈值时，RR 模型的 i 链系统总利润更大，当交叉价格敏感度系数大于此阈值时，MM 模型的 i 链系统总利润更大. 对于 H 模型来说，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$ 始终成立. 此外，当交叉价格敏感度系数超过阈值 θ_2 时，MM 模型的 i 链系统总利润最高，当交叉价格敏感度系数超过可能存在的阈值 θ_3 时，RR 模型的 i 链系统总利润将会最低. 由命题 6 可以得到以下推论.

推论 3　1）如果 $0 \leqslant \theta < \theta_2$，则 RR 是唯一的均衡策略；2）如果 $\theta_2 \leqslant \theta < \min\{\theta_3, 1\}$，则 MM 和 RR 都是均衡策略；3）如果 $\theta_3 \leqslant \theta < 1$，则 MM 是唯一的均衡策略.

在 H 模型下，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$ 始终成立，意味着由制造商提供延保服务的供应链有足够的动机打破混合策略状态，所以不存在混合均衡. 推论 3 表明在链与链竞争情形下，纯策略 RR 和 MM 均可能成为均衡策略，且在一定条件下，RR 可能是唯一的均衡策略，MM 也可能是唯一的均衡策略，特别地，MM 和 RR 两种均衡可能同时存在. 在理想情况下，如果整个供应链系统只存在一个制造商和一个零售商，那么可以得到由零售商提供延保服务优于由制造商提供延保服务的结论（详见附录），这与 Li 等[3] 的研究结果类似——如果制造商和零售商的维修成本一致，那么由零售商提供延保服务时的系统总利润一定大于由制造商提供延保服务时的系统总利润. 但现实生活中，链与链的竞争随处可见. 而本文基于链与链竞争情形得到了与单条链有差异的结论，即从供应链的视角，当 $0 \leqslant \theta < \theta_2$ 时，两条链都由零售商提供延保服务是最佳的均衡策略，当 $\theta_3 \leqslant \theta < 1$ 时，两条链均由制造商提供延保服务会更好，当 $\theta_2 \leqslant \theta < \min\{\theta_3, 1\}$ 时，两条链可能均选择由制造商提供延保服务，也可能均选择由零售商提供延保服务，这为企业提供了更符合实际的管理建议. 因为

Li 等[3] 构建的是由一个制造商和一个零售商所组成的单条供应链框架,本文构建的是由两个制造商和两个零售商构成的链与链竞争供应链框架,而在推论 3 的附录中也将单供应链情形进行了求解,发现单供应链情形下的结论与 Li 等[3] 所得结论类似,但在本文所构建的链与链竞争供应链模型下所得结论与 Li 等[3] 所得结论存在差异,故可以认为导致结果存在差异的原因是所构建的供应链框架不同,作用机理是:在单供应链中,只存在产品和延保服务的纵向双重加价外部性,不存在横向外部性. 但在链与链竞争框架下,产品竞争的横向外部性会适度对冲纵向双重加价的外部性. 当产品竞争效应较小时,即 $0 \leqslant \theta < \theta_2$ 时,横向外部性对纵向外部性的弱化程度较小,影响不大,故此时,所得均衡策略与构建单供应链情形的 Li 等[3] 的研究结论相似——由零售商提供延保服务最佳. 但当产品竞争效应较大时,即 $\theta \geqslant \theta_2$ 时,产品竞争的横向外部性对纵向外部性的弱化程度较大,从而导致均衡策略与 Li 等[3] 的研究结论不一致. 本文在链与链竞争供应链框架下,得到与 Li 等[3] 不同的研究结果,将 Li 等[3] 结果拓展到更现实的链与链竞争情形,这正体现出本文的理论贡献.

为了更直观的展示推论 3 的结论,令 $h = 2$,通过数值分析得到图 2.

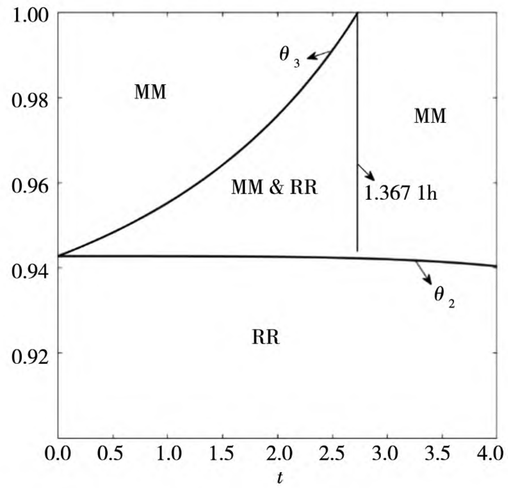


图 2 均衡策略决策区域图

Fig. 2 The decision-making areas of the equilibrium strategy

下面将两个可能的均衡策略(RR 模型和 MM 模型)与基准模型做比较,探究分散化情形下的 RR 模型和 MM 模型的系统利润是否受到了损害.

命题 7 1)当 $0 \leqslant \theta < \theta_{C-R}$ 时, $\Pi_{T_i}^{C} > \Pi_{T_i}^{i(R)j(R)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$; 2)当 $\theta_{C-R} \leqslant \theta < \theta_{C-M}$ 时, $\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)} \geqslant \Pi_{T_i}^{C} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$;3) 当 $\theta_{C-M} \leqslant \theta < \theta_1$ 时, $\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)} > \Pi_{T_i}^{i(M)j(M)} \geqslant \Pi_{T_i}^{C}$; 4)当 $\theta_1 \leqslant \theta < 1$ 时, $\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)} \geqslant \Pi_{T_i}^{i(R)j(R)} > \Pi_{T_i}^{C}$.

命题 7 的结论表明,在延保服务的背景下,面对链与链竞争环境,存在一定的区域使得分散化渠道情形下的系统总利润优于集中化渠道情形. 这与 McGuire 和 Staelin[8] 的类似结论一脉相承. 当交叉价格敏感度系数较小时,双重边际效应的影响大于产品竞争效应的影响,使得集中化情形下的系统总利润最大,相应的分散化情形下的 RR 模型和 MM 模型的系统利润受到了损害. 但当交叉价格敏感度系数较大时,产品竞争效应成为主导,横向竞争的外部性会增加下游的残酷竞争,从而弱化纵向外部性,使得集中化情形下的系统总利润小于分散化情形下的系统总利润. 从命题 7 可知,当 $\theta_{C-R} < \theta < \theta_{C-M}$ 时,C 模型下的系统总利润大于 MM 模型,但小于 RR 模型;当 $\theta_{C-M} < \theta < 1$ 时,C 模型下的系统总利润最小.

通过参数设置 $a = 100$, $c_e = 1$, $t = 2$, $h = 2$,得到图 3 以更直观的展示命题 7,同时图 3 也验证了命题 7 的结论.

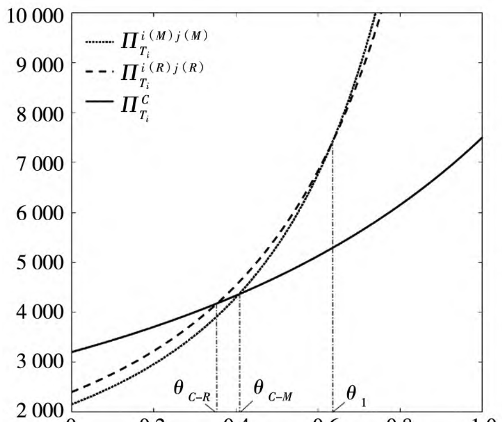


图 3 MM 策略、RR 策略与基准模型下的系统总利润关系

Fig. 3 The relationship of the total profit of the system between MM strategy, RR strategy and the benchmark

4.3 延保服务参数对均衡策略下价格的影响

以上结论显示 RR 策略和 MM 策略均可能成为均衡策略. 下面探究延保服务参数 h 和参数 t 对均衡策略中产品价格和延保价格的影响.

命题8　1）在RR和MM模型下，有 $\frac{\partial \frac{x_i}{t}}{\partial h}<0$，$\frac{\partial p_i}{\partial h}>0$，$\frac{\partial w_i}{\partial h}>0$；2）$\frac{\partial \frac{x_i^{i(R)j(R)}}{t}}{\partial t}>0$，$\frac{\partial p_i^{i(R)j(R)}}{\partial t}<0$，$\frac{\partial w_i^{i(R)j(R)}}{\partial t}<0$；3）$\frac{\partial \frac{x_i^{i(M)j(M)}}{t}}{\partial t}>0$；当 $a>\frac{t\,c_e(2h(4-3\theta)+L_{MM})}{2}$ 时，$\frac{\partial p_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}<0$，$\frac{\partial w_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}<0$；当 $a_0<a<\frac{t\,c_e(2h(4-3\theta)+L_{MM})}{2}$ 时，$\frac{\partial p_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}>0$，$\frac{\partial w_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}>0$.

命题8的结论1表明在RR模型和MM模型下，随着延保价格敏感性的增加，单位延保价格会降低，相应的产品价格和批发价格会增大，这是符合常识的.通常来说，随着延保时长的增加，只有减小单位时长的延保价格，消费者才会更有动机去购买较长期限的延保服务.但有趣的是，命题8的结论2和结论3表明在RR模型和MM模型下，单位时长的延保价格随着延保时长的增大而增大.其原因是产品的故障数量随时间的增大而增加，因此，延保时长越大，企业所承担的延保成本将越高.比如，在京东平台，其销售的名为“全面保障”的延保服务的单位保修价格随着延保时长的增大而增大，且大约75%购买增值服务的消费者会选择购买“全面保障”延保服务②.这说明此销售模式并没有带来消费者购买率的下降，因为扩大的保修范围（比如将由于意外的碰撞所导致的产品损坏纳入保修范围）对消费者购买延保服务的影响大于单位时长延保价格对其的影响.此外，RR模型下，零售商对延保价格和产品价格的决策更具灵活性，故随着延保时长的增加，产品价格和批发价格会相应降低.但在MM模型下，只有当产品潜在市场规模较大时，其产品价格和批发价格才会相应降低.因为较小的产品潜在市场规模会导致较低的产品需求量和延保需求量，故只靠产品盈利的零售商会增大产品价格，相应的，制造商会增大批发价格.

4.4　制造商、零售商视角下策略选择的冲突

虽然MM策略和RR策略均可能成为均衡策略，但是制造商和零售商在什么情况下会接受同一种延保服务渠道策略呢？会出现制造商和零售商策略选择上的冲突吗？为了更好的回答这些问题，记RR模型与MM模型的产品需求比例 $\Delta q=\frac{q_i^{i(R)j(R)}}{q_i^{i(M)j(M)}}$，他代表着RR模型与MM模型的产品需求差距.由此得到命题9和推论4.

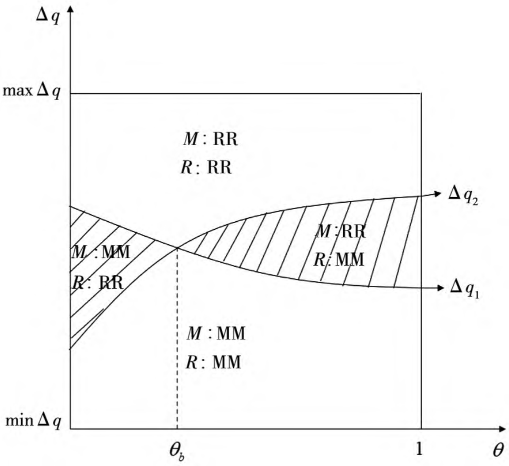
命题9　1）当 $\Delta q>\Delta q_1$ 时，$\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$；当 $\Delta q<\Delta q_1$ 时，$\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$；2）当 $\Delta q>\Delta q_2$ 时，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$；当 $\Delta q<\Delta q_2$ 时，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$.其中 $1<\Delta q_1<2$，$1<\Delta q_2<2$.

命题9识别了制造商和零售商策略选择上变化的临界条件.命题9表明，当RR模型与MM模型的产品需求比例大于阈值 Δq_1 时，两个制造商更愿意接受由零售商提供延保服务，当RR模型与MM模型的产品需求比例大于阈值 Δq_2 时，两个零售商也更愿意接受由自己提供延保服务.反之，如果 $q_i^{i(R)j(R)}<\Delta q_1\,q_i^{i(M)j(M)}$，两个制造商更愿意选择由自己提供延保服务，如果 $q_i^{i(R)j(R)}<\Delta q_2\,q_i^{i(M)j(M)}$，两个零售商更愿意接受由制造商提供延保服务.但是由于 Δq_1 与 Δq_2 并不一定相等，故在制造商和零售商之间会发生延保服务渠道策略选择上的冲突.基于此，进一步得出以下推论.

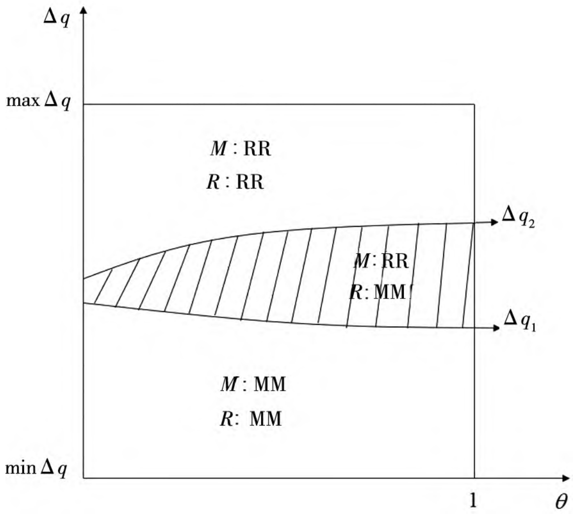
推论4　1）当 $\Delta q>\max\{\Delta q_1,\Delta q_2\}$ 时，则制造商和零售商均希望由零售商提供延保服务；当 $\Delta q<\min\{\Delta q_1,\Delta q_2\}$ 时，则制造商和零售商均希望由制造商提供延保服务；当 $\Delta q=\Delta q_1=\Delta q_2$ 时，制造商和零售商均希望由制造商提供延保服务或者由零售商提供延保服务；2）当 $\Delta q_1<\Delta q<\Delta q_2$ 时，制造商更希望由零售商提供延保服务，而零售商更希望由制造商提供延保服务；当 $\Delta q_2<\Delta q<\Delta q_1$ 时，制造商更希望由自己提供延保服务，而零售商也更希望由自己提供延保服务.其中，当 $a>a_b$ 或者当 $a_0<a<a_b$ 且 $\theta_b<\theta<1$ 时，$\Delta q_1<\Delta q_2$，当 $a_0<a<a_b$ 且 $0<\theta<\theta_b$ 时，$\Delta q_1>\Delta q_2$.

② https://b.jr.jd.com/service/serveIntroduce/#/introduce?mainSkuId=100003174244&bindSkuId=57958410007

推论 4 的结论 1 显示了制造商和零售商的策略选择行为一致而不存在冲突的情形. 推论 4 的结论 2 识别出了制造商和零售商会发生策略选择冲突的条件与边界. 如果产品潜在市场规模较大或者产品潜在市场规模较小且交叉价格敏感度系数较大时,则制造商和零售商之间会存在决策冲突区间 $\Delta q_1 < \Delta q < \Delta q_2$. 如果产品潜在市场规模较小且交叉价格敏感度系数较小时,则制造商和零售商之间会存在决策冲突区间 $\Delta q_2 < \Delta q < \Delta q_1$. 据此,可用图 4 直观表示制造商和零售商决策行为的异同之处. 其中,阴影部分代表制造商和零售商策略冲突的区域,比如在图 4(a) 中左边阴影部分代表制造商偏好选择 MM 策略,而零售商偏好选择 RR 策略.



(a) $a_0 < a < a_b$



(b) $a > a_b$

图 4　制造商和零售商视角下的策略选择行为

Fig. 4 Strategic choice behavior from the perspective of manufacturers and retailers

5　结束语

本文在链与链竞争环境下主要讨论两种常见的延保服务销售渠道模式:制造商提供延保服务和零售商提供延保服务. 这项研究试图回答链与链竞争环境下主导的延保服务渠道策略. 在拓展以往关于延保服务研究的同时,也为企业决策提供了更好的理论基础.

本文发现的几个主要结论及相应管理启示如下:

首先,从供应链的视角来说,两条链均由制造商提供延保服务(MM)和两条链均由零售商提供延保服务(RR)都可能成为均衡策略,且这两种均衡策略可能单独存在,也可能同时存在. 但是,从制造商和零售商的视角来讲,制造商和零售商在策略选择上存在一定的冲突区间,即制造商和零售商并非会一直偏好于接受同一种延保服务渠道策略. 进一步地,当由上游制造商和下游零售商共同商议决定延保服务的提供者时,存在一定的冲突区间,即当 $a > a_b$ 或者当 $a_0 < a < a_b$ 且 $\theta_b < \theta < 1$ 时,存在 $\Delta q_1 < \Delta q < \Delta q_2$, 使得制造商更希望由零售商提供延保服务,而零售商更希望由制造商提供延保服务;当 $a_0 < a < a_b$ 且 $0 < \theta < \theta_b$ 时,存在 $\Delta q_2 < \Delta q < \Delta q_1$, 使得制造商更希望由自己提供延保服务,而零售商也更希望由自己提供延保服务. 但如果由供应链中的强势方(即强势的上游制造商或者强势的下游零售商)独自决定延保服务的提供者时,则不存在冲突区间.

其次,在延保服务的背景下,面对链与链竞争环境,如果产品竞争效应的影响大于双重边际效应的影响,则分散化渠道情形下的绩效可能会优于集中化渠道情形下的绩效. 当交叉价格敏感度系数较大时,产品竞争效应成为主导,横向竞争的外部性会增加下游的残酷竞争,从而弱化纵向外部性,使得集中化情形下的系统总利润小于分散化情形下的系统总利润. 当 $0 \leq \theta < \theta_{C-R}$ 时,C 模型下的系统总利润优于 RR 模型和 MM 模型. 当 $\theta_{C-R} \leq \theta < \theta_{C-M}$ 时,C 模型下的系统总利润大于 MM 模型,但小于 RR 模型;当 $\theta_{C-M} \leq \theta < \theta_1$ 时,C 模型的系统总利润最小,且 RR 模型的总利润优于 MM 模型;当 $\theta_1 \leq \theta < 1$ 时,C 模

型的系统总利润最小，且MM模型的总利润优于RR模型．此结论暗示，如果两个企业的竞争较为缓和，则均选择集中化渠道策略会优于分散化渠道策略；如果两个企业的竞争较为激励，则均选择由零售商销售延保服务的分散化渠道策略所得系统总利润会优于集中化渠道策略下的系统总利润；如果两个企业的竞争极其激励，则均选择由制造商销售延保服务的分散化渠道策略会更好．

最后，本文还发现，随着延保时长的增加，单位延保价格不会降低，相反，单位延保价格会受到延保成本的影响而随延保时长的增加而增加．因为产品的故障数量随时间的增大而增加，故延保时长越大，企业所承担的延保成本将越高．此外，扩大的保修范围（比如将由于意外的碰撞所导致的产品损坏纳入保修范围）对消费者购买延保服务的影响大于单位时长延保价格对其的影响．此研究结论给出的管理启示为：当企业销售容易出现故障的低价值或中等价值产品时，其设置的单位延保价格可以随着延保时长的增加而增加；当企业销售不易出现故障的高价值产品时，则可扩大产品保修范围，进而设置随延保时长增加而增加的单位延保价格．

这项研究对于在链与链竞争环境下理解延保服务渠道策略选择具有重要意义，且有可拓展的空间．未来，还可从以下几个方面进行拓展研究：制造商或零售商将延保服务外包给第三方的延保服务渠道策略选择问题、在不确定环境下研究延保服务、以及构建非对称供应链，特别是两种产品的故障率和维修成本不同的情况等等．

参 考 文 献：

[1] Berner R. The warranty windfall[J]. Business Week, 2004, 12(20): 84 – 86.

[2] Menezes M A J. Fordmotor company: The product warranty program[J]. Harvard Business School, 1988, A(9): 589 – 601.

[3] Li K P, Mallik S, Chhajed D. Design of extended warranties in supply chains under additive demand[J]. Production and Operations Management, 2012, 21(4): 730 – 746.

[4] Ma J H, Ai X, Yang W, et al. Decentralization versus coordination in competing supply chains under retailers' extended-warranties[J]. Annals of Operations Research, 2019, 275(2): 485 – 510.

[5] Fang Y, Shou B. Managing supply uncertainty under supply chain Cournot competition[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 243(1): 156 – 176.

[6] Li X, Li Y. Chain-to-chain competition on product sustainability[J]. Journal of Cleaner Production, 2016, (112): 2058 – 2065.

[7] Niu B Z, Liu Y Q, Liu F, et al. Transfer pricing and channel structure of a multinational firm under overseas retail disruption risk[J]. International Journal of Production Research, 2019, 57(9): 2901 – 2925.

[8] McGuire T W, Staelin R. An industry equilibrium analysis of downstream vertical integration[J]. Marketing Science, 1983, 2(2): 161 – 191.

[9] Guo L, Li T, Zhang H T. Strategic information sharing in competing channels[J]. Production and Operations Management, 2014, 23(10): 1719 – 1731.

[10] Li B X, Zhou Y W, Li J, et al. Contract choice game of supply chain competition at both manufacturer and retailer levels [J]. International Journal of Production Economics, 2013, 143(1): 188 – 197.

[11] Haruvy E, Katok E, Pavlov V. Bargaining process and channel efficiency[J]. Management Science, 2020, 66(7): 2845 – 2860.

[12] 高　杰，樊慧荣，李萧萧．信息不对称下医药营销服务外包契约设计[J]．管理科学学报，2020，23(8)：109 – 126.

Gao Jie, Fan Huirong, Li Xiaoxiao. Design of contracts for pharmaceutical marketing service outsourcing with asymmetric information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2020, 23(8): 109 – 126. (in Chinese)

[13]赵海霞, 艾兴政, 唐小我. 链与链基于规模不经济的纵向联盟和利润分享[J]. 管理科学学报, 2014, 17(1): 48 – 56.

Zhao Haixia, Ai Xingzheng, Tang Xiaowo. Vertical alliance and profit sharing contract based on diseconomies of scale under chain-to-chain competition[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(1): 48 – 56. (in Chinese)

[14]李晓静, 艾兴政, 唐小我. 基于交叉销售的竞争供应链纵向契约研究[J]. 管理科学学报, 2016, 19(10): 117 – 126.

Li Xiaojing, Ai Xingzheng, Tang Xiaowo. Contracting under competing supply chains with cross sales[J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(10): 117 – 126. (in Chinese)

[15]Lee H H, Zhou J, Wang J. Trade credit financing under competition and its impact on firm performance in supply chains [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2018, 20(1): 36 – 52.

[16]Wang Y Y, Sun J, Wang J C. Equilibrium markup pricing strategies for the dominant retailers under supply chain to chain competition[J]. International Journal of Production Research, 2016, 54(7): 2075 – 2092.

[17]Rezapour S, Farahani R Z, Pourakbar M. Resilient supply chain network design under competition: A case study[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 259(3): 1017 – 1035.

[18]Sadeghi R, Taleizadeh A A, Chan F T S, et al. Coordinating and pricing decisions in two competitive reverse supply chains with different channel structures[J]. International Journal of Production Research, 2019, 57(9): 2601 – 2625.

[19]周晓晗, 张江华, 徐 进. 基于序贯博弈的企业研发合作动机研究[J]. 管理科学学报, 2021, 24(2): 111 – 126.

Zhou Xiaohan, Zhang Jianghua, Xu Jin. Research on the motivation for R&D cooperation between firms based on sequential game[J]. Journal of Management Sciences in China, 2021, 24(2): 111 – 126. (in Chinese)

[20]毛照昉, 刘 鹭, 李 辉. 考虑售后服务合作的双渠道营销定价决策研究[J]. 管理科学学报, 2019, 22(5): 47 – 56.

Mao Zhaofang, Liu Lu, Li Hui. Price decision of a dual channel under after-sales service cooperation[J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(5): 47 – 56. (in Chinese)

[21]Padmanabhan V, Rao R C. Warranty policy and extended service contracts: Theory and an application to automobiles[J]. Marketing Science, 1993, 12(3): 230 – 247.

[22]Gallego G, Wang R X, Ward J, et al. Flexible-duration extended warranties with dynamic reliability learning[J]. Production and Operations Management, 2014, 23(4): 645 – 659.

[23]Qin X, Su Q, Huang S H. Extended warranty strategies for online shopping supply chain with competing suppliers considering component reliability[J]. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 2017, 26(6): 753 – 773.

[24]郑 晨, 艾兴政, 李晓静, 等. 竞争零售商的供应链延保服务两部定价合同选择[J]. 系统工程学报, 2018, 33(5): 674 – 686.

Zheng Chen, Ai Xingzheng, Li Xiaojing, et al. Supply chain extended warranties service two-part tariffs contract option of competing retailers[J]. Journal of Systems Engineering, 2018, 33(5): 674 – 686. (in Chinese)

[25]Jiang B, Zhang X. How does a retailer's service plan affect a manufacturer's warranty? [J]. Management Science, 2011, 57(4): 727 – 740.

[26]Heese H S. Retail strategies for extended warranty sales and impact on manufacturer base warranties[J]. Decision Sciences, 2012, 43(2): 341 – 367.

[27]易余胤, 梁家密, 谭燕菲. 基于公平偏好的供应链延保服务模型研究[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(12): 3066 – 3078.

Yi Yuyin, Liang Jiami, Tan Yanfei. Extended warranty models of supply chain with fairness preference[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2017, 37(12): 3066 – 3078. (in Chinese)

[28]Desai P S, Padmanabhan P. Durable good, extended warranty and channel coordination[J]. Review of Marketing Science,

2004, 2(1): 1-23.

[29]He Z, Huang D, He S. Design of extended warranty service in a dual supply channel[J]. Total Quality Management & Business Excellence, 2018, 29(9-10): 1089-1107.

[30]Mai D T, Liu T M, Morris M D S, et al. Quality coordination with extended warranty for store-brand products[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 256(2): 524-532.

[31]艾兴政，张　越，李晓静，等. 延保服务的供应链收益共享合同选择[J]. 系统工程学报，2018，33(4)：500-510.
Ai Xingzheng, Zhang Yue, Li Xiaojing, et al. Revenue sharing contract of supply chain under extended warranties services [J]. Journal of Systems Engineering, 2018, 33(4): 500-510. (in Chinese)

[32]Wu C H, Chen C W, Hsieh C C. Competitive pricing decisions in a two-echelon supply chain with horizontal and vertical competition[J]. International Journal of Production Economics, 2012, 135(1): 265-274.

[33]Zhao J, Wei J, Li Y. Pricing decisions for substitutable products in a two-echelon supply chain with firms different channel powers[J]. International Journal of Production Economics, 2014,(153): 243-252.

[34]Patankar J G, Worm G H. Prediction intervals for warranty reserves and cash flows[J]. Management Science, 1981, 27(2): 237-241.

[35]Feng Q, Lu L X. The role of contract negotiation and industry structure in production outsourcing[J]. Production and Operations Management, 2013, 22(5): 1299-1319.

[36]Hsu V N, Lai G M, Niu B Z, et al. Leader-based collective bargaining: Cooperation mechanism and incentive analysis [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2017, 19(1): 72-83.

Channel strategy selection of extended warranties considering chain-to-chain competition

TANG Hua, AI Xing-zheng, HE Hao-jia, GUO Song-bo*

School of Economics and Management, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China

Abstract: This paper constructs a chain-to-chain competition model consisting of two manufacturers and two exclusive retailers to explore the issue of channel strategy selection of extended warranties considering chain-to-chain competition. Three-types of channel strategies are considered: Both supply chains providing extended warranties by manufacturers (MM), both supply chains providing extended warranties by retailers (RR), and one supply chain providing extended warranties by the manufacturer, and the other by the retailer (H). The results show that both MM and RR may become equilibrium strategies, and these two equilibrium strategies may exist separately or simultaneously from the perspective of the supply chain. Interestingly, from the perspective of manufacturers and retailers, they do not always prefer to accept the same extended warranties' channel strategy. There exist specific situations where manufacturers and retailers have conflicting strategic choices. Furthermore, the total system profit in the case of decentralized channel may be larger than centralized channel in the chain-to-chain competition environment.

Key words: extended warranties; channel strategy options; chain-to-chain competition

附录

附表 1　参数表达

Attached Table 1 Parameter expression

参数	表达式
L_{MM}	$2h(4-3\theta)-t(1-\theta)$
L_{RR}	$h(4-3\theta)-t(1-\theta)$
L_H	$(h(4+3\theta)-t(1+\theta))(2h(4-3\theta)-t(1-\theta))+ht\theta$
L_1	$h(4+3\theta)-t(1+\theta)$
L_2	$2h(4+3\theta)-t(1+\theta)$
A	$2a-t^2c_e(1-\theta)$

命题 2 的证明：

根据逆推法则，先将 MM 模型中零售商的利润函数分别对 p_i 求偏导，$\dfrac{\partial \Pi_{R_i}^{MM}}{\partial p_i}=a-2p_i+\theta p_j+w_i$，$\dfrac{\partial^2 \Pi_{R_i}^{MM}}{\partial p_i^2}=-2<0$. 因此，零售商利润函数是关于 p_i 的凹函数. 接着，制造商利润函数关于 (w_i,x_i) 的 Hesse 矩阵为 $H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i^2} & \dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i\partial x_i}\\ \dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial x_i\partial w_i} & \dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial x_i^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{2h}{t}\end{pmatrix}$. 已知假设条件 $0<t\leqslant 2h$，故有 $\dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i^2}=-1<0$，$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i^2} & \dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i\partial x_i}\\ \dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial x_i\partial w_i} & \dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial x_i^2}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i^2}\dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial x_i^2}-\dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i\partial x_i}\dfrac{\partial^2 \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial x_i\partial w_i}=\dfrac{8h-t}{4t}>0$. 因此，制造商利润函数关于 (w_i,x_i) 是联合凹的，最优解存在且唯一.

本文采用以往文献常用的 Nash-Nash 解决方案的概念（例如：Feng 和 Lu[35]；Hsu 等[36]），假定两条链的决策过程是独立且同时进行的. 此框架要求两条链不会发生信息交换，这在实践中是很常见的. 因为两条链销售的是替代性产品，且链与链之间存在着竞争关系，因此他们不会向对方泄露自己的决策信息. 根据逆推法则，先令 $\dfrac{\partial \Pi_{R_i}^{MM}}{\partial p_i}=a-2p_i+\theta p_j+w_i=0$，解得 $\widetilde{p_i}=\dfrac{a+\theta p_j+w_i}{2}$，然后将 $\widetilde{p_i}$ 代入制造商 i 的利润函数中，解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial w_i}=\dfrac{a+t^2c_e+\theta p_j-2w_i-x_i}{2}=0\\ \dfrac{\partial \Pi_{M_i}^{MM}}{\partial x_i}=\dfrac{a+2htc_e+\theta p_j-w_i-\dfrac{4hx_i}{t}}{2}=0\end{cases}$，可得 $w_i=\dfrac{2ht^2c_e+(4h-t)(a+\theta p_j)}{8h-t}$，$x_i=\dfrac{t(a+(4h-t)tc_e+\theta p_j)}{8h-t}$，再将 w_i，x_i 代入 $\widetilde{p_i}$，可得 $p_i=\dfrac{ht^2c_e+(6h-t)(a+\theta p_j)}{8h-t}$. 同理可得 $w_j=\dfrac{2ht^2c_e+(4h-t)(a+\theta p_i)}{8h-t}$，$x_j=\dfrac{t(a+(4h-t)tc_e+\theta p_i)}{8h-t}$，$p_j=\dfrac{ht^2c_e+(6h-t)(a+\theta p_i)}{8h-t}$. 最后将 $w_i=\dfrac{2ht^2c_e+(4h-t)(a+\theta p_j)}{8h-t}$，$x_i=\dfrac{t(a+(4h-t)tc_e+\theta p_j)}{8h-t}$，$p_i=$

$\frac{ht^2c_e+(6h-t)(a+\theta p_j)}{8h-t}$，$w_j=\frac{2ht^2c_e+(4h-t)(a+\theta p_i)}{8h-t}$，$x_j=\frac{t(a+(4h-t)tc_e+\theta p_i)}{8h-t}$，$p_j=\frac{ht^2c_e+(6h-t)(a+\theta p_i)}{8h-t}$ 这 6 个公式联立求解，即得 $w_i^{i(M)j(M)}=\frac{a(4h-t)+ht^2c_e(2-\theta)}{L_{MM}}$，$p_i^{i(M)j(M)}=\frac{a(6h-t)+ht^2c_e}{L_{MM}}$，$x_i^{i(M)j(M)}=\frac{tA}{2L_{MM}}+\frac{t^2c_e}{2}$，其中 $i,j=1,2$，$i\neq j$. 将所求决策变量结果代入需求函数和利润函数中即可得 $q_i^{i(M)j(M)}=\frac{hA}{L_{MM}}$，$Q_i^{i(M)j(M)}=\frac{hA}{2L_{MM}}-\frac{htc_e}{2}$，$\Pi_{M_i}^{MM}=\frac{h(8h-t)A^2}{4L_{MM}^2}+\frac{ht^3{c_e}^2}{4}$，$\Pi_{R_i}^{MM}=\frac{h^2A^2}{L_{MM}^2}$.　　证毕.

命题 5 的证明：

$p_i^{i(R)j(R)}-p_i^C=\frac{hA(4h-t)}{2L_{RR}(2h(2-\theta)-t(1-\theta))}>0$，$p_i^{i(R)j(M)}-p_i^{i(R)j(R)}=\frac{ht\theta A(3h-t)}{2L_{RR}L_H}>0$，$p_i^{i(M)j(R)}-p_i^{i(R)j(M)}=\frac{htA}{L_H}>0$，$p_i^{i(M)j(M)}-p_i^{i(M)j(R)}=\frac{ht\theta A(6h-t)}{2L_{MM}L_H}>0$，故 $p_i^{i(M)j(M)}>p_i^{i(M)j(R)}>p_i^{i(R)j(M)}>p_i^{i(R)j(R)}>p_i^C$.

$x_i^{i(M)j(M)}-x_i^{i(M)j(R)}=\frac{ht^2\theta A}{2L_{MM}L_H}>0$，$x_i^{i(R)j(R)}-x_i^{i(M)j(M)}=\frac{t^2A(1-\theta)}{4L_{RR}L_{MM}}>0$，$x_i^{i(R)j(M)}-x_i^{i(R)j(R)}=\frac{ht^2\theta A}{4L_{RR}L_H}>0$，$x_i^C-x_i^{i(R)j(R)}=\frac{tA(4h-t)(1-\theta)}{4L_{RR}(2h(2-\theta)-t(1-\theta))}>0$，$x_i^{i(R)j(M)}-x_i^C=\frac{tA(\theta^2(24h^2-10ht+t^2)+8h^2\theta-(4h-t)(8h-t))}{4L_H(2h(2-\theta)-t(1-\theta))}$，故有 $\max\{x_i^C,x_i^{i(R)j(M)}\}>x_i^{i(R)j(R)}>x_i^{i(M)j(M)}>x_i^{i(M)j(R)}$，且当 $0<\theta<\frac{\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}-4h^2}{24h^2-10ht+t^2}$ 时，$x_i^C>x_i^{i(R)j(M)}$，当 $\frac{\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}-4h^2}{24h^2-10ht+t^2}<\theta<1$ 时，$x_i^C<x_i^{i(R)j(M)}$.

同理可得，$\max\{q_i^C,q_i^{i(R)j(M)}\}>q_i^{i(R)j(R)}>q_i^{i(M)j(M)}>q_i^{i(M)j(R)}$，$\max\{Q_i^C,Q_i^{i(R)j(M)}\}>Q_i^{i(R)j(R)}>Q_i^{i(M)j(M)}>Q_i^{i(M)j(R)}$，且当 $0<\theta<\frac{\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}-4h^2}{24h^2-10ht+t^2}$ 时，$q_i^C>q_i^{i(R)j(M)}$，$Q_i^C>Q_i^{i(R)j(M)}$，当 $\frac{\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}-4h^2}{24h^2-10ht+t^2}<\theta<1$ 时，$q_i^C<q_i^{i(R)j(M)}$，$Q_i^C<Q_i^{i(R)j(M)}$.

其中 $1-\frac{\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}-4h^2}{24h^2-10ht+t^2}=\frac{28h^2-10ht+t^2-\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}}{24h^2-10ht+t^2}$. 因为 $0<t\leqslant 2h$，故 $24h^2-10ht+t^2=10h(2h-t)+4h^2+t^2>0$，又因 $(28h^2-10ht+t^2)^2-(784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4)=2ht(24h^2-10ht+t^2)>0$，所以 $28h^2-10ht+t^2>\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}$，故 $\frac{28h^2-10ht+t^2-\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}}{24h^2-10ht+t^2}>0$. 综上 $0<\frac{\sqrt{784h^4-608h^3t+176h^2t^2-22ht^3+t^4}-4h^2}{24h^2-10ht+t^2}<1$.

证毕.

推论 1 的证明：

当 $Q_i^C=\frac{h(a-htc_e(2-\theta))}{2h(2-\theta)-t(1-\theta)}>0$ 时，$a>a^C=htc_e(2-\theta)$. 当 $Q_i^{i(M)j(M)}=\frac{hA}{2L_{MM}}-\frac{htc_e}{2}>0$ 时，$a>a^{MM}=htc_e(4-3\theta)$. 当 $Q_i^{i(R)j(R)}=\frac{hA}{4L_{RR}}-\frac{htc_e}{2}>0$ 时，$a>a^{RR}=\frac{tc_e(2h(4-3\theta)-t(1-\theta))}{2}$. 当 $Q_i^{i(M)j(R)}=\frac{hAL_1}{2L_H}-\frac{htc_e}{2}>0$ 且 $Q_i^{i(R)j(M)}=\frac{hAL_2}{4L_H}-\frac{htc_e}{2}>0$ 时，$a>a^H=\frac{htc_e(2h(16-9\theta^2)-t(8+\theta-6\theta^2))}{2h(4+3\theta)-2t(1+\theta)}$. 因为 $a^H-a^{MM}=\frac{h\theta c_et^2}{2(h(4+3\theta)-t(1+\theta))}>0$，$a^{MM}-a^{RR}=\frac{t^2c_e(1-\theta)}{2}>0$，$a^{RR}-a^C=\frac{tc_e(4h-t)(1-\theta)}{2}>0$，所以 $a^H>a^{MM}>a^{RR}>a^C$.　　证毕.

命题 6 的证明:

$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}-\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}=\dfrac{htA^2(72h^2-24ht+t^2)(\theta-\theta_{1+})(\theta-\theta_1)}{16L_{MM}^2L_{RR}^2}$,其中,$\theta_1=\dfrac{72h^2-22ht+t^2-2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{72h^2-24ht+t^2}$,

$\theta_{1+}=\dfrac{72h^2-22ht+t^2+2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{72h^2-24ht+t^2}$,$0<\theta_1<1$,$\theta_{1+}>1$. 故当 $0\leqslant\theta<\theta_1$ 时,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$;当 $\theta_1\leqslant\theta<1$ 时,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}\leqslant\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$.

$$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}-\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}=\frac{htA^2(6h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)(\theta+\theta_{2+})(\theta-\theta_{2+})(\theta+\theta_2)(\theta-\theta_2)}{16L_{MM}^2L_H^2}$$

其中 $\theta_2=\sqrt{\dfrac{(4h-t)(6h-t)(8h-t)(18h-t)-2\sqrt{3}h(48h^2-14ht+t^2)\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{(6h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}}$,

$\theta_{2+}=\sqrt{\dfrac{(4h-t)(6h-t)(8h-t)(18h-t)+2\sqrt{3}h(48h^2-14ht+t^2)\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{(6h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}}$,$0<\theta_2<1$,$\theta_{2+}>1$. 故当 $0\leqslant\theta<\theta_2$ 时,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$;当 $\theta_2\leqslant\theta<1$ 时,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}\leqslant\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$.

$$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}-\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}=\frac{ht(2a-t^2c_e(1-\theta))^2(3h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)(\theta+\theta_{3+})(\theta-\theta_{3+})(\theta+\theta_3)(\theta-\theta_3)}{16L_{RR}^2L_H^2}$$

其中 $\theta_3=\sqrt{\dfrac{(4h-t)^2(54h^2-21ht+t^2)-2\sqrt{3}h(3h-t)(4h-t)\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{(3h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}}$,

$\theta_{3+}=\sqrt{\dfrac{(4h-t)^2(54h^2-21ht+t^2)+2\sqrt{3}h(3h-t)(4h-t)\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{(3h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}}$,$\theta_{3+}>1$,当 $0<t<1.3671h$ 时,$0<\theta_3<1$,当 $1.3671h\leqslant t\leqslant 2h$ 时,$\theta_3\geqslant 1$. 故当 $0<t<1.3671h$ 且 $0<\theta<\theta_3$ 时,或者当 $1.3671h\leqslant t\leqslant 2h$ 时,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$;当 $0<t<1.3671h$ 且 $\theta_3\leqslant\theta<1$ 时,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}\leqslant\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$.

又因 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}-\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}=\dfrac{3h^2A^2t\theta(4h-t)(2t^2(1-\theta^2)-ht(24-\theta-18\theta^2)+4h^2(16-9\theta^2))}{16L_{RR}^2L_H^2}>0$,$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}-\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}=\dfrac{h^2A^2t\theta(12h-t)(2t^2(1-\theta^2)-ht(24+\theta-18\theta^2)+4h^2(16-9\theta^2))}{4L_{MM}^2L_H^2}>0$,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}-\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}=\dfrac{htA^2(t^2(1+\theta)^2-4ht(1+\theta)(5+6\theta)+8h^2(2+3\theta)(4+3\theta))}{16L_H^2}>0$,所以 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$,$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$,$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$.

此外,$0<\theta_1<\theta_2<\min\{\theta_3,1\}$,当 $0<t<1.3671h$ 时,阈值 θ_3 存在且 $0<\theta_3<1$ 的证明如下:

因为 $0<t\leqslant 2h$,所以 $72h^2-24ht+t^2>0$,$(72h^2-22ht+t^2)^2-\left(2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}\right)^2=(4h-t)(16h-t)(72h^2-24ht+t^2)>0$,所以 $72h^2-22ht+t^2>2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}$,故 $\theta_1=\dfrac{72h^2-22ht+t^2-2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{72h^2-24ht+t^2}>0$.

$$\begin{aligned}\theta_2^2-\theta_1^2&=\left(\sqrt{\frac{(4h-t)(6h-t)(8h-t)(18h-t)-2\sqrt{3}h(48h^2-14ht+t^2)\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{(6h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}}\right)^2-\\&\left(\frac{72h^2-22ht+t^2-2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{72h^2-24ht+t^2}\right)^2\\&=\frac{2h\left(12h-3t+\sqrt{3}\sqrt{48h^2-16ht+t^2}-\dfrac{t^2}{6h-t}\right)\left(72h^2-22ht+t^2-2\sqrt{3}h\sqrt{48h^2-16ht+t^2}\right)}{(72h^2-24ht+t^2)^2}\end{aligned}$$

,因为 $72h^2-22ht+t^2>2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}$,$12h-3t+\sqrt{3}\sqrt{48h^2-16ht+t^2}-\dfrac{t^2}{6h-t}=3(2h-t)+\sqrt{3}\sqrt{48h^2-16ht+t^2}+\dfrac{36h^2-6ht-t^2}{6h-t}>0$,故 $\theta_2^2>\theta_1^2$,故 $\theta_2>\theta_1$.

$$\theta_3^2-\theta_2^2=\frac{(4h-t)^2(54h^2-21ht+t^2)-2\sqrt{3}h(3h-t)(4h-t)\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{(3h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}-\frac{(4h-t)(6h-t)(8h-t)(18h-t)-2\sqrt{3}h(48h^2-14ht+t^2)\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{(6h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}$$

$$=\frac{ht(72h^2-22ht+t^2-2\sqrt{3}h\sqrt{48h^2-16ht+t^2})}{(3h-t)(6h-t)(72h^2-24ht+t^2)}>0$$，故 $\theta_3^2>\theta_2^2$，故 $\theta_3>\theta_2$.

$$1-\theta_2^2=1-\frac{(4h-t)(6h-t)(8h-t)(18h-t)-2\sqrt{3}h(48h^2-14ht+t^2)\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{(6h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}=$$

$$\frac{2h\left(\sqrt{3}(8h-t)\sqrt{48h^2-16ht+t^2}-8h(9h-2t)\right)}{(6h-t)(72h^2-24ht+t^2)}$$，因为 $\left(\sqrt{3}(8h-t)\sqrt{48h^2-16ht+t^2}\right)^2-(8h(9h-2t))^2=(72h^2-24ht+t^2)(56h^2-24ht+3t^2)>0$，所以 $\sqrt{3}(8h-t)\sqrt{48h^2-16ht+t^2}>8h(9h-2t)$，故 $1-\theta_2^2>0$，即 $1>\theta_2$.

$$1-\theta_3^2=1-\frac{(4h-t)^2(54h^2-21ht+t^2)-2\sqrt{3}h(3h-t)(4h-t)\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{(3h-t)^2(72h^2-24ht+t^2)}=$$

$$\frac{h(2\sqrt{3}(4h-t)\sqrt{48h^2-16ht+t^2}-(72h^2-16ht-t^2))}{(3h-t)(72h^2-24ht+t^2)}$$，因为 $(2\sqrt{3}(4h-t)\sqrt{48h^2-16ht+t^2})^2-(72h^2-16ht-t^2)^2=(72h^2-24ht+t^2)(56h^2-56ht+11t^2)$，故当 $56h^2-56ht+11t^2>0$ 时，$\theta_3<1$，当 $56h^2-56ht+11t^2<0$ 时，$\theta_3>1$，即当 $0<t<1.3671h$ 时，$0<\theta_3<1$，当 $1.3671h\leq t\leq 2h$ 时，$\theta_3>1$.

故有 $0<\theta_1<\theta_2<\min\{\theta_3,1\}$ 成立，且只有当 $0<t<1.3671h$ 时，阈值 θ_3 才存在，且 $0<\theta_3<1$.

综上所述，当 $0\leq\theta<\theta_1$ 时，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，故有 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$.

当 $\theta_1\leq\theta<\theta_2$ 时，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}\leq\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，故有 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}\geq\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$.

当 $\theta_2\leq\theta<\min\{\theta_3,1\}$ 时，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}\leq\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，故有 $\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}\geq\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$.

当 $0<t<1.3671h$ 且 $\theta_3\leq\theta<1$ 时，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}<\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}\leq\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$，故有 $\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}\geq\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$.　　证毕.

推论 3 的证明：

由命题 6 可知，当 $0\leq\theta<\theta_1$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$；当 $\theta_1\leq\theta<\theta_2$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}\geq\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$；当 $\theta_2\leq\theta<\min\{\theta_3,1\}$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}\geq\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$；当 $\theta_3\leq\theta<1$ 时，有 $\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}\geq\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$. 可以看出，当 $0\leq\theta<\theta_2$ 时，无论对手链选择何种策略，i 供应链选择 R 策略所获得的总利润均会大于其选择 M 策略所获得的总利润，因此 i 供应链会选择 R 策略，又因两条链是对称的，故此时，RR 是唯一的均衡策略. 当 $\theta_2\leq\theta<\min\{\theta_3,1\}$ 时，如果对手链选择 M 策略，则 i 供应链也会选择 M 策略（$\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}\geq\Pi_{T_i}^{i(R)j(M)}$），如果对手链选择 R 策略，则 i 供应链也会选择 R 策略（$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(R)}$），故此时，MM 和 RR 都是均衡策略；同理，当 $\theta_3\leq\theta<1$ 时，MM 是唯一的均衡策略.　　证毕.

单供应链情形：

当市场中只有一个制造商和一个零售商时，设产品需求 $q=a-p$，延保服务需求 $Q=q-h\frac{x}{t}$. 集中化情形下系统的利润函数为 $\max_{p,x}\Pi_T^C=pq+(x-c_e t^2)Q$. 如果由制造商提供延保服务，则制造商和零售商的最大化问题分别为 $\max_{w,x}\Pi_M^M=wq+(x-c_e t^2)Q$ 和 $\max_{p}\Pi_R^M=(p-w)q$. 如果由零售商提供延保服务，则制造商和零售商的最大化问题分别为 $\max_{w,x}\Pi_M^M=wq$ 和 $\max_{p}\Pi_R^M=(p-w)q+(x-c_e t^2)Q$. 求得的批发价格、产品价格、延保价格和系统总利润函数如下表所示.

附表 2 单供应链情形下的均衡结果

Attached Table 2 Equilibrium results in the case of a single supply chain

	C 模型	M 模型	R 模型
w		$\frac{a(4h-t)+2ht^2c_e}{8h-t}$,	$\frac{2a-t^2c_e}{4}$,
p	$\frac{a(2h-t)+ht^2c_e}{4h-t}$,	$\frac{a(6h-t)+ht^2c_e}{8h-t}$,	$\frac{2a(3h-t)+ht^2c_e}{2(4h-t)}$,
x	$\frac{t(a+(2h-t)tc_e)}{4h-t}$,	$\frac{t(a+(4h-t)tc_e)}{8h-t}$,	$\frac{t(2a+(8h-3t)tc_e)}{4(4h-t)}$,
Π_T	$\frac{h(a^2-t^2c_e(a-htc_e))}{4h-t}$,	$\frac{h(a^2(12h-t)-t^2c_e(a(12h-t)-htc_e(16h-t)))}{(8h-t)^2}$,	$\frac{h(12a^2-t^2c_e(12a-tc_e(16h-t)))}{16(4h-t)}$,

$\Pi_T^C-\Pi_T^R=\frac{h(2a-t^2c_e)^2}{16(4h-t)}>0$，$\Pi_T^R-\Pi_T^M=\frac{ht(16h-t)(2a-t^2c_e)^2}{16(4h-t)(8h-t)^2}>0$，故 $\Pi_T^C>\Pi_T^R>\Pi_T^M$．

命题 7 的证明：

$\Pi_{T_i}^C-\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}=\frac{8h^3A^2(3h-t)(\theta-\theta_{C-M}{}^+)(\theta-\theta_{C-M})}{(2h(2-\theta)-t(1-\theta))^2L_{MM}^2}$，其中 $\theta_{C-M}=\frac{3(4h-t)-\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{4(3h-t)}$，$\theta_{C-M}{}^+=\frac{3(4h-t)+\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{4(3h-t)}$，$0<\theta_{C-M}<1$，$\theta_{C-M}{}^+>1$．故当 $0\leqslant\theta<\theta_{C-M}$ 时，$\Pi_{T_i}^C>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$；当 $\theta_{C-M}\leqslant\theta<1$ 时，$\Pi_{T_i}^C\leqslant\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$．

$\Pi_{T_i}^C-\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}=\frac{hA^2(4h-t)(24h^2-12ht+t^2)(\theta-\theta_{C-R}{}^+)(\theta-\theta_{C-R})}{16L_{RR}^2(2h(2-\theta)-t(1-\theta))^2}$，其中 $\theta_{C-R}=\frac{(4h-t)((6-2\sqrt{3})h-t)}{24h^2-12ht+t^2}$，$\theta_{C-R}{}^+=\frac{(4h-t)((6+2\sqrt{3})h-t)}{24h^2-12ht+t^2}$，$0<\theta_{C-R}<1$，$\theta_{C-R}{}^+>1$．故当 $0\leqslant\theta<\theta_{C-R}$ 时，$\Pi_{T_i}^C>\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$；当 $\theta_{C-R}\leqslant\theta<1$ 时，$\Pi_{T_i}^C\leqslant\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}$．

由命题 6 的证明可知，当 $0\leqslant\theta<\theta_1$ 时，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$；当 $\theta_1\leqslant\theta<1$ 时，$\Pi_{T_i}^{i(R)j(R)}\leqslant\Pi_{T_i}^{i(M)j(M)}$，其中 $0<\theta_1<1$．此外，$0<\theta_{C-R}<\theta_{C-M}<\theta_1<1$ 的证明如下：

因为 $0<t\leqslant 2h$，所以 $\theta_{C-R}=\frac{(4h-t)((6-2\sqrt{3})h-t)}{24h^2-12ht+t^2}>0$，$\theta_{C-M}-\theta_{C-R}=\frac{3(4h-t)-\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{4(3h-t)}-\frac{(4h-t)((6-2\sqrt{3})h-t)}{24h^2-12ht+t^2}=\frac{(4h-t)(24\sqrt{3}h^2-8\sqrt{3}ht-t^2)-(24h^2-12ht+t^2)\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{4(3h-t)(24h^2-12ht+t^2)}$，因为 $((4h-t)(24\sqrt{3}h^2-8\sqrt{3}ht-t^2))^2-((24h^2-12ht+t^2)\sqrt{(4h-t)(12h-t)})^2=16ht(3h-t)(4h-t)(24h^2-4(3+\sqrt{3})ht+(2+\sqrt{3})t^2)>0$，所以 $(4h-t)(24\sqrt{3}h^2-8\sqrt{3}ht-t^2)>(24h^2-12ht+t^2)\sqrt{(4h-t)(12h-t)}$，故 $\theta_{C-M}>\theta_{C-R}$． $\theta_1-\theta_{C-M}=\frac{72h^2-22ht+t^2-2\sqrt{3}h\sqrt{(48h^2-16ht+t^2)}}{72h^2-24ht+t^2}-\frac{3(4h-t)-\sqrt{(4h-t)(12h-t)}}{4(3h-t)}=\frac{\sqrt{48h^2-16ht+t^2}(72h^2-24ht+t^2-8\sqrt{3}h(3h-t))-t(48h^2-16ht+t^2)}{4(72h^2-24ht+t^2)(3h-t)}$，因为 $(\sqrt{48h^2-16ht+t^2}(72h^2-24ht+t^2-8\sqrt{3}h(3h-t)))^2-(t(48h^2-16ht+t^2))^2=16(2-\sqrt{3})h(3h-t)(4h-t)(12h-t)(72h^2-24ht+t^2)>0$，所以 $\sqrt{48h^2-16ht+t^2}(72h^2-24ht+t^2-8\sqrt{3}h(3h-t))>t(48h^2-16ht+t^2)$，故 $\theta_1>\theta_{C-M}$． 证毕.

综上有 $0<\theta_{C-R}<\theta_{C-M}<\theta_1<1$．

命题 8 的证明：

$\frac{\partial\frac{x_i^{i(M)j(M)}}{t}}{\partial h}=\frac{-A(4-3\theta)}{L_{MM}^2}<0$，$\frac{\partial p_i^{i(M)j(M)}}{\partial h}=\frac{tA}{L_{MM}^2}>0$，$\frac{\partial w_i^{i(M)j(M)}}{\partial h}=\frac{t(2-\theta)A}{L_{MM}^2}>0$．$\frac{\partial\frac{x_i^{i(R)j(R)}}{t}}{\partial h}=\frac{-A(4-3\theta)}{4L_{RR}^2}<0$，$\frac{\partial p_i^{i(R)j(R)}}{\partial h}=$

$\frac{tA}{2L_{RR}^2}>0,\frac{\partial w_i^{i(R)j(R)}}{\partial h}=\frac{t\theta A}{4L_{RR}^2}>0.\frac{\partial\frac{x_i^{i(M)j(M)}}{t}}{\partial t}=\frac{a(1-\theta)+c_e(t^2(1-\theta)^2-4ht(1-\theta)(4-3\theta)+2h^2(4-3\theta)^2)}{L_{MM}^2}>0$，$\frac{\partial p_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}=\frac{-h(2a-tc_e(2h(4-3\theta)+L_{MM}))}{L_{MM}^2}$，$\frac{\partial w_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}=\frac{-h(2-\theta)(2a-tc_e(2h(4-3\theta)+L_{MM}))}{L_{MM}^2}$，当 $a>\frac{tc_e(2h(4-3\theta)+L_{MM})}{2}$ 时，$\frac{\partial p_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}<0$，$\frac{\partial w_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}<0$；当 $a_0<a<\frac{tc_e(2h(4-3\theta)+L_{MM})}{2}$ 时，$\frac{\partial p_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}>0$，$\frac{\partial w_i^{i(M)j(M)}}{\partial t}>0.\ \frac{\partial\frac{x_i^{i(R)j(R)}}{t}}{\partial t}=\frac{2a(1-\theta)+c_e(3t^2(1-\theta)^2-6ht(1-\theta)(4-3\theta)+2h^2(4-3\theta)^2)}{4L_{RR}^2}>0$，$\frac{\partial p_i^{i(R)j(R)}}{\partial t}=\frac{-h(2a-tc_eL_{MM})}{2L_{RR}^2}<0$，$\frac{\partial w_i^{i(R)j(R)}}{\partial t}=-\frac{2ah\theta+tc_e(1-\theta)(2t^2(1-\theta)-ht(16-13\theta)+8h^2(4-3\theta))}{4L_{RR}^2}<0$.　　证毕.

命题 9 的证明：

记 $\Delta q=\frac{q_i^{i(R)j(R)}}{q_i^{i(M)j(M)}}=\frac{L_{MM}}{2L_{RR}}$. 因为 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}-\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}=\frac{h(4h-t)A^2}{8L_{RR}^2}-\left(\frac{h(8h-t)A^2}{4L_{MM}^2}+\frac{ht^3c_e^2}{4}\right)$，要使 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，则 $\left(\frac{L_{MM}}{2L_{RR}}\right)^2>\frac{A^2(8h-t)+t^3c_e^2L_{MM}^2}{2A^2(4h-t)}$，即 $\Delta q>\Delta q_1=\sqrt{\frac{A^2(8h-t)+t^3c_e^2L_{MM}^2}{2A^2(4h-t)}}$. 同理，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}-\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}=\left(\frac{h(4h-t)A^2}{16L_{RR}^2}+\frac{ht^3c_e^2}{4}\right)-\frac{h^2A^2}{L_{MM}^2}$，要使 $\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$，则 $\Delta q>\Delta q_2=\sqrt{\frac{8hA^2-2t^3c_e^2L_{MM}^2}{2A^2(4h-t)}}$. 此外，$1<\sqrt{\frac{A^2(8h-t)+t^3c_e^2L_{MM}^2}{2A^2(4h-t)}}<2$，$1<\sqrt{\frac{8hA^2-2t^3c_e^2L_{MM}^2}{2A^2(4h-t)}}<2$.　　证毕.

推论 4 的证明：

因为 $(\Delta q_2)^2-(\Delta q_1)^2=\frac{8hA^2-2t^3c_e^2L_{MM}^2}{2A^2(4h-t)}-\frac{A^2(8h-t)+t^3c_e^2L_{MM}^2}{2A^2(4h-t)}=\frac{t(A^2-3t^2c_e^2L_{MM}^2)}{2A^2(4h-t)}$，又因为 $A-\sqrt{3}tc_eL_{MM}=\theta tc_e(6\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)+2a-tc_e(8\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)$，故当 $a>\frac{tc_e(8\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)}{2}$ 时，$A-\sqrt{3}tc_eL_{MM}>0$，$(\Delta q_2)^2-(\Delta q_1)^2>0$，$\Delta q_2>\Delta q_1$；当 $a_0<a<\frac{tc_e(8\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)}{2}$ 时，如果 $1-\frac{2a-2\sqrt{3}htc_e}{tc_e(6\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)}<\theta<1$，则 $A-\sqrt{3}tc_eL_{MM}>0$，$\Delta q_2>\Delta q_1$，如果 $0<\theta<1-\frac{2a-2\sqrt{3}htc_e}{tc_e(6\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)}$，则 $A-\sqrt{3}tc_eL_{MM}<0$，$\Delta q_2<\Delta q_1$；特别地，如果 $\theta=1-\frac{2a-2\sqrt{3}htc_e}{tc_e(6\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)}$，则 $\Delta q_1=\Delta q_2=\sqrt{\frac{12h-t}{3(4h-t)}}$.

记 $\theta_b=1-\frac{2a-2\sqrt{3}htc_e}{tc_e(6\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)}$，$a_b=\frac{tc_e(8\sqrt{3}h-\sqrt{3}t+t)}{2}$. 故当 $a>a_b$ 或者当 $a_0<a<a_b$ 且 $\theta_b<\theta<1$ 时，$\Delta q_2>\Delta q_1$. 如果 $\Delta q>\Delta q_2$，则 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$；如果 $\Delta q<\Delta q_1$，则 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$；如果 $\Delta q_1<\Delta q<\Delta q_2$，则，$\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$. 当 $a_0<a<a_b$ 且 $0<\theta<\theta_b$ 时，$\Delta q_2<\Delta q_1$. 如果 $\Delta q>\Delta q_1$，则 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$；如果 $\Delta q<\Delta q_2$，则 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$；如果 $\Delta q_2<\Delta q<\Delta q_1$，则，$\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$. 特别地，当 $a_0<a<a_b$ 且 $\theta=\theta_b$ 时，$\Delta q_1=\Delta q_2=\sqrt{\frac{12h-t}{3(4h-t)}}$. 如果 $\Delta q>\sqrt{\frac{12h-t}{3(4h-t)}}$，则 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}>\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$；如果 $\Delta q<\sqrt{\frac{12h-t}{3(4h-t)}}$，则 $\Pi_{M_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{M_i}^{i(M)j(M)}$，$\Pi_{R_i}^{i(R)j(R)}<\Pi_{R_i}^{i(M)j(M)}$.　　证毕.