

doi: 10.19920/j.cnki.jmsc.2023.07.004

连续波动的累积变化是否触发随机跳跃?^①

——来自国际股票市场的证据

朱福敏¹, 刘仪榕^{1,2}, 郑尊信^{1*}

(1. 深圳大学经济学院, 深圳 518060; 2. 宁波诺丁汉大学商学院, 宁波 315100)

摘要: 股票市场存在跳跃自激发现象和波动率集聚特征已经成为共识, 但市场内部随机跳跃和连续波动间是否会相互转化、波动累积是否触发随机跳跃等问题尚存争议. 为此, 本文将连续波动的累积变化视作价格的“量变”, 间断跳跃视作“质变”, 采用动态跳扩散双因子交叉回馈模型, 借助条件特征函数, 引入广义矩估计与粒子滤波方法(GMM-PF), 针对具有代表性的国际股票市场进行实证研究, 并捕捉和量化两者之间的动态关系. 研究显示, 随机跳跃和连续波动呈现协同演化、交互传导的现象, 一方面随机跳跃将改变下一期的波动率, 另一方面量变引起质变, 波动率累积也会提高未来的跳跃达到率. 同时, 与极大似然粒子滤波估计(MLE-PF)、序贯贝叶斯学习方法(SBL)相比, 本文提出的 GMM-PF 方法可实现估计精度与估计效率的联合最优. 研究还发现, 跳扩散之间的传导机制在不同市场中存在较大差异. 针对各个市场的量化结果来看, 量变引起质变的程度普遍大于质变引起量变的水平. 相比境外发达市场, 大多数新兴市场对跳跃风险的消化、转移和分散能力相对较弱, 其跳跃集聚和持续性处于较高水平. 由此可见, 监管当局和投资者有必要对跳跃演变规律给予足够重视.

关键词: 量变引起质变; 跳跃自激发; 跳扩散交叉回馈; 广义矩估计; 粒子滤波

中图分类号: F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2023)07-0054-22

0 引言

资产价格的演变有许多不可忽视的重要特征. 股票价格的运动过程可以分解为连续性扩散(与布朗运动相对应, 这部分称为 diffusion)和随机跳跃(与瞬时变化的非连续性突变对应, 这部分称为 jumps)^[1-5], 前者形成连续性的波动, 后者产生间断性的市场震荡, 这些都是市场总波动的重要组成部分^[6,7]. 相应地, 股价的跌宕起伏和股市的波动震荡都具有明显的集聚和持续特征, 这是股票市场特定风险不容忽视的演变规律. 大量研究表明, 股票价格的大幅震荡会引起市场的持续性波动, 那么股票市场中波动率累积到一定程度又是否会反向触发随机跳跃? 哲学上的“量

变”指事物的连续累积变化, 这可在一定程度上反映波动的变化特征, 而“质变”一般表现为事物非连续性的中断或突变, 这与跳跃的本质十分相似, 因此本文将连续性波动的累积变化视作价格的“量变”, 将间断性的跳跃视作“质变”, 研究跳跃和波动的相互转化关系. 如果股市存在量变引起质变的效应, 这意味着股票市场的波动集聚变化可能导致市场持续震荡甚至崩盘. 研究跳跃和扩散的动态演变机制和相互关系对资产定价、收益预测、投资组合分析以及风险管理都具有重要意义^[8].

一方面, 非预期事件的发生往往容易引发资产价格跳跃, 一次跳跃会触发市场后续更多的随

① 收稿日期: 2021-06-07; 修订日期: 2022-06-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(72071132; 72173089).

通讯作者: 郑尊信(1979—), 男, 福建福清人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: zzheng@szu.edu.cn

机跳跃行为,从而形成跳跃群聚现象,这种现象称为跳跃自激发(self-exciting)。Eraker等^[1,2]最早采用收益率及波动率都带有跳跃(co-jump)的连续时间随机波动率模型对标普500指数以及纳斯达克100指数进行建模,给出了波动率和收益率都有明显跳跃行为的证据。Lee和Mykland^[3]对指数及个股高频数据进行非参数统计检验,认为随机跳跃的强度应该是时变的。Todorov和Tauchen^[4]基于VIX高频数据的非参数分析,证明波动率中也存在与价格跳跃高度相关的随机跳跃行为,且具有高阶变差和无穷活动率等特点。Christoffersen等^[9]则在GARCH模型的基础上建立了时变跳跃强度的离散时间模型,从期权和收益率数据中得到了跳跃集聚的证据。唐勇和张伯新^[10]基于非参数方法结合A-J跳跃检验统计量考察了上证指数的高频数据跳跃行为,实证研究表明其正负方向跳跃是不对称的,且跳跃的变差在总方差中占有较高比例。Ait-Sahalia等^[11]引入Hawkes跳-扩散模型,探究美国、英国、日本、中国香港、墨西哥五个主要金融市场的跳跃集聚现象和跳跃互激发效应,研究发现,五个市场的跳跃行为都存在着显著的自激发现象,且市场两两之间的互激发效应具有明显不对称性。Boswijk等^[12]将跳跃中的自激发概念扩展到一类丰富的连续时间半鞅模型中,采用十分钟的高频数据检测到离散观测样本中的跳跃集聚现象。如今越来越多实证研究提供了市场存在跳跃集聚的证据。股市中的跳跃行为不仅具有无穷活动率特征,且存在持续性和记忆性,这些特征已经反映在金融市场中,并对衍生品定价、对冲与套利产生重要影响。另一方面,市场波动水平也同样存在集聚现象和非对称的回馈效应^[13-19]。针对随机跳跃和连续波动的关系,陈浪南等^[20]采用混合GARCH跳模型,研究了上证综合指数、中国香港恒生指数、中国台湾加权指数、道琼斯工业指数和纳斯达克指数的跳跃行为特征,研究显示,跳跃不仅存在时变特征和集聚效应,而且对波动率预期存在显著的非对称回馈效应,即存在质变向量变渗透的显著特征。Fulop等^[21]针对标普500指数提出了随机波动率的跳跃自激发模型,研究发现,资产收益率

的负跳可以同时收益波动率和跳跃强度产生非对称回馈作用,从而提升极端事件发生的概率。与此同时,陈国进和王占海^[22]、马勇等^[23]、吴恒煜等^[24]的研究也表明,中国股市也存在波动率非对称回馈和跳跃群聚现象。事实上,与波动率非对称回馈类似,股市中跳跃行为同样具有杠杆作用,负跳将提高未来的跳跃强度和扩散波动率。现有研究主要聚焦于考察随机跳跃对波动率形成的冲击和回馈,而没有反过来考虑和量化连续扩散对随机跳跃的短期反馈和持续性影响,即量变引起质变的机制与程度。为此,朱福敏等^[25,26]探讨了半鞅动态跳-扩散交叉回馈模型应用于美国市场的期权定价问题,其假设跳跃和扩散之间存在一定的交互协同关系,基于状态空间结构的序贯贝叶斯参数学习方法的结果显示,在美国期权市场上采用交叉回馈模型能显著提高定价精度。由此可见,市场波动和跳跃行为可能不是彼此孤立存在的,而是相互交叉回馈,甚至呈现出彼此关联而又各具特色的协同演变规律。

如今,随机跳跃的发生会对连续波动率造成冲击并提升下一期的跳跃到达率这一观点已经被广泛接受^[27-29]。然而,股票市场中波动率累积到一定程度是否会触发随机跳跃的形成和提高市场的跳跃强度?即波动率的量变是否会引起随机跳跃的质变?对此学术界尚缺乏国际市场的相关研究,也尚未形成共识^[9,11,26,30]。为了在国际市场上提供更加全面、系统和广泛的证据,同时为大样本和多指数的全球股票市场的实证分析开拓更加高效便捷的估计方法,本文首先采用动态跳-扩散双因子交叉回馈模型对国际股票市场指数的跳跃和扩散两类不同风险进行精准分离,捕捉连续波动“量变”引发随机跳跃“质变”的规律,并量化股票市场跳跃和波动相互影响的持续性水平和交叉回馈程度,即量变引起质变的长期记忆与短期影响;其次借助广义矩估计方法(GMM)和粒子滤波技术(PF),得到准确的测度系数与跳扩散状态变量的时间序列,实现从理论到实证的演绎,为本文的研究结论提供有力的实证支撑;最后,结合本文提供的核心证据,针对跳跃与扩散风险的演变特征,为监管当局、投资者以及政策制定者提供理

论分析与实证检验的参考依据. 本文的特色有: 1) 和 Christoffersen 等^[9]提出的一系列 Lévy-GARCH 模型相比, 本文更加综合、全面地考虑了跳跃达到率和波动率之间的动态交互作用; 和 Aït-Sahalia 等^[11]重点考察市场间跳跃传导规律的 Hawkes 模型相比, 本文假设波动率和跳跃到达率交叉变化, 详细刻画了市场内随机跳跃和连续波动率之间的动态双向影响关系, 即量变与质变的相互转换规律; 和 Fulop 等^[21]提出的连续时间跳扩散模型相比, 本文的跳扩散交互回馈模型既能分析跳跃对波动的冲击, 也能反过来考察波动集聚对跳跃的影响和反馈, 能更深入地描绘跳跃冲击在市场内部的动态演变和转化机制; 2) 和朱福敏等^[25, 26]用序贯贝叶斯学习方法研究美国市场相比, 本文的实证研究拓展到国际股票市场, 能够提供更加全面、系统和广泛的实证参考, 分析更为深入, 研究结论更加可靠; 同时, 针对国际市场大样本情形, 本文进一步通过条件特征函数推导了模型的矩条件, 借助广义矩估计方法和粒子滤波技术(GMM-PF)联合估计潜在的跳跃到达率和连续波动率. 模拟仿真实验表明, GMM-PF 相比粒子滤波的极大似然法(MLE-PF)更加准确, 相比序贯贝叶斯的参数学习方法(SBL)更加高效快捷, 平均估计时间不到序贯贝叶斯学习方法的 1/10, 且估计精度有保障、估计效率高, 即可实现估计精度与效率的联合最优, 这对研究多指数的国际股票市场十分有利; 3) 本文借助跳扩散双因子交叉回馈模型, 对所有市场指数的跳跃和扩散成分进行了精准分解, 量化分析了各市场相应风险的集聚水平和交互反馈程度, 并就跳跃风险的转移、消化能力进行国际间的横向动态比较, 提供了量变引起质变的国际证据. 研究发现, 各个市场内部存在显著的跳跃激发、波动率集聚以及跳扩散之间的非对称交叉回馈影响, 这说明跳跃不仅仅对连续波动造成冲击, 同样, 波动率累积到一定程度也会触发跳跃, 从而提升市场的跳跃发生概率, 引发质变, 即存在量变与质变相互转化特征, 且后者在国际股市中更为普遍; 此外, 研究还表明, 新兴市场(如中国大陆市场)的跳跃变差占总变差的比例较高, 且其震荡水平和跳跃的持

续性程度相对高于其他市场, 跳跃风险转化为扩散波动率的能力较弱, 这些结论对我国进一步研究和探索完善股票市场机制体制有重要参考价值.

1 模型设定

1.1 资产收益的动态过程

为了同时捕获资产价格中的跳跃和波动率动态, 假设对数收益率的随机微分方程满足如下半鞅随机过程

$$dL_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + h_t dJ_t \tag{1}$$

这里 dL_t 表示对数收益率的随机微分, μ_t 是确定性漂移率, σ_t 为连续扩散率, 反映扩散的波动率水平, h_t 作为随机跳跃项的时变系数, 表示瞬时的跳跃到达率, 反映随机跳跃的活跃率水平. dW_t, dJ_t 分别代表相互独立的扩散和跳跃冲击, W_t 则表示维纳过程. 这里采用计数过程 $\tilde{J}(dx, dt)$ 作为随机跳跃 J_t 的随机测度, 度量单位时间内幅度为 x 的跳跃到达率. 为了方便理解, 这里先采用莫顿复合泊松跳跃过程^[31]介绍和刻画跳跃动态, 此时, 随机跳跃可表达为

$$dJ_t = \int_{\mathbf{R}} x \cdot \tilde{J}(dx, dt) = \sum_{i=1}^{dN_t} Y_i \tag{2}$$

$$Y_i \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$$

$$dN_t \sim Poisson(\lambda_j dt)$$

这里 J_t 表示跳跃总幅度, Y_i 表示单次跳跃幅度, 可假设服从正态分布. N_t 表示跳跃发生的次数, 服从强度为 λ_j 的泊松分布, 此时 $h_t dN_t$ 可度量无穷小时间内的跳跃频率, 称为跳跃达到率, $h_t d\lambda_j$ 则表示该随机过程时变的跳跃强度. 默顿跳过程属于有限跳跃, 有限跳虽然能够捕捉资产价格的重大突变, 但无法解释市场的高频率无穷小跳跃. 研究表明, 在收益率拟合和衍生品定价方面, 无穷跳跃相比有限跳跃具有更好的表现^[21, 26, 32-34], 因此本文引入无穷活动率的 Variance Gamma (VG) 过程来刻画跳跃水平, 此时随机跳跃可表达为如下形式

$$dJ_t = \int_{\mathbf{R}} x \cdot \tilde{J}(dx, dt) \sim VG(C, G, M, dt) \tag{3}$$

这里 $h_t dJ_t$ 表示总的跳跃成分, 令 $x_t = dJ_t$ 为每单

位的跳跃幅度,且服从VG无穷活动率的跳跃过程,那么对VG标准化之后, h_t 可表示单位时间下已实现的跳跃到达率.此时对数收益率的随机过程分解为两种不同类型的冲击:一种是服从正态分布的随机冲击,即连续布朗运动,其连续扩散的波动率为 σ_t ,另一种是由跳跃造成的非连续性冲击,其跳跃到达率为 h_t ,对扩散和跳跃的凸度修正和补偿则指定在半鞅模型的确定性漂移项中.后续只需假设跳跃强度或跳跃活动率随时间而动态变化,即可刻画跳跃的自激发和集聚现象.与波动率类似, h_t 可以作为资产价格随机过程的跳跃压力指标及市场中跳跃风险的测度^[25, 26, 35, 36].

此时,VG过程的跳跃幅度 x_t 可表示成两个Gamma过程之差

$$x_t = \Gamma_t(C, M) - \Gamma_t(C, G) \quad (4)$$

其中 M 和 G 分别控制正向跳跃测度和负向跳跃测度,而VG过程的均值和方差为

$$\mu_j = \frac{C}{M} - \frac{C}{G} \quad (5)$$

$$\sigma_j^2 = \frac{C}{M^2} + \frac{C}{G^2}$$

这里假设随机跳跃服从无穷跳跃的VG过程,使得模型能够同时捕获大幅度跳跃和高频率的无穷小跳跃.进一步令跳跃的活动率具有时变特征,便于在跳-扩散框架下系统地分析跳跃的集聚效应、自激行为以及波动之间的相互传导机制.

1.2 量变与质变关系的测度

依据观测数据和变量的离散特征,用 z_t 表示单位时间内的扩散 dW_t ,代表连续扩散的随机冲击. x_t 表示标准化的随机跳跃因子,继续采用 h_t 代表单位时间内的已实现跳跃到达率,那么对数收益率可以表示为^[26]

$$y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \mu_t - \varphi_x(h_t) - \frac{\sigma_t^2}{2} + h_t x_t + \sigma_t z_t \quad (6)$$

这里 z_t 服从标准正态分布, x_t 和 z_t 相互独立, $\varphi_x(u) = \ln E[e^{ux}]$ 为随机跳跃因子的矩母指数,用以对跳跃项进行凸度修正,使该随机过程可以转化为一个指数鞅.在此设定下,股票收益率的随

机变化来源于连续扩散和随机跳跃两个因子,且将产生两组风险溢价^[32]②.

为探究连续波动量变与随机跳跃质变的相互转化规律,精准测度其作用程度,本文采用朱福敏等^[26]提出的跳-扩散双因子交叉回馈模型(CFJDEC),来全面刻画随机跳跃与连续波动两类风险之间的动态演化特征与交叉影响机制,具体形式如下

$$\begin{pmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 (x_t - \gamma_J)^2 \\ \sigma_t^2 (z_t - \gamma_D)^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中 α_{10} , α_{20} 分别为跳跃到达率和扩散波动率的常数项, β_{ij} , $i, j = 1, 2$.反映 j 的历史状态对 i 的持续性影响,即两类风险的回归关系.当 $i = j$ 时,表示跳跃或波动的自回归, $i \neq j$ 为交叉回归.由于扩散波动率 σ_t^2 的变化会影响总体波动程度,因此本文将其视作“量变”,而跳跃到达率 h_t^2 的变化将提高市场后续跳跃发生概率,进而改变总的跳跃程度 $E[h_{t+1} x_{t+1}]$,因此将跳跃的触发视作质变,此时量变与质变的自相关关系和相互转化效应可由式(7)充分展现出来.例如, β_{11} 为跳跃到达率的自回归系数,反映市场跳跃压力的持续性水平,即质变的聚集性. β_{12} 则表示跳跃到达率关于扩散波动率的回归系数,表示当期的波动变化一单位可引起下一期跳跃到达率变化 β_{12} 单位,体现该市场波动风险向跳跃风险转移和分散的能力,也即“量变引起质变”的能力,而 β_{21} 则可测度跳跃向连续波动率渗透的相对大小,即“质变引起量变”.同理, α_{ij} , $i, j = 1, 2$.反映了 j 的历史冲击对 i 状态的回馈效应,当 $i = j$ 时,表示自回馈, $i \neq j$ 为交叉回馈,如 α_{21} 反映了跳跃冲击对波动率的短期回馈水平,能够度量股市震荡之后市场对跳跃冲击的消化和分散能力, α_{12} 反映了已发生的扩散冲击对跳跃到达率的回馈水平,也可在一定程度上反映量变引起质变的短期水平; γ_J, γ_D 则分别体现跳跃和扩散冲击的非对称回馈系数,其取

② 连续波动与随机跳跃两类因子的风险溢价形式与相关证明备索.

值一般为正,表示存在杠杆效应.

令向量 $V_t = (h_t^2, \sigma_t^2)'$, 向量 $X_t = (x_t, z_t)'$, 则式(7)可简写为如下向量形式

$$V_{t+1} = U + \beta V_t + AY(V_t, X_t) \quad (8)$$

这里 V_t 代表收益率的总方差,它由扩散方差和跳跃二次变差组成. U 为常数向量,矩阵 A 反映各项元素的短期回馈效应,向量 $Y(V_t, X_t)$ 捕获了回馈效应的非对称性,矩阵 B 量化跳跃和波动的长期持续性水平,此时矩阵 A , 矩阵 B 分别表示为如下形式

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

在满足 V_{t+1} 无条件期望的有界性基础上,回馈矩阵 A 及持续性矩阵 B 满足^[26]

$$\begin{cases} A_{11} = \alpha_{11} [(\mu_j - \gamma_j)^2 + \sigma_j^2] & B_{11} = \beta_{11} + A_{11} \\ A_{12} = \alpha_{12} (\sigma_D^2 + \gamma_D^2) & B_{12} = \beta_{12} + A_{12} \\ A_{21} = \alpha_{21} [(\mu_j - \gamma_j)^2 + \sigma_j^2] & B_{21} = \beta_{21} + A_{21} \\ A_{22} = \alpha_{22} (\sigma_D^2 + \gamma_D^2) & B_{22} = \beta_{22} + A_{22} \end{cases} \quad (10)$$

这里 μ_j 和 σ_j^2 表示随机跳跃幅度 x_t 的均值和方差, μ_D 和 σ_D^2 表示扩散幅度 z_t 的均值和方差. 标准正态分布下为 0 和 1. 矩阵 B 直观展示和精确量化了各类风险的记忆程度和持续性水平,体现量变与质变相互转化的长期关系. 其中 B_{11} 表示跳跃风险自身的持续性(包括长期自回归和短期自回馈), B_{12} 表示连续扩散对跳跃风险的持续性影响,即“量变引起质变”的程度. 同理, B_{21} 表示随机跳跃对波动率的影响, B_{22} 表示扩散波动率自身的持续性. B_{11} , B_{22} 称为自集聚, B_{12} , B_{21} 称为互集聚. 与之对应的是矩阵 A 表示跳跃与扩散的短期回馈程度, A_{11} , A_{22} 分别为跳跃和扩散的“自回馈”, A_{12} , A_{21} 分别为跳跃和扩散的“互回馈”. 如果上述交互项不全为零,意味着随机跳跃和连续扩散之间互相影响、彼此关联,即不仅存在波动率量变引起跳跃质变的事实,跳跃质变也会向扩散波动率转化,此时 B_{12} 或 A_{12} 衡量波动率的量变在长期或短期引起跳跃质变的具体水平和

程度.

此时,随机冲击的总持续性水平 B_{all} , 以及模型参数的边界条件(二阶变差平稳),可分别表示为如下形式

$$\begin{aligned} B_{all} &= B_{11} + B_{22} - B_{11}B_{22} + B_{12}B_{21} \\ 0 < 1 - B_{11} &\leq 1, \quad 1 < 1 - B_{22} \leq 1 \\ 0 < 1 - B_{all} &\leq 1 \end{aligned} \quad (11)$$

本文采用的动态跳扩散双因子交叉回馈模型具有非常广泛的适用性和显著的优越性. 一方面,该框架嵌套了很多备受关注的跳跃自激发结构,包括跳扩散独立动态演化的半鞅随机过程^[11],跳扩散单向回馈的模型^[21],以及各种带跳跃的广义自回归条件异方差(GARCH)模型^[20,24];另一方面,将跳跃到达率和扩散波动率设定为条件状态变量,降低了模型的复杂性,可借助其条件特征函数进行参数的广义矩估计. 该框架依据参数约束跳跃的不同,包含下列四种情形(具体可参见图1): 1) $\beta_{12}, \beta_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{21} = 0$, 这种情形下认为随机跳跃和连续波动两者是独立演变、彼此无关的(仅包含①和②的影响),即 Non-feedback(无回馈, NFJDEC)^[11,22]; 2) $\beta_{12}, \beta_{21}, \alpha_{12} = 0$, 仅考虑跳跃集聚、波动群聚(①、②)和跳跃对波动率的单向回馈(③),这种情况下波动率累积不会反过来对跳跃产生相关影响,即 Half-feedback(半回馈, HFJDEC)^[21]; 3) $\beta_{12}, \beta_{21} = 0$, 该模型允许跳跃和波动率之间存在短期双向回馈(①、②、③、④),但没有考虑两种变化之间的长期影响关系,即无交叉记忆,可称为 Inter-feedback(互回馈, IFJDEC)^[20]; 4) $\beta_{ij}, \alpha_{ij} \neq 0$, 该模型全面系统地考虑了两种风险之间的协同演变,表明跳跃和波动之间存在交叉回馈和持续性的相互影响(①、②、③、④、⑤、⑥),可称为 Cross-feedback(交叉回馈, CFJDEC)^[25,26]; 后两者都能体现波动率量变引起跳跃质变的规律(④、⑥). 下文将介绍针对动态跳-扩散双因子交叉回馈模型的参数估计方法.

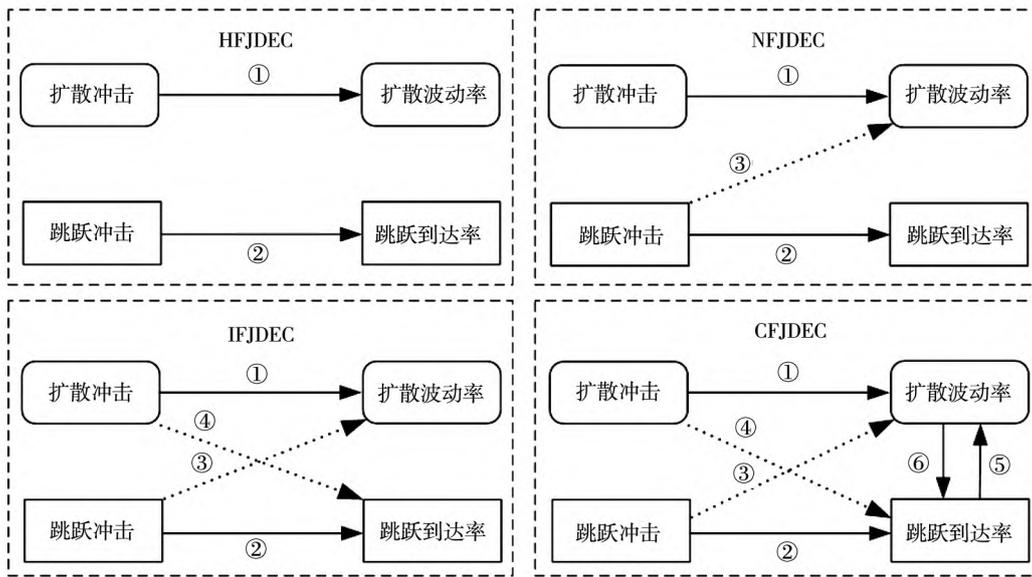


图 1 跳扩散传导机制

Fig. 1 Transmission mechanism of jumps and diffusion

2 模型估计

本文所引入的交互反馈模型属于非线性、非高斯的复杂动态结构,且同时包含多个不可观测的潜在状态变量(两个条件状态变量和两个随机状态变量),暂时没有封闭的、显式的密度函数,因此采用基于密度函数的极大似然方法(MLE)求解难度较大。目前,针对此类跳扩散双因子模型可用的估计方法主要有四种:基于特征函数的傅里叶变换^[24,33]、基于粒子滤波的极大似然估计^[9,14]、基于序贯贝叶斯的参数学习方法^[21,26],以及基于高阶矩条件的广义矩估计^[11,29,37]。特征函数的傅里叶变换方法要求模型具有指数型仿射结构和封闭的特征函数,这严格限制了模型设定的灵活性,不适用于本文采用的双因子动态交互模型。序贯贝叶斯学习方法(SBL)可以同时联合估计参数和多个潜在状态变量,对此类动态状态空间结构具有超高的估计精度^[21,25,26],然而面对国际市场具有多指数、大样本的情形,序贯贝叶斯学习又相对较为耗时。为了进一步探索更加高效、便捷的模型估计方法,本文提出了基于广义矩估计的粒子滤波技术(GMM-PF),并通过模拟仿真

从精度与效率两个维度论证这一方法的优越性。GMM-PF方法可对参数和状态进行分步估计,兼顾精度和效率,适用于国际股市的多指数和大样本情形。这一方面为非线性、非高斯动态模型的估计提供了较好的解决方案;另一方面也有利于开展稳健性分析,从多方面证实本文结论的可靠性。综合而言,GMM-PF方法能较好地捕获跳扩散双因子交叉回馈模型中跳跃和波动率动态,更可直观地实现参数的识别。下面分别介绍广义矩估计方法、粒子滤波技术和模拟仿真结果。

2.1 交叉回馈模型广义矩估计

首先,本文依据VG过程的矩母函数推导并给出动态模型的高阶矩条件,再引入广义矩估计方法(GMM)对模型参数进行初步估计,在此基础上结合粒子滤波技术(PF)实现波动与跳跃等状态变量的估计。

2.1.1 交叉回馈模型的高阶矩条件

广义矩估计(GMM)的核心步骤是构造包含参数的矩条件和计算权重矩阵,使得目标函数最小化。为了构造矩条件,在对收益率(对数)取条件矩的基础上,利用重期望公式得到无条件矩函数。其中,跳跃幅度 x_t 的高阶矩由VG过程的特征函数来计算,关于所构造的各阶矩条件如下^③。

③ 具体推导过程备索。

一阶条件矩

$$E[y_i | y_{i-1}] = \bar{\mu}_i + \mu_j E(h_i | h_{i-1}) \quad (12)$$

其中

$$\bar{\mu}_i = r_i + \lambda_1 \bar{h}_i + \lambda_2 \bar{\sigma}_i - \varphi_x(\bar{h}_i) - \frac{1}{2} E(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2) \quad (13)$$

$$\begin{cases} E(h_i^2 | h_{i-1}^2) = \alpha_{10} + B_{11} h_{i-1}^2 + B_{12} \sigma_{i-1}^2 \\ E(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2) = \alpha_{20} + B_{21} h_{i-1}^2 + B_{22} \sigma_{i-1}^2 \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{令} \begin{cases} \bar{h}_i = E(h_i | h_{i-1}) = \sqrt{E(h_i^2 | h_{i-1}^2)} \\ \bar{\sigma}_i = E(\sigma_i | \sigma_{i-1}) = \sqrt{E(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2)} \end{cases} \quad (15)$$

二阶条件矩

$$E\{[y_i - E(y_i | y_{i-1})]^2 | y_{i-1}^2\} = E(h_i^2 | h_{i-1}^2) \sigma_j^2 + E(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2) \sigma_D^2 \quad (16)$$

三阶条件矩

$$E\{[y_i - E(y_i | y_{i-1})]^3 | y_{i-1}^3\} = E(h_i^3 | h_{i-1}^3) [E(x_i^3) - E(x_i)^3] - 3E(h_i^3 | h_{i-1}^3) E(x_i) \sigma_j^2 \quad (17)$$

依据条件期望,可得

$$E(h_i^3 | h_{i-1}^3) = [E(h_i^2 | h_{i-1}^2)]^{\frac{3}{2}} \quad (18)$$

$$E(x_i^3) = 2\left(\frac{C}{M^3} - \frac{C}{G^3}\right) \quad (19)$$

四阶条件矩

$$E\{[y_i - E(y_i | y_{i-1})]^4 | y_{i-1}^4\} = -3\bar{\mu}_i [E(h_i^2 | h_{i-1}^2) \times E(x_i^2) + 3E(h_i^2 | h_{i-1}^2) E(x_i^2) E(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2)] + 9E(h_i^2 | h_{i-1}^2) E(x_i^2) E(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2) + 3\bar{\mu}_i^2 E(h_i^2 | h_{i-1}^2) [E(x_i^2) + \mu_j^2] - 3\bar{\mu}_i^3 [E(h_i | h_{i-1}) + \mu_j^3 E(h_i^3 | h_{i-1}^3)] + E(h_i^4 | h_{i-1}^4) E(x_i^4) - 4E(h_i | h_{i-1}) \times E(h_i^3 | h_{i-1}^3) E(x_i^3) + 3E(\sigma_i^4 | \sigma_{i-1}^4) \quad (20)$$

其中

$$E(h_i^4 | h_{i-1}^4) = \alpha_{10}^2 + 2\alpha_{10} B_{11} h_{i-1}^2 + \alpha_{11}^2 h_{i-1}^4 E[(x_i - \gamma_j)^4] + \beta_{11}^2 h_{i-1}^4 + 2\beta_{11} A_{11} h_{i-1}^4 + 2\alpha_{10} B_{12} \sigma_{i-1}^2 + 2\beta_{11} B_{12} h_{i-1}^2 \sigma_{i-1}^2 + 2A_{11} B_{12} h_{i-1}^2 \sigma_{i-1}^2 + \beta_{12}^2 \sigma_{i-1}^4 + 2\beta_{12} A_{12} \sigma_{i-1}^4 +$$

$$\alpha_{12}^2 \sigma_{i-1}^4 E[(z_{i-1} - \gamma_D)^4] \quad (21)$$

$$E(\sigma_i^4 | \sigma_{i-1}^4) = \alpha_{20}^2 + 2\alpha_{20} B_{21} h_{i-1}^2 + \alpha_{21}^2 h_{i-1}^4 E[(x_i - \gamma_j)^4] + \beta_{21}^2 h_{i-1}^4 + 2\beta_{21} A_{21} h_{i-1}^4 + 2\alpha_{20} B_{22} \sigma_{i-1}^2 + 2\beta_{21} B_{22} h_{i-1}^2 \sigma_{i-1}^2 + 2A_{21} B_{22} h_{i-1}^2 \sigma_{i-1}^2 + \beta_{22}^2 \sigma_{i-1}^4 + 2\beta_{22} A_{22} \sigma_{i-1}^4 + \alpha_{22}^2 \sigma_{i-1}^4 E[(z_{i-1} - \gamma_D)^4]$$

$$E(x_i^4) = 6\left(\frac{C}{M^4} + \frac{C}{G^4}\right) \quad (23)$$

协方差

$$E[y_i | y_{i-1} - E(y_i | y_{i-1})][y_{i-1} | y_{i-2} - E(y_{i-1} | y_{i-2})] = 0 \quad (24)$$

$$E[y_i^2 | y_{i-1}^2 - E(y_i^2 | y_{i-1}^2)][y_{i-1}^2 | y_{i-2}^2 - E(y_{i-1}^2 | y_{i-2}^2)] = 0 \quad (25)$$

2.1.2 交叉回馈模型的参数估计

下面,简要介绍跳-扩散模型的 GMM 参数估计的思路,设 ϑ 为模型的 K 维参数向量,这里 $K=17$ 且 $\vartheta \in \Theta$,其中 Θ 表示参数向量的可行域.考虑 P 维的矩条件向量 $h(y, \vartheta)$,这里假设 $h(y, \vartheta)$ 在参数向量 ϑ 处连续可微. GMM 算法的一个重要假设是正交条件,即若 ϑ^* 为真实的解,一定满足 $E[h(y, \vartheta^*)] = 0$,这是使 GMM 估计量保持一致性的关键.

设 $g(y_i, \vartheta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(y_i, \vartheta)$ 为 $h(y_i, \vartheta)$ 的样本均值,其中 N 为样本容量.基于 GMM 算法,参数向量的估计值可通过下式得到

$$\hat{\vartheta} = \arg \min_{\vartheta \in \Theta} g(y_i, \vartheta)^T O_T g(y_i, \vartheta) \quad (26)$$

其中 O_T 是 $P \times P$ 的正定权重矩阵,当 $P = \dim(\vartheta)$ 时,可选择任意的权重矩阵,包括单位矩阵.当 $P > \dim(\vartheta)$ 时,参考 Ait-Sahalia 等^[11], Nyawa^[37], Hansen^[38],权重矩阵可设置为矩条件向量的渐进协方差矩阵的逆,即 $O = S^{-1}$,其中 $S = E[h(y_i, \vartheta) h(y_i, \vartheta)^T]$,并采用同时考虑了异方差和序列相关性的 Newey-West^[39] 方法对协方差矩阵进行估计^④.

此时,由目标函数及样本矩条件的渐进协方

④ 详细推导过程备索.

差可知, 参数值 ϑ 的估计依赖权重矩阵 O 的选择, 权重矩阵 O 的选择依赖参数值 ϑ , 这是一个循环问题. 本文按如下步骤进行广义矩估计: 首先将初始权重矩阵设置为单位矩阵, 即 $O_0 = I$; 其次, 求解匹配最优问题: $\hat{\vartheta}_1 = \arg \min g(\vartheta)^T \times O_0 g(\vartheta)$; 然后, 由 $\hat{\vartheta}_1$ 得到调整后的权重矩阵: $O_1 = f(\hat{\vartheta}_1)$; 最后, 使用调整后的权重矩阵进行循环, 直到权重矩阵收敛(目标函数值足够小). 借助以上设定和步骤进行 GMM 估计, 即可得到交叉回馈模型的跳跃和波动的参数估计值与相关统计量, 为分析国际股市的量变质变规律提供基础.

2.2 状态变量的粒子滤波估计

人们无法从市场中直接观测随机跳跃大小与连续扩散数值, 为了能够更直观地分析并展示波动率量变与跳跃质变的交互演变规律, 并量化跳跃和波动率的持续性水平和交叉回馈程度, 需要对潜在的状态变量进行联合估计(包括跳跃和扩散幅度, 以及时变的跳跃到达率和连续波动率), 前文已经给出参数的 GMM 估计方法, 接下来介绍基于动态状态空间结构的粒子滤波技术, 对以上状态变量进行贝叶斯联合估计.

粒子滤波也称序贯蒙特卡罗(SMC), 其核心思想是通过模拟一系列带权重的状态粒子来代表随机变量的概率分布, 这些粒子被投掷到观测系统中进行迭代升级, 再依据贝叶斯法则逐步地结合观测变量逆推这些状态粒子的后验概率. 这里, 用 y_t, ε_t 分别表示 t 时刻的观测变量和状态变量, 其中 $\varepsilon_t = \{h_t, \sigma_t, \alpha_t, z_t\}$, 令 ϑ 为状态空间模型的参数, 这里每个参数向量包含 17 个元素, 再将观测变量的序列记为 $y_{1:T} = \{y_1, \dots, y_T\}$, 状态变量序列 $\varepsilon_{0:T} = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_T\}$. 由于状态是不可直接观测的, 根据贝叶斯法则, t 时刻状态的后验密度有如下正比关系

$$p(\varepsilon_{0:t} | y_{1:t}; \vartheta) \propto p(y_{1:t} | \varepsilon_{0:t}; \vartheta) p(\varepsilon_{0:t}; \vartheta) \quad (27)$$

用 $\omega_{1:t}$ 表示状态变量的权重, 依据马尔科夫性质, 那么后验密度的计算可以通过 t 时刻的边际滤波得到

$$\omega_{1:t} \propto \omega_{1:t-1} \cdot p(y_t | \varepsilon_t; \vartheta) p(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}; \vartheta) \quad (28)$$

依据序贯蒙特卡罗思想, 可以在抽样 N 个状态粒子 $\{\varepsilon_{0:t}^{(i)}\}_{i=1}^N$ 的基础上, 结合 y_t 计算每一组粒子的贝叶斯权重 $\{\omega_{1:t}^{(i)}\}_{i=1}^N$, 表达式为

$$\omega_{1:t}^{(i)} \propto \omega_{1:t-1}^{(i)} p(y_t | \varepsilon_t^{(i)}; \vartheta) p(\varepsilon_t^{(i)} | \varepsilon_{t-1}^{(i)}; \vartheta) \quad (29)$$

其似然函数为

$$p(y_{1:T} | \Theta) = \int p(y_{1:T}, \varepsilon_{0:T} | \vartheta) p(\varepsilon_{0:T} | \vartheta) d\varepsilon_{0:T} \propto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_{1:T}^{(i)} \quad (30)$$

此时, 各期的状态估计值为

$$\hat{f}(\varepsilon_{0:t} | \vartheta) = \sum_{i=1}^N f(\varepsilon_{0:t}^{(i)} | \vartheta) \frac{\omega_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \omega_t^{(j)}} \quad (31)$$

在实际操作过程中, $\varepsilon_t = \{h_t, \sigma_t, \alpha_t, z_t\}$ 可以分解为 $\{h_t, \sigma_t\}, \{\alpha_t, z_t\}$ 两部分, $\{h_t, \sigma_t\}$ 是条件状态, 在 t 时刻和 $\{\alpha_t, z_t\}$ 相互独立, 因此可以把后验概率分解为

$$\omega_{1:t}^{(i)} \propto \omega_{1:t-1}^{(i)} p(y_t | x_t^{(i)}, h_t^{(i)}, \sigma_t^{(i)}; \vartheta) \times p(x_t^{(i)}, h_t^{(i)}, \sigma_t^{(i)} | \varepsilon_{t-1}^{(i)}; \vartheta) \quad (32)$$

此时, z_t 服从正态分布, 这给联合概率的计算带来了极大便利. 在参数 ϑ 给定的情况下, 借助蒙特卡罗模拟和粒子滤波方法即可计算状态的后验概率, 从而联合估计跳跃到达率、跳跃幅度、波动率和扩散水平四个潜在不可观测的状态变量. 如果没有给定参数, 不少文献直接使用粒子滤波方法构建似然函数并进行极大似然估计^[9, 14, 24], 使得参数满足

$$\hat{\vartheta} = \arg \max_{\vartheta \in \Theta} p(y_{1:T} | \vartheta) \quad (33)$$

$$p(y_{1:T} | \vartheta) \propto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_{1:T}^{(i)} \quad (34)$$

这种方法为了搜索得到最大似然值, 会将权重尽可能地放在大概率的随机抽取的样本上, 而忽视处于小概率但具有重要影响的随机跳跃, 这一结果导致高阶矩的相关参数在模型中的作用微乎其微. 为此, 序贯贝叶斯参数学习可以修正这一不足, 该方法通过设定预设分布和先验概率的方法, 对参数和状态变量进行联合后验估计, 其核心思想如下式

$$p(\vartheta | \varepsilon_{0:t} | y_{1:T}) \propto p_\theta(\varepsilon_{0:t} | y_{1:T}, \vartheta) p(y_{1:T} | \vartheta) p(\vartheta) \quad (35)$$

这里会用到两次粒子滤波技术,一次针对状态变量,一次针对参数.当然,参数和状态变量不同,参数会在整个系统中收敛直至保持不变.为了使得参数具有稳定性和收敛性,可以引入参数学习方法进行优化选择,关于参数的最优选择,可以采用如下的 Metropolis-Hastings 算法进行学习

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}^*) = 1 \wedge \frac{p(\boldsymbol{\theta}^*)p(y_{1:T}|\boldsymbol{\theta}^*)q(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\theta}^*)}{p(\boldsymbol{\theta})p(y_{1:T}|\boldsymbol{\theta})q(\boldsymbol{\theta}^*;\boldsymbol{\theta})} \quad (36)$$

这里 $q(\cdot)$ 表示参数抽样更新的预设概率.这种方法直接把状态和参数的不确定性统一考虑进来,从而实现模型的联合估计.在仅给定观测变量的情形下,该方法依据贝叶斯法则估计状态和参数的联合概率,再依据 MCMC 的算法规则进行参数的升级优化^[21,25,26].下文将对以上三种方法进行模拟仿真,借助计算机模拟来比较分析以上方法在估计动态跳扩散双因子交叉回馈模型上的表现.

2.3 交叉回馈模型的模拟仿真

为了证明本文所提出的广义矩估计的粒子滤波方法(GMM-PF)的优越性,本节展示并比较分析以上所述三种估计方法的模拟仿真效果,即粒子滤波的极大似然估计(MLE-PF)、粒子滤波的广义矩估计(GMM-PF)以及序贯贝叶斯学习方法(SBL).这里首先给定模型中的各个初始参数和初始变量,再对随机过程进行路径模拟,其中每条路径包含 100 至 1 000 个不同观测变量,作为每条路径的样本容量,每次随机模拟生成 100 条路径之后,随机抽取其中 50 条序列作为测试对象,这些参数都是从各个股票指数中进行估计得到的,使得模型设定和参数取值都有较好的现实基础.在此基础上,本文绘制了采用三种方法进行模型估计所耗费的时间图以及各种方法参数估计的盒状图^⑤,具体参见图 2 和图 3.

结合图 2 和图 3,可以看出,三类方法在估计精度与估计效率上各有特点,具体分析如下.

1) 序贯贝叶斯学习(SBL):从图 3 参数估计的 box 分布图来看,序贯贝叶斯学习(SBL)方法

拥有最高的估计精度,能同时有效估计跳跃成分和扩散成分的相关参数,但根据图 2 来看,SBL 对样本容量大小较为敏感,样本容量增大到一定规模后,估计效率急速下滑,所耗时间为其他两类方法的 10 倍左右,不适用于大样本、多市场情形下的参数估计.

2) 广义矩估计 + 粒子滤波(GMM-PF):广义矩估计(GMM)的估计精度虽然略逊于 SBL,但显著优于 MLE,仍然具有良好的估计能力,该方法通过高阶矩能较精准地捕捉跳跃成分,且通过图 2 可清晰看出,GMM-PF 方法估计效率较高,每单位样本的耗时不到 SBL 方法的 1/10.

3) 极大似然估计 + 粒子滤波(MLE-PF):MLE-PF 估计效率与 GMM-PF 相近,但估计精度为三类方法中最低,估计的取值较为分散,该方法为实现局部最优,忽略了高阶矩的相应参数,而高阶矩是反映资产价格跳跃过程的关键,因此该方法难以估计重要的跳跃成分.

综合而言,三种方法中,基于粒子滤波的 GMM 估计效率高、精度好,能实现估计精度与效率的联合最优,非常适用于这种多指数、大样本、带跳跃的国际市场研究.

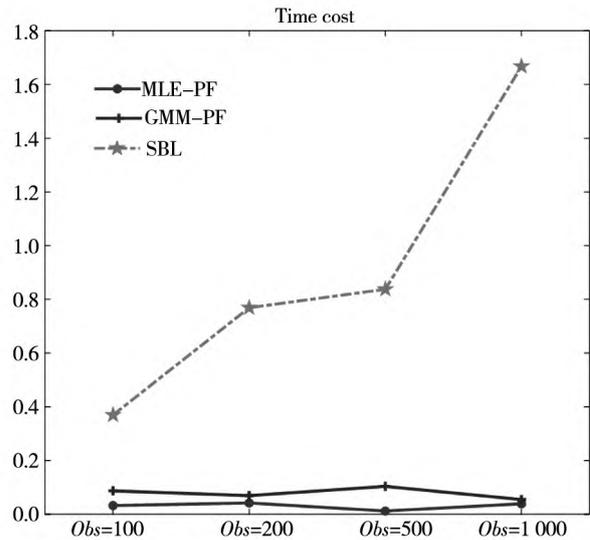


图 2 MLE-PF, GMM-PF, SBL 等方法模型估计的时间损耗图

Fig. 2 Time costs of MLE-PF, GMM-PF, SBL estimation

⑤ 计算机性能: Dell, Latitude 14, Inter 10, 6 核 12 线程,内存 8G.

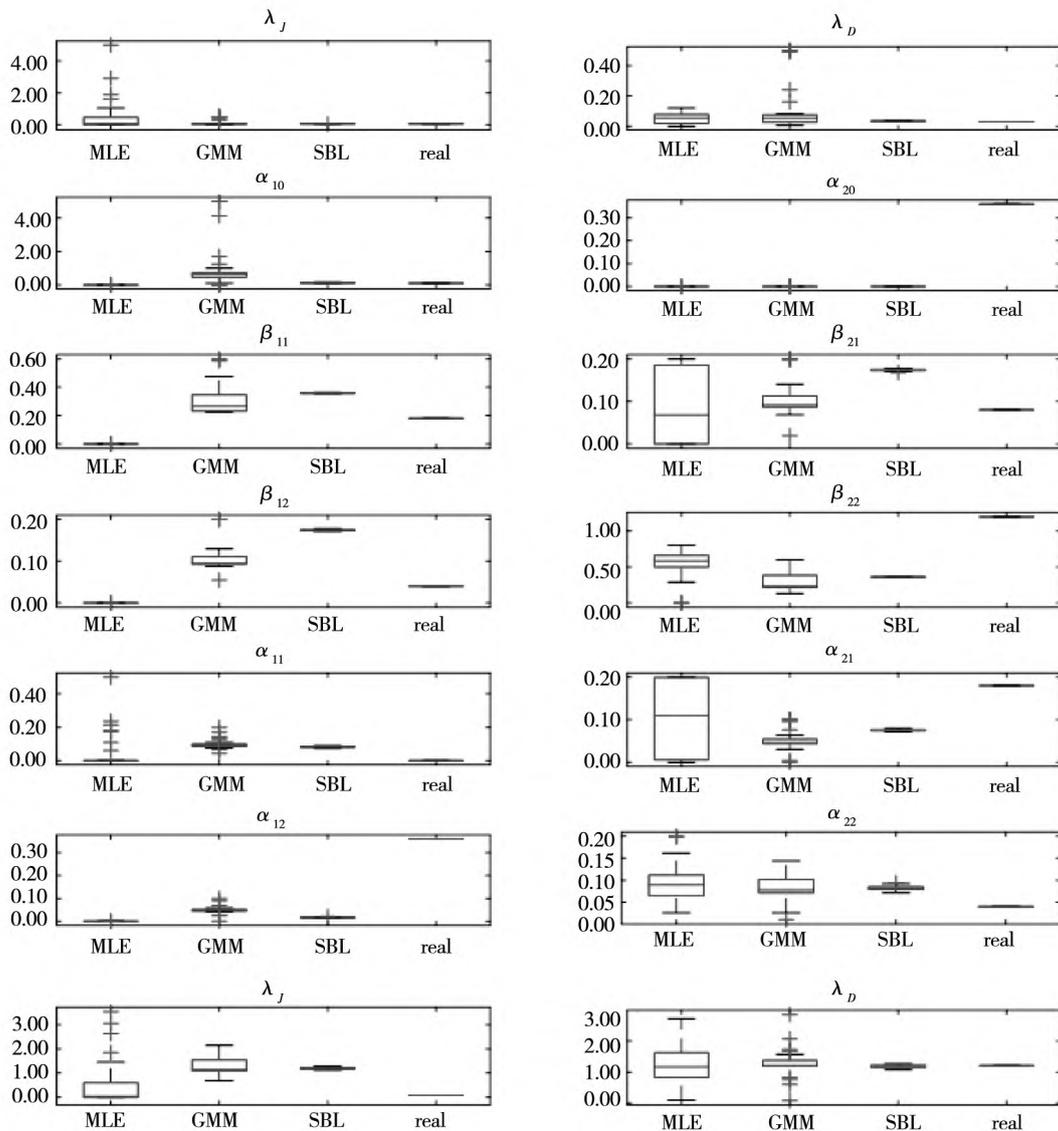


图 3 MLE-PF, GMM-PF, SBL 参数估计的模拟仿真真盒状图

Fig. 3 Simulation studies for MLE-PF, GMM-PF, SBL estimation

3 实证研究

3.1 数据来源

为了在国际股票市场背景下进行实证研究,考察跳跃和扩散之间的互动规律,为量变与质变的关系提供更加全面、系统和广泛的证据,本文选取具有代表性的国际股票市场指数,包括英国富时 100 指数 (FTSE)、美国标普 500 指数 (SPX)、中国香港恒生指数 (HSI)、韩国综合股价指数 (KS11)、新加坡海峡时报指数 (STI)、德国 DAX 指数 (DAX)、日本日经指数 (N225)、巴西圣保罗

指数 (BVSP)、中国大陆沪深 300 指数 (CSI),以及俄罗斯指数 (RTSI)、印度孟买敏感指数 (SENSEX) 来分析各个市场中的跳跃行为特征,讨论连续波动量变与随机跳跃质变之间的相互传导关系、交叉回馈效应和长期影响。样本包含发达国家和发展中国家,也包括成熟的股票市场和新兴经济体的股票市场,具有较好的代表性。股票指数和无风险利率数据来源于 CSMAR 数据库和 Wind 数据库。

广义矩估计方法在大样本情况下参数估计效果较好,因此为保证广义矩估计结果的一致性和有效性,本文选取样本区间为 2007 年 4 月 3 日至

2019 年 12 月 31 日的国际股票市场指数数据,共 2 900 余个日度数据,样本涵盖了整个金融危机、欧债危机、中国股灾、英国脱欧等事件发生到结束的时间.下文通过对国际股票市场指数跳扩散成分进行精准分解,测度各个市场的量变质变关系,分析相应风险的持续性水平及交叉反馈程度,并对各个市场的跳跃风险转移、消化水平进行国际间的横向动态比较,最后探讨这些结论对我国股票市场发展的相关启示.

关于国际市场各个指数的描述性统计结果参见表 1.相关描述变量包括指数对数收益率、基于粒子滤波方法估计的随机跳跃到达率以及连续波动率^⑥.描述性统计量包括均值、标准差、最大值、最小值、偏度和峰度.根据表 1,样本期间大多指数的平均对数收益率都为正数,其中印度孟买敏感指数的平均收益率最高.同时,根据偏度和峰度可看出,大多数指数都具有“左偏、尖峰厚尾”的特征.从随机跳跃到达率和连续波动率来看,除中国大陆、俄罗斯和印度外,其他各市场跳跃成分的峰度显著大于连续波动率的峰度.随机跳跃和连续波动两者呈现不同的分布特征,由此可见,将跳跃与扩散从收益率序列中分离出来进行区别分析

是十分必要的.

3.2 实证分析

根据蒙特卡罗模拟仿真结果,这里选用基于广义矩估计的粒子滤波方法对国际市场相应股票指数的对数收益率进行模型估计^⑦,参数详细结果参见表 2.表中列出了各个指数的参数估计值和相应的 p 值,其中, γ_J 和 γ_D 分别反映跳跃和扩散风险的杠杆效应水平.可以看出,各个市场的交叉回馈系数 $\alpha_{ij}, i, j = 1, 2$. 相互回归系数 $\beta_{ij}, i, j = 1, 2$. 虽然大小各不相同,但总体上都较为显著,意味着国际股票市场不仅普遍存在跳跃与波动的自我集聚,也同样存在跳扩散交叉回馈和相互传导特征,即存在连续波动量变与随机跳跃质变的相互转化规律.基于上述结果,可进一步计算各个市场的跳扩散交叉回馈矩阵 A 和相互持续性影响矩阵 B 的具体数值,从而对各市场跳跃和波动率之间的短期影响和长期相互转化程度进行精准量化分析.如果参数 $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, i, j = 1, 2$. 都是显著而准确的,那么由此计算出来的矩阵 A , 矩阵 B 也具有较好的可靠性,具体结果可参见表 3 和图 4,下面进行分点论述.

表 1 描述性统计分析

Table 1 The descriptive statistics

变量	指数	样本容量	均值	最小值	最大值	标准差	偏度	峰度
y_t	FTSE	3 221	5.51E-05	-0.092 6	0.093 8	0.011 7	-0.139 2	11.080 3
	SPX	3 211	2.55E-04	-0.094 7	0.109 6	0.012 3	-0.367 4	13.861 2
	HSI	3 183	1.11E-04	-0.135 8	0.134 1	0.015 2	0.015 9	12.191 1
	KS11	3 007	1.36E-04	-0.111 7	0.112 8	0.012 6	-0.685 1	13.381 4
	STI	3 024	5.46E-06	-0.106 3	0.088 7	0.011 3	-0.242 8	12.944 4
	DAX	3 242	2.00E-04	-0.074 3	0.108 0	0.013 6	-0.020 1	9.273 2
	N225	3 141	1.05E-04	-0.121 1	0.132 3	0.015 3	-0.526 2	11.360 8
	BVSP	3 162	2.95E-04	-0.121 0	0.136 8	0.016 9	-0.027 9	9.191 6
	CSI	3 105	1.17E-04	-0.091 5	0.089 3	0.017 5	-0.500 9	6.691 9
	RTSI	2 994	-1.23E-04	-0.394 5	0.163 9	0.022 1	-2.185 5	43.419 7
	SENSEX	2 953	4.06E-04	-0.116 0	0.159 9	0.014 1	0.021 8	15.217 4

⑥ 本文在每一个时间点上模拟了 4 000 个等权重的状态粒子,然后将这些粒子投掷在观测系统中循环迭代,再通过序贯贝叶斯法则进行权重更新,得到后验概率之后进一步计算状态变量的估计值.

⑦ 相比而言,半回馈模型(HF)和互回馈模型(IF)是交叉回馈模型(CF)的特殊嵌套形式,限于篇幅原因,正文仅展示交叉回馈模型的结果.其他嵌套模型的检验列于补充附录中,可向作者索要,研究结论保持一致.

续表 1

Table 1 Continues

变量	指数	样本容量	均值	最小值	最大值	标准差	偏度	峰度
h_t	FTSE	3 221	0.010 4	0.008 9	0.029 4	0.001 4	4.168 3	32.499 7
	SPX	3 211	0.012 9	0.010 3	0.045 2	0.003 5	4.427 7	29.444 6
	HSI	3 183	0.015 8	0.014 4	0.042 0	0.001 6	5.468 7	56.779 5
	KS11	3 007	0.011 3	0.010 0	0.027 9	0.001 1	5.525 2	55.526 7
	STI	3 024	0.016 4	0.013 5	0.042 4	0.002 0	4.730 4	40.791 0
	DAX	3 242	0.011 7	0.009 0	0.035 9	0.002 3	3.319 6	20.153 0
	N225	3 141	0.021 4	0.017 3	0.044 1	0.002 0	3.997 3	32.746 9
	BVSP	3 162	0.011 2	0.009 9	0.036 9	0.001 4	6.000 9	66.324 1
	CSI	3 105	0.026 1	0.017 8	0.058 0	0.004 3	2.199 5	9.721 2
	RTSI	2 994	0.023 0	0.020 7	0.079 2	0.002 8	9.012 4	135.514 9
SENSEX	2 953	0.015 2	0.013 4	0.045 7	0.002 2	4.787 7	39.857 4	
σ_t	FTSE	3 221	0.009 6	0.006 6	0.046 9	0.002 9	3.616 3	26.267 2
	SPX	3 211	0.008 4	0.005 2	0.045 5	0.003 7	4.041 2	26.892 2
	HSI	3 183	0.011 3	0.009 9	0.036 3	0.001 6	5.144 5	50.621 0
	KS11	3 007	0.008 9	0.007 4	0.032 2	0.001 6	4.892 2	46.094 9
	STI	3 024	0.012 3	0.007 1	0.059 0	0.004 1	3.717 8	28.218 4
	DAX	3 242	0.010 2	0.005 9	0.046 0	0.003 6	2.940 2	16.854 2
	N225	3 141	0.008 3	0.005 6	0.024 4	0.001 5	3.540 8	29.088 4
	BVSP	3 162	0.008 3	0.006 5	0.044 2	0.002 1	5.367 7	56.354 6
	CSI	3 105	0.008 3	0.004 8	0.022 2	0.001 8	2.259 1	10.555 7
	RTSI	2 994	0.003 1	0.002 1	0.080 3	0.002 2	24.054 9	731.419 7
	SENSEX	2 953	0.003 3	0.002 6	0.024 2	0.000 8	9.046 7	173.649 2

注: 为了具有可比较性,各市场指数选择了相同的时间窗口,从 2007 年 4 月 3 日至 2019 年 12 月 31 日。这里 $\{y_t, h_t, \sigma_t\}$ 分别表示对数收益率、跳跃达到率和连续波动率。

1) 波动率量变引发跳跃的质变(能力)。总体上,根据表 2,参数 $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{22}, \gamma_J, \gamma_D$ 显著不为 0,表明国际股票市场普遍都存在跳跃自激发、波动率集聚现象,同时各市场的跳跃行为与波动率都具有显著的杠杆性,负跳行为将导致较大的波动率变化。此外, β_{12}, β_{21} 分别刻画波动率对跳跃到达率和跳跃到达率对波动率的回归关系。根据表 2,各个市场 β_{12} 与 β_{21} 显著不为 0,表明跳跃到达率与扩散波动率之间不仅存在自身持续性影响,同时存在显著的交互转化关系,一方面当期跳跃行为的发生将提高下期波动率,即质变向量变渗透(β_{21}),另一方面波动率的连续累积变化也将触发随机跳跃,提高下一期跳跃发生的概率,进而推动市场总的跳跃压力上升,即量变引起质变(β_{12}),这一规律在国际市场十分普遍。 α_{12}, α_{21} 分别刻画扩散行为对跳跃到达率和跳跃冲击对扩

散波动率的交叉回馈影响。各个市场的 α_{12} 都显著不为 0,表明连续扩散对跳跃到达率预期可产生短期冲击,波动率的量变可引发跳跃的质变,同时,对大部分发达市场而言,一次跳跃的发生也可转化为持续的波动率来缓解市场后续震荡。

2) 跳扩散的传导程度、交叉回馈大小和持续性水平(相互转化程度)。在上述基础上,本文进一步量化波动与跳跃短期与长期的转化程度。跳扩散之间的交叉回馈程度(短期)主要由矩阵 A 反映(表 3)。大多数市场中,扩散冲击对波动率的回馈程度 A_{22} 高于随机跳跃对跳跃到达率 A_{11} 的影响,说明相较于跳跃行为,这些市场的扩散冲击对市场跌宕的后续影响更大,而中国大陆、印度等股市中,跳跃自激发程度更强。另外,结合图 4,可以看出,扩散冲击对跳跃到达率的回馈程度 A_{12}

普遍高于跳跃冲击对波动率的平均回馈程度 A_{21} , 说明量变引起质变的短期程度比质变转化为量变的程度更高, 当股市发生持续的波动时, 极大可能可引发市场跳跃, 即累积的波动达到一定程度将转化成为一次性的跳跃来化解市场后续波动压力.

表2 交叉回馈模型的参数估计

Table 2 The parameter estimates of CFJDEC model

指数	CFJDEC									
	β_{11}	β_{12}	α_{11}	α_{12}	γ_j	β_{21}	β_{22}	α_{21}	α_{22}	γ_D
FTSE	0.221 9*** (0.000 0)	0.094 3*** (0.000 0)	0.114 6*** (0.000 0)	0.035 9*** (0.000 0)	1.190 2*** (0.000 0)	0.113 0*** (0.000 0)	0.261 4*** (0.000 0)	0.052 9*** (0.000 0)	0.130 3*** (0.000 0)	1.348 8*** (0.000 0)
SPX	0.599 6*** (0.000 0)	0.197 6*** (0.000 0)	0.067 5*** (0.000 0)	0.046 2*** (0.000 0)	1.065 8*** (0.000 0)	0.119 8*** (0.000 0)	0.419 8*** (0.000 0)	0.005 0*** (0.000 0)	0.106 2*** (0.000 0)	1.442 7*** (0.000 0)
HSI	0.335 1*** (0.000 0)	0.098 1*** (0.000 0)	0.088 1*** (0.000 0)	0.045 6*** (0.000 0)	1.317 8*** (0.000 0)	0.098 2*** (0.000 0)	0.328 8*** (0.000 0)	0.034 0*** (0.002 7)	0.043 8*** (0.000 0)	1.207 2*** (0.000 0)
KS11	0.254 4*** (0.000 0)	0.092 3*** (0.000 0)	0.092 1*** (0.000 0)	0.045 3*** (0.000 0)	1.211 5*** (0.000 0)	0.084 6*** (0.000 0)	0.237 8*** (0.000 0)	0.044 9*** (0.000 2)	0.084 2*** (0.000 0)	1.232 7*** (0.000 0)
STI	0.249 5*** (0.000 0)	0.090 8*** (0.000 0)	0.090 0*** (0.000 0)	0.044 0*** (0.000 0)	1.199 4*** (0.000 0)	0.081 8*** (0.000 0)	0.228 6*** (0.000 0)	0.041 7*** (0.000 1)	0.079 7*** (0.000 0)	1.220 9*** (0.000 0)
DAX	0.285 3*** (0.000 0)	0.107 4*** (0.000 0)	0.096 4*** (0.000 0)	0.049 6*** (0.000 0)	1.292 5*** (0.000 0)	0.096 5*** (0.000 0)	0.326 8*** (0.000 0)	0.049 8*** (0.000 0)	0.114 6*** (0.000 0)	1.467 2*** (0.000 0)
N225	0.357 8*** (0.000 0)	0.083 9*** (0.000 0)	0.089 9*** (0.000 0)	0.043 3*** (0.000 0)	1.508 0*** (0.000 0)	0.035 0*** (0.000 0)	0.122 1*** (0.000 0)	0.014 3* (0.066 3)	0.033 4*** (0.000 0)	2.657 8*** (0.000 0)
BVSP	0.253 8*** (0.000 0)	0.084 5*** (0.000 0)	0.085 5*** (0.000 0)	0.040 9*** (0.000 0)	1.365 3*** (0.000 0)	0.102 9*** (0.000 0)	0.337 5*** (0.000 0)	0.048 3*** (0.000 0)	0.119 8*** (0.000 0)	1.380 9*** (0.000 0)
CSI	0.579 6*** (0.000 0)	0.027 1*** (0.000 0)	0.156 2*** (0.000 0)	0.025 1*** (0.000 0)	1.170 7*** (0.000 0)	0.041 4*** (0.000 0)	0.056 0*** (0.000 0)	0.025 8*** (0.000 0)	0.024 8*** (0.000 0)	1.205 4*** (0.000 0)
RTSI	0.493 6*** (0.000 0)	0.105 6*** (0.000 0)	0.045 4*** (0.000 0)	0.053 8*** (0.000 0)	1.237 2*** (0.000 0)	0.003 8*** (0.000 0)	0.216 3*** (0.000 0)	0.002 2 (0.712 5)	0.078 5*** (0.000 0)	1.060 3*** (0.000 0)
SENSEX	0.303 1*** (0.000 0)	0.103 2*** (0.000 0)	0.119 7*** (0.000 0)	0.052 6*** (0.000 0)	0.760 9*** (0.000 0)	0.011 9* (0.066 7)	0.186 6*** (0.000 0)	0.005 7 (0.680 1)	0.044 1*** (0.000 0)	2.007 0*** (0.000 0)

注: 本表参数由 GMM-PF 方法估计而来, 括号内代表 p 值, “***”表示参数在 1% 水平下显著, 因为排版布局需要, 这里仅列出 11 个指数相应模型的重要参数.

表3 跳扩散交叉回馈和持续性影响水平

Table 3 The cross-feedback effects and persistence of jumps and diffusion

矩阵	CFJDEC									
	B_{11}	B_{12}	B_{21}	B_{22}	B_{all}	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	
FTSE	0.423 0	0.195 5	0.205 8	0.628 8	0.826 0	0.201 1	0.101 2	0.092 9	0.367 4	
SPX	0.700 3	0.340 0	0.127 3	0.747 1	0.967 5	0.100 6	0.142 3	0.007 4	0.327 3	
HSI	0.561 4	0.210 0	0.185 6	0.436 5	0.791 9	0.226 4	0.112 0	0.087 5	0.107 7	
KS11	0.417 7	0.206 5	0.164 1	0.449 9	0.713 6	0.163 3	0.114 2	0.079 6	0.212 1	
STI	0.406 0	0.200 5	0.154 2	0.427 1	0.690 6	0.156 5	0.109 7	0.072 4	0.198 6	
DAX	0.485 5	0.263 9	0.200 0	0.688 2	0.892 4	0.200 3	0.156 5	0.103 5	0.361 4	
N225	0.649 9	0.432 8	0.081 6	0.391 7	0.822 3	0.292 1	0.348 9	0.046 5	0.269 6	
BVSP	0.447 4	0.203 3	0.212 4	0.685 6	0.869 5	0.193 6	0.118 9	0.109 5	0.348 1	
CSI	0.870 2	0.088 7	0.089 5	0.116 7	0.893 3	0.290 6	0.061 6	0.048 1	0.060 8	
RTSI	0.565 0	0.219 8	0.007 3	0.383 1	0.733 3	0.071 4	0.114 2	0.003 5	0.166 8	
SENSEX	0.567 4	0.367 6	0.024 4	0.408 3	0.753 0	0.264 3	0.264 5	0.012 6	0.221 7	

注: 矩阵 A , 矩阵 B 由表 2 中的参数计算得来, 模型参数皆满足约束条件.

矩阵 B 测度了跳扩散长期相互影响的持续性水平,表3中的 B_{11} 、 B_{22} 数值较大,说明股票市场的跳跃自激发与扩散集聚具有较高的持续性。而跳扩散间的交互持续性影响差别体现在 B_{12} 、 B_{21} 上,根据图4,可以看出,俄罗斯和印度市场上的 B_{21} 显著低于其他九个市场,其中英国、美国、中国香港市场、新加坡、韩国等市场的 B_{21} 较高,均超过0.1。这说明大部分发达市场的跳跃质变对波动率量变的长期影响更为显著,转化能力更强。相比而言,大陆、日本、俄罗斯和印度市场在消化突变性的市场震荡方面能力较弱。对大陆、俄罗斯和印度等新兴市场而言,一方面,这可能是由于股市中散户投资者占比较高,专业机构和外资占比偏低^[40],股票价格受到投资者情绪的影响较大,而跳跃风险又往往与投资者情绪相关联^[41],跳跃频发,风险持续性较强,转移难度较大,最终使得市场总波动维持在较高水平。另一方面可能

是这些市场的监管机制和交易规则也与成熟经济体存在一定差距^[42],导致大幅震荡的风险消化能力较弱。此外,金融市场的完善程度与对经济政策不确定性的高敏感度^[43]也是影响新兴市场能否有效缓解突发性冲击的重要因素。新兴金融市场一般规模较小、金融市场结构较为单一,在防御和缓解突发性冲击等方面能力十分有限,且一旦经济政策存在较大不确定性,风险集聚程度将迅速升高,引发股市异常剧烈的波动,进一步增大风险化解压力。上述分析表明跳跃转化成波动的程度在国际市场中存在差异,与之不一致的是,不管是成熟经济体,还是新兴市场, B_{12} 数值普遍较高,且显著大于 B_{21} ,这表明了波动率量变引起跳跃质变的规律在国际市场上广泛存在,且持续性更强,而质变向量变渗透的这一特征并没有在所有市场中体现出来。最后,各个市场的总体风险都维持在较高水平。

表4 跳跃扩散占比与跳跃成分估计

Table 4 The percentages of jumps and diffusion in variance and parameter estimates of jump components

指数	CFJDEC							
	V_J	V_D	$V_J\%$	C	M	G	μ_J	σ_J
FTSE	2.90E-05	1.10E-04	20.16%	0.949 2*** (0.000 0)	3.032 5*** (0.000 0)	2.672 7*** (0.000 0)	-0.042 1	0.236 1
SPX	5.20E-05	1.10E-04	32.30%	0.880 3*** (0.000 0)	2.956 0*** (0.000 0)	2.511 2*** (0.000 0)	-0.052 8	0.240 3
HSI	7.40E-05	1.50E-04	33.11%	0.532 4*** (0.000 0)	3.765 6*** (0.000 0)	1.548 8*** (0.000 0)	-0.202 4	0.259 5
KS11	3.00E-05	7.20E-05	29.25%	0.932 7*** (0.000 0)	2.986 0*** (0.000 0)	2.719 6*** (0.000 0)	-0.030 6	0.230 7
STI	3.00E-05	8.60E-05	26.13%	0.925 6*** (0.000 0)	2.992 4*** (0.000 0)	2.728 4*** (0.000 0)	-0.029 9	0.227 7
DAX	4.90E-05	1.40E-04	25.84%	1.206 3*** (0.000 0)	2.986 7*** (0.000 0)	2.711 9*** (0.000 0)	-0.040 9	0.299 3
N225	1.50E-04	9.40E-05	60.80%	0.434 0*** (0.000 0)	4.351 3*** (0.000 0)	1.353 8*** (0.000 0)	-0.220 8	0.259 7
BVSP	8.40E-05	2.10E-04	29.03%	1.149 5*** (0.000 0)	3.029 2*** (0.000 0)	2.717 7*** (0.000 0)	-0.043 5	0.280 9
CSI	1.70E-04	9.50E-05	63.66%	0.457 4*** (0.000 0)	3.324 0*** (0.000 0)	1.760 3*** (0.000 0)	-0.122 2	0.189 0
RTSI	6.60E-04	8.20E-06	98.78%	1.989 6*** (0.000 0)	1.352 4*** (0.000 0)	2.791 5*** (0.000 0)	0.758 4	1.343 1
SENSEX	1.90E-04	1.70E-05	91.71%	1.919 8*** (0.000 0)	3.812 8*** (0.000 0)	1.934 4*** (0.000 0)	-0.488 9	0.645 1

注: 这里除 V_D 为扩散方差外,其他指标和参数均为跳跃成分的估计量,其中 $V_J\%$ 表示跳跃方差占总方差的比重。

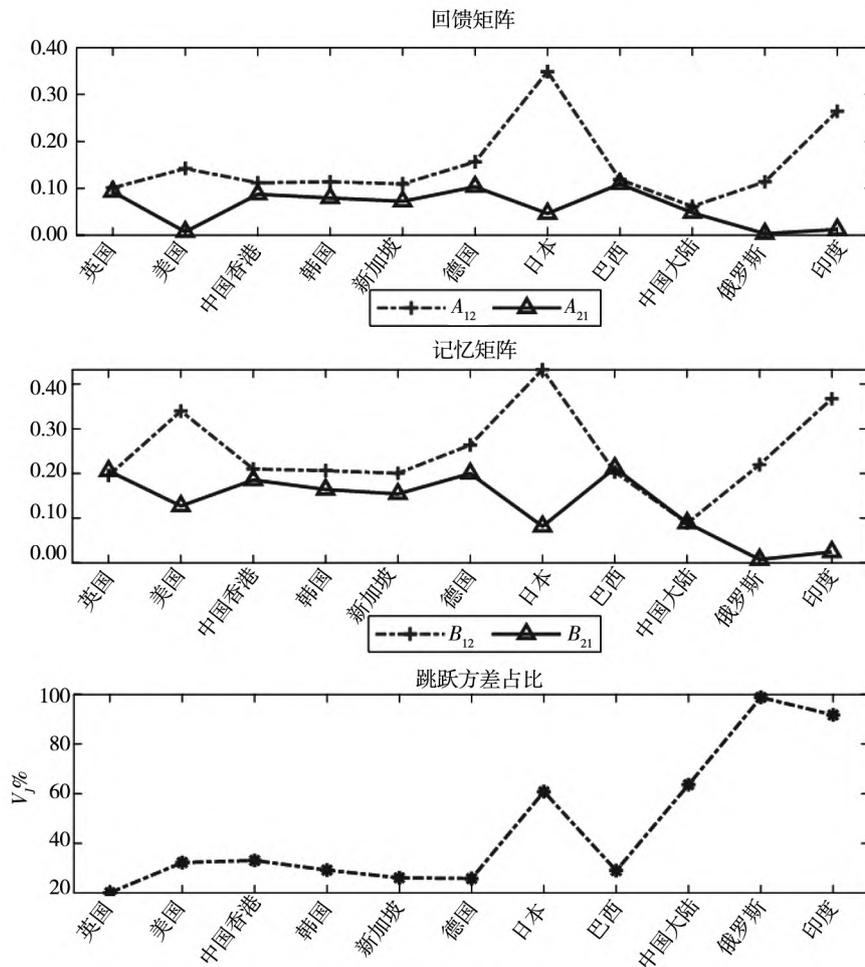


图4 回馈矩阵、记忆矩阵与跳跃方差占比

Fig. 4 Feedback matrices, persistence matrices and proportion of jumps in total variance of different markets

3) 跳扩散的方差相对占比. 根据表 4, 大多数指数的跳跃均值(μ_j)都明显小于 0, 说明负跳在已发生的跳跃行为中占据主导地位, 也表明股市中资产价格的下跌冲击更频繁. 与此同时, 从图 4 中可以清晰看到, 俄罗斯股市的跳跃在总方差中占比($V_j\%$)远高于其他几个市场, 接近 100% (渐进纯跳跃过程). 印度市场超过 90%, 中国大陆股市跳跃的标准差(σ_j)最低(0.19 左右), 但是跳跃占总方差的比例已超过总方差的 60%, 排列第三. 这说明我国股市虽然存在涨跌幅限制, 但其震荡程度远远大于其他股市, 尤其是欧美等发达国家股市. 此外, 各国股市起伏跌宕, 跳跃行为在市场中变得越来越常见, 跳跃风险对市场的影响将越来越显著. 不论是投机、套利还是风险管理, 都应当重视这一趋势.

3.3 事件分析

为了进一步研究各个市场的跳扩散动态演化和量变质变规律, 在上述基础上, 本文借助粒子滤波方法对交叉回馈模型的潜在状态变量进行联合估计, 包括跳跃幅度、跳跃到达率和连续波动率^⑧. 各个市场跳跃成分的状态变量的时间序列估计值具体可参见图 5, 该图可以清晰地展示不同市场跳跃行为的差异. 从图 5 可以看出, 在样本观测期内, 国际市场上明显存在若干次跳跃集聚阶段. 虽各个市场的跳跃集聚程度有所不同, 但集聚的时期具有较高的重合度, 主要集中在 2008 年次贷危机, 2010 年欧债危机, 2015 年中国股灾, 2016 年的英国脱欧以及 2018 年开始的中美贸易战等. 为了便于比较各个市场的跳跃水平, 将各个

⑧ 关于部分状态变量的描述性统计分析可参考表 1.

图的纵坐标刻度进行了统一,由图可以看出,中国大陆、日本、巴西、俄罗斯和印度等市场指数跳跃幅度的极差相对较大,而欧美发达市场的跳跃幅度较为平缓。

此外,为了更直观地展示波动率的量变引发跳跃质变的现象,挑选了部分具有特色的市场指数,绘制了特定窗口跳扩散的动态变化时间序列图(图 6)。该图反映了市场跳跃随波动率的连续变动而发生的不同程度的动态变化过程,其中右纵坐标为跳跃幅度的绝对值,基于图 6,市场的跳扩散时间序列是一个动态变化过程,跳跃和扩散交互协同演进,连续扩散的累积会提高下一期的跳跃到达率,提高突发性冲击发生的概率。

为了探究上述现象与成因(图 5 和图 6),本文针对以上时间序列,选取三个代表性的窗口进

行事件分析。

1) 金融危机. 受 2007 年次贷危机的影响,美国金融风险蔓延至全球,导致股票市场跳跃频发,初始的跳跃冲击释放较强的自激发性,持续向市场后续输出震荡,形成跳跃群聚。从图 5 可明显看出在这段时间内,中国大陆、中国香港、英国、日本、德国、韩国、俄罗斯、印度和巴西市场跳跃都出现明显的集聚特征。异常集聚的跳跃不仅改变下一期的连续波动,波动率的累积也会进一步提高未来的跳跃到达率,即量变引起了质变,这一特征在美国市场较为突出。同时结合图 6,可以看出,2008 年下半年,随着金融危机的进一步加剧,美国市场波动率显著上升,当 7 000 亿救市计划消息冲击股票市场时,连续波动迅速向跳跃转移,最终导致跳跃风险维持在较高水平。

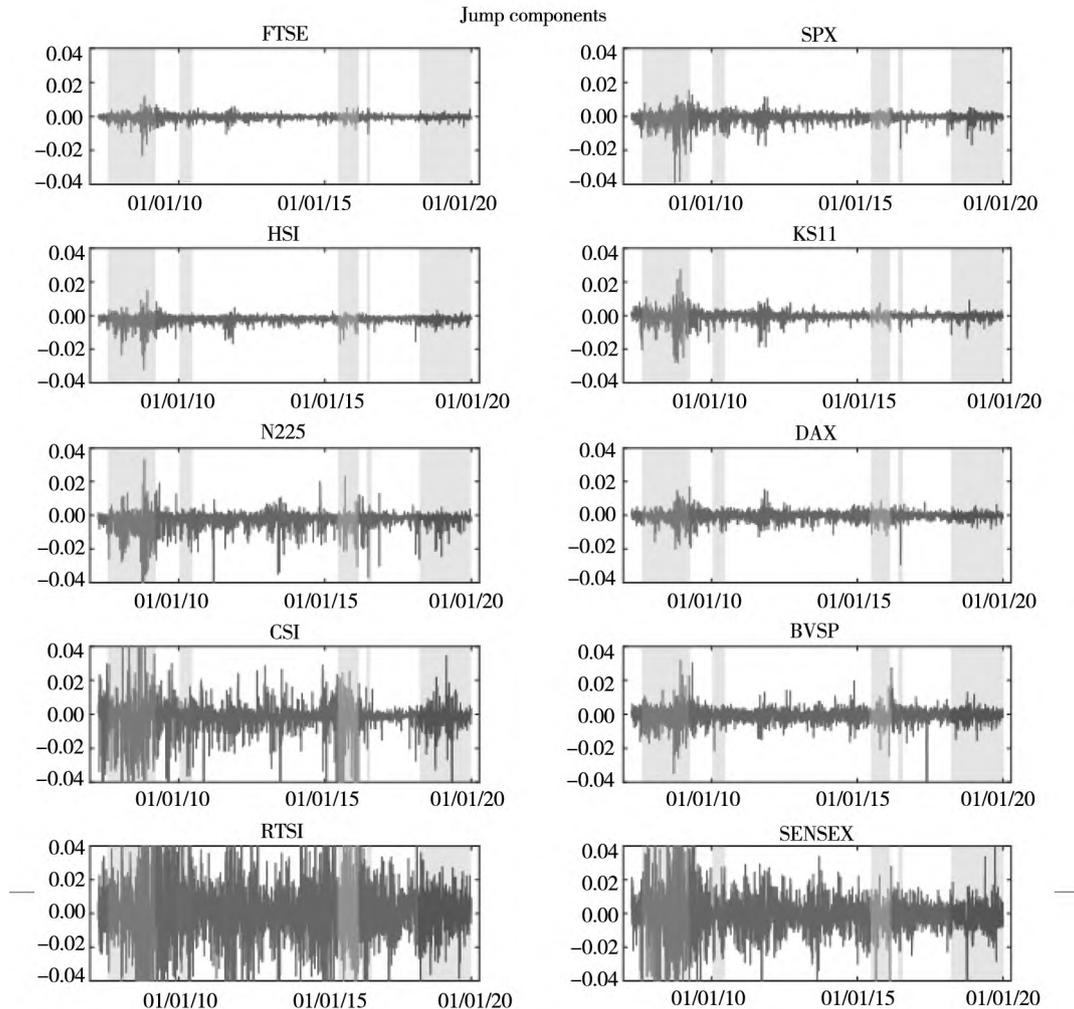


图 5 国际股票市场指数随机跳跃成分动态图

Fig. 5 Jump components of international equity market indexes

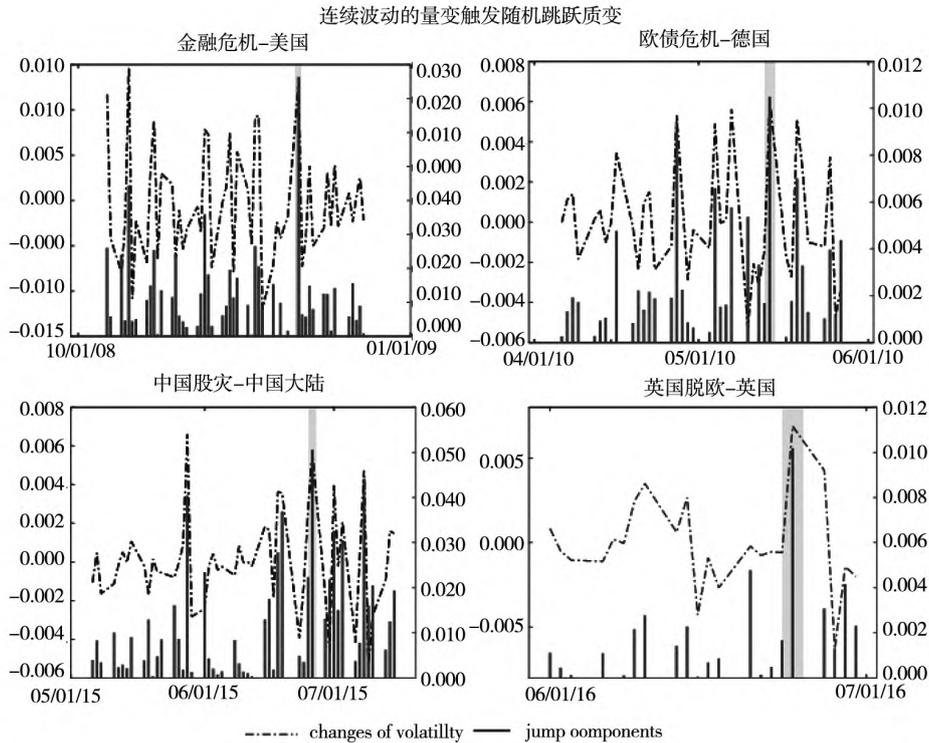


图6 跳扩散的动态变化时间序列图

Fig. 6 The time series of the changes for jump diffusion dynamics

2) 中国股灾. 2015年6月—2015年7月, 杠杆资金的急速撤离引发了中国A股市场的急速下跌, 随后一系列政策的接连出台也使得A股市场接连发生几次大规模跌停事件, 一方面查处场外违规配资导致违规杠杆资金急速撤离这一事件造成市场大幅震荡; 另一方面初始的跳跃类似“地震”的发生, 给市场后续走势带来持续性影响, 导致“余震”不断, 最终出现“千股跌停, 千股停牌”的现象. 结合图5和图6, 可以清晰地看到, 这段时间内, 波动迅速转化成跳跃, 沪深300指数频繁下跳, 跳跃集聚程度异常高, 且持续时间长, 这充分说明了大陆市场对于跳跃风险的消化能力较弱, 无法将随机跳跃转化为连续扩散来消化大幅震荡.

3) 英国脱欧. 2016年6月, 英国全民公投决定“脱欧”, 非预期信息给全球股市带来较为剧烈的突发性冲击, 基于图6可以看出, 事件发生时, 英国市场波动率快速提高, 同时波动冲击的连续累积迅速引发跳跃的攀升, 在事件影响减弱时, 连续波动的回落也进一步降低跳跃到达率, 再一次

验证了“波动率的连续累积可触发跳跃”这一结论.

综上所述, 各个股市的跳跃冲击不仅会影响市场后续波动, 多个市场, 多个事件的典型事实表明, 波动率累积到一定程度也会触发跳跃, 提升市场的跳跃到达率, 这一特征在危机时期更加显著. 此外, 整个样本期间内, 中国大陆发生市场震荡的现象相对于其他发达市场更加频繁, 跳跃群聚程度远高于波动率集聚水平, 而跳跃风险的消化和转移能力较弱, 导致市场突发性风险集聚程度维持在高水平, 对此, 应给予高度关注.

3.4 稳健性分析

在前文中已经对跳扩散双因子交叉回馈模型及其如何捕获“量变与质变转化关系”进行了详细介绍与深入实证分析, 得到“波动率的累积变化会引发跳跃的质变”这一结论, 为进一步考察本文结论在样本大小与估计方法等方面的稳健性, 本文主要从以下三个方面进行稳健性检验与分析^⑨.

1) 子样本检验: 为了考察研究结论在不同的

⑨ 由于篇幅限制, 具体实证结果备索.

窗口期内是否稳健,本文对各区间的子样本进行实证检验。由于GMM和MLE方法对样本容量有要求,加上模型参数较多,这里以2年为一个样本区间进行滚动估计,样本容量为500余个,共计6个窗口。基于GMM方法得到的所有子样本的实证研究显示,国际股票市场指数的主要结果和大样本分析结论是基本一致的,特别是关于参数 β_{12} 、 α_{12} 、 B_{12} 、 A_{12} 等的估计,表明波动率的累积变化极有可能触发跳跃,再次论证了“量变引起质变”这一规律,结论具有稳健性。

2) 矩条件检验:本文同时对不同数量矩条件下的参数估计结果进行了检验,考察参数估计关于矩条件个数的稳健性,研究发现增加更多的矩条件会延长估计时间,但不改变整体估计结果,且研究结论保持不变。

3) 其他估计方法:本文进一步采用了序贯贝叶斯参数学习方法对国际股票市场上上述指数的部分样本进行估计和检验。鉴于序贯贝叶斯学习方法的效率会伴随样本数量提升而下降,本文以500个观测变量和1000个观测变量为一个周期,进行循环学习。相较而言,序贯贝叶斯学习得到的参数和状态变量误差更小,但是研究结论基本不变。

综上,本文的研究结论在不同模型、不同数量矩条件和不同参数估计方法下均保持一致,具有较强的可靠性。

4 结束语

目前股票市场价格随机过程的研究大多数集中在随机波动率和动态跳跃强度的层面,学界对跳跃和波动存在集聚现象以及非对称杠杆效应已经达成共识。近年来部分研究表明,跳跃不仅会对股票价格造成冲击和在短时间内引发更多的跳跃,也会提升下一期的波动水平,即质变引起量变。然而,跳跃活动率及连续波动率之间是否普遍存在双向交叉回馈影响,特别是波动率的累积变化是否会触发市场的突然震荡、提高未来的跳跃到达率,即量变是否引起质变,仍然存在争议。为了精确捕捉、量化和分析股票市场中跳跃和波动之间的交叉影响和动态演化特征,本文采用动态跳扩散双因子交叉回馈模型,借助特征函数推导高阶矩条件,并结合广义矩估计和粒子滤波方法,

研究了各个市场内部跳扩散间短期交互影响和长期协同关系。结合广义矩估计、粒子滤波和序贯贝叶斯学习方法参数估计的模拟仿真,以及各个市场指数跳扩散长短期影响的实证研究,主要得到以下结论。

1) 模型层面。双因子交叉模型同时考虑了跳跃和波动间的相互作用,既能够研究跳跃对波动的冲击,也能反过来考察波动集聚对跳跃的影响和反馈,能更深入地描绘跳跃冲击在市场内部的动态演变和转化机制;研究发现,国际市场上大部分指数存在较为显著的跳扩散交叉回馈效应,说明跳跃和波动之间普遍存在相互影响和协同演变,跳跃不仅仅对连续波动造成冲击,同样,量变也会引起质变,波动率累积到一定程度也将触发随机跳跃,从而提升市场跳跃发生的概率。

2) 估计方法层面。本文针对跳扩散交叉回馈模型提出的广义矩估计的粒子滤波方法精度好、效率高,能够联合估计跳跃到达率和连续波动率这些多维状态变量。该方法相比粒子滤波的极大似然估计更加准确,相比序贯贝叶斯的参数学习方法更加高效便捷,这为研究多指数、大样本的国际股票市场提供了较大的便利。针对跳扩散模型,广义矩估计能较好地捕获跳跃和高阶矩的相关参数,能准确识别随机跳跃形态。在此基础上结合粒子滤波方法,能直观地、动态地考察不同市场的跳跃集聚水平和交叉回馈程度。

3) 实证结果层面。通过对国际股票市场指数的跳跃和扩散成分进行分解,量化分析各市场跳扩散风险的持续性水平和交叉回馈程度,并对跳跃风险转移、消化水平进行国际间的横向动态比较,研究表明,各个市场的跳跃到达率水平、跳跃变差在总方差中的占比,以及交叉回馈程度是动态变化的,不是一成不变的。其中,中国大陆、俄罗斯和印度等新兴股市的跳跃方差占比较高,跳跃的持续性程度相对高于其他发达市场,跳跃风险转化为扩散波动率的能力相对较弱,这可能与新兴市场中散户投资者占比较高、监管机制与金融市场不完备,以及对经济政策不确定性的高度敏感有关,这些结论对我国进一步研究、探索和完善股票市场机制体制具有重要的参考价值。

综上所述,股票市场中随机跳跃和波动都存在自身和相互的持续性影响,同时跳扩散之间并

不是独立无关的,而是在高阶矩层面动态地相互影响、协同演化,跳跃的发生会提高未来的波动率水平,同样,波动率的累积也会触发跳跃,跳跃与波动在不同市场的相互转化程度存在较大差异。基于上述结论,并结合我国股市的现实特征,本文提出以下几点建议。

对监管者而言:需警惕“温水煮青蛙”:由于波动的连续累积将引起跳跃的质变,监管当局在将跳跃风险纳入监测预警系统的同时,应实时监测看起来持续而缓慢变化的波动风险,尤其应警惕它的急剧变化。此外,当市场波动长时间维持在高水平的状态时,应注意及时疏导,预防其转化成突发性的市场震荡来分散后续的波动压力,避免给金融市场带来较大的不确定性。

对投资者而言:在投资决策上,投资者不仅要

充分考虑到连续性扩散带来的波动风险,而且也应注意随机跳跃带来的突发性扰动,更为重要的是,当持有波动变化较为剧烈的股票时,应采取合适的投资策略,谨防量变引起质变,减少波动转成巨幅市场震荡而导致的巨额损失。

对我国金融市场而言:针对我国市场跳跃集聚程度较高、且对跳跃风险的消化能力较弱这一特点,建议进一步丰富金融衍生工具,壮大机构投资者力量,发展与本国资本市场发展情况相匹配的投资者结构,并通过引导或制度设计等措施减弱投资者情绪对股价的影响,进而降低跳跃风险的持续性。另一方面,建议完善资本市场的监管制度与交易规则,进一步调整市场结构,努力打造全方位、立体化的资本市场开放格局,增强市场的风险转移与消化能力。

参 考 文 献:

- [1] Eraker B, Johannes M, Polson N. The impact of jumps in equity index volatility and returns [J]. *Journal of Finance*, 2003, 58(3): 1269 - 1300.
- [2] Eraker B. Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices [J]. *Journal of Finance*, 2004, 59(3): 1367 - 1404.
- [3] Lee S, Mykland P. Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics [J]. *Review of Financial Studies*, 2008, 21(6): 2535 - 2563.
- [4] Todorov V, Tauchen G. Volatility jumps [J]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2011, 29(3): 356 - 371.
- [5] 万 谔, 杨晓光. 价格跳跃前大中小单的行为特征和信息含量 [J]. *管理科学学报*, 2019, 22(10): 37 - 54.
Wan Die, Yang Xiaoguang. Behavioral characteristics and informativeness of large, medium and small orders before price jumps [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(10): 37 - 54. (in Chinese)
- [6] Bollerslev T, Todorov V. Tails, fears, and risk premia [J]. *Journal of Finance*, 2011, 66(6): 2165 - 2211.
- [7] 陈海强, 张传海. 股指期货交易会降低股市跳跃风险吗? [J]. *经济研究*, 2015, 50(1): 153 - 167.
Chen Haiqiang, Zhang Chuanhai. Does index futures trading reduce stock market jump risk? Evidence from the Chinese stock market [J]. *Economic Research Journal*, 2015, 50(1): 153 - 167. (in Chinese)
- [8] Ait-Sahalia Y, Karaman M, Mancini L. The term structure of equity and variance risk premia [J]. *Journal of Econometrics*, 2020, 219(2): 204 - 230.
- [9] Christoffersen P, Jacobs K, Ornathanalai C. Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S&P 500 returns and options [J]. *Journal of Financial Economics*, 2012, 106(3): 447 - 472.
- [10] 唐 勇, 张伯新. 基于高频数据的中国股市跳跃特征实证分析 [J]. *中国管理科学*, 2013, 21(5): 29 - 39.
Tang Yong, Zhang Boxin. The empirical analysis of jump characteristics of China's stock market based on high frequency data [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2013, 21(5): 29 - 39. (in Chinese)
- [11] Ait-Sahalia Y, Cacho-Diaz J, Laeven R J A. Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes [J]. *Journal of Financial Economics*, 2015, 117(3): 585 - 606.
- [12] Boswijk H P, Laeven R J A, Yang X. Testing for self-excitation in jumps [J]. *Journal of Econometrics*, 2018, 203(2):

- 256 – 266.
- [13] Christie A A. The stochastic behavior of common stock variances: Value , leverage and interest rate effects [J]. *Journal of Financial Economics* , 1982 , 10(4) : 407 – 432.
- [14] Christoffersen P , Jacobs K , Mimouni K. Volatility dynamics for the S & P500: Evidence from realized volatility , daily returns , and option prices [J]. *Review of Financial Studies* , 2010 , 23(8) : 3141 – 3189.
- [15] 陈浪南, 杨科. 中国股市高频波动率的特征、预测模型以及预测精度比较 [J]. *系统工程理论与实践* , 2013 , 33(2) : 296 – 307.
Chen Langnan , Yang Ke. High-frequency volatility features , forecast model and performance valuation [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice* , 2013 , 33(2) : 296 – 307. (in Chinese)
- [16] Leippold M , Wu L. Asset pricing under the quadratic class [J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* , 2002 , 37(2) : 271 – 295.
- [17] 陈千里, 周少甫. 上证指数收益的波动性研究 [J]. *数量经济技术经济研究* , 2002 , (6) : 122 – 125.
Chen Qianli , Zhou Shaofu. Research on the volatility of return of Shanghai composite index [J]. *The Journal of Quantitative & Technical Economics* , 2002 , (6) : 122 – 125. (in Chinese)
- [18] 张维, 张海峰, 张永杰, 等. 基于前景理论的波动不对称性 [J]. *系统工程理论与实践* , 2012 , 32(3) : 458 – 465.
Zhang Wei , Zhang Haifeng , Zhang Yongjie , et al. Volatility asymmetry based on prospect theory [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice* , 2012 , 32(3) : 458 – 465. (in Chinese)
- [19] 吴鑫育, 杨文昱, 马超群, 等. 基于非仿射随机波动率模型的期权定价研究 [J]. *中国管理科学* , 2013 , 21(1) : 1 – 7.
Wu Xinyu , Yang Wenyu , Ma Chaoqun , et al. Option pricing under non-affine stochastic volatility model [J]. *Chinese Journal of Management Science* , 2013 , 21(1) : 1 – 7. (in Chinese)
- [20] 陈浪南, 孙坚强. 股票市场资产收益的跳跃行为研究 [J]. *经济研究* , 2010 , (4) : 54 – 66.
Chen Langnan , Sun Jianqiang. Jump dynamics in stock returns [J]. *Economic Research Journal* , 2010 , (4) : 54 – 66. (in Chinese)
- [21] Fulop A , Li J , Yu J. Self-exciting jumps , learning , and asset pricing implications [J]. *Review of Financial Studies* , 2015 , 28(3) : 876 – 912.
- [22] 陈国进, 王占海. 我国股票市场连续性波动与跳跃性实证研究 [J]. *系统工程理论与实践* , 2010 , 30(9) : 1554 – 1562.
Chen Guojin , Wang Zhanhai. Continuous volatility and jump volatility in China's stock market [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice* , 2010 , 30(9) : 1554 – 1562. (in Chinese)
- [23] 马勇, 张卫国, 闫杜娟. 中国股市暴涨暴跌的交互作用及其预测 [J]. *系统管理学报* , 2014 , (5) : 755 – 760.
Ma Yong , Zhang Weiguo , Yan Dujuan. The interaction between large rises and large declines in China's stock market and its prediction [J]. *Systems Engineering: Theory Methodology Application* , 2014 , (5) : 755 – 760. (in Chinese)
- [24] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明. 带杠杆效应的无穷纯跳跃 Lévy 过程期权定价 [J]. *管理科学学报* , 2014 , 17(8) : 74 – 94.
Wu Hengyu , Zhu Fumin , Wen Jinming. Option pricing based on conditional infinite pure jump Lévy processes with leverage effect [J]. *Journal of Management Sciences in China* , 2014 , 17(8) : 74 – 94. (in Chinese)
- [25] 朱福敏, 郑尊信, 吴恒煜. 基于无穷跳 - 扩散双因子交叉回馈模型的期权定价 [J]. *系统工程学报* , 2017 , 32(5) : 638 – 647.
Zhu Fumin , Zheng Zunxin , Wu Hengyu. Option valuation for the double-factor-cross-feedback infinite activity jump-diffusion model [J]. *Journal of Systems Engineering* , 2017 , 32(5) : 638 – 647. (in Chinese)
- [26] 朱福敏, 郑尊信, 吴恒煜. 跳跃自激发与非对称交叉回馈机制下的期权定价研究 [J]. *系统工程理论与实践* , 2018 , 38(1) : 1 – 15.
Zhu Fumin , Zheng Zunxin , Wu Hengyu. Option pricing for the dynamics of jump-diffusion model with jump self-exciting

- and asymmetric cross-feedback [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2018, 38(1): 1–15. (in Chinese)
- [27] Du D, Luo D. The pricing of jump propagation: Evidence from spot and options markets [J]. *Management Science*, 2019, 65(5): 2360–2387.
- [28] Ait-Sahalia Y, Li C, Li C X. Closed-form implied volatility surfaces for stochastic volatility models with jumps [J]. *Journal of Econometrics*, 2021, 222(1): 364–392.
- [29] Ait-Sahalia Y, Li C, Li C X. Implied stochastic volatility models [J]. *Review of Financial Studies*, 2021, 34(1): 394–450.
- [30] Yuan P. Time-varying skew in VIX derivatives pricing [J]. *Management Science*, 2022, 68(10): 7761–7791.
- [31] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1): 125–144.
- [32] Li H, Wells M T, Yu C L. A Bayesian analysis of return dynamics with Lévy jumps [J]. *Review of Financial Studies*, 2008, 21(5): 2345–2378.
- [33] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明, 等. 基于序贯贝叶斯参数学习的 Lévy 动态波动率模型研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(3): 556–569.
Wu Hengyu, Zhu Fumin, Wen Jinming, et al. Sequential parameter learning for Lévy-driven volatility model [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2017, 37(3): 556–569. (in Chinese)
- [34] 刘志东, 刘雯宇, 阮禹铭. Lévy 过程驱动非高斯 OU 随机波动率下的期权定价 [J]. *管理科学学报*, 2019, 22(1): 17–43.
Liu Zhidong, Liu Wenyu, Ruan Yuming. Option pricing in non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes driven by the Lévy process [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(1): 17–43. (in Chinese)
- [35] 陈国进, 刘晓群, 谢沛霖, 等. 已实现跳跃波动与中国股市风险溢价研究——基于股票组合视角 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(6): 98–113.
Chen Guojin, Liu Xiaoqun, Xie Peilin, et al. Realized jump volatility components and portfolio risk premium in Chinese stock market [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(6): 98–113. (in Chinese)
- [36] Kou S, Yu C, Zhong H. Jumps inequity index returns before and during the recent financial crisis: A Bayesian analysis [J]. *Management Science*, 2017, 63(4): 988–1010.
- [37] Nyawa S. A factor model for systemic risk using mutually exciting jump processes [J]. 2018, Available at: <https://sites.google.com/site/sergenyawawomo2/research>.
- [38] Hansen L P. Large sample properties of generalized method of moments estimators [J]. *Econometrica*, 1982, 50: 1029–1054.
- [39] Newey W K, West K D. A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix [J]. *Econometrica*, 1987, 55(3): 703–708.
- [40] 马遥, 乔国荣, 池鸣, 等. 全球主要股票市场投资者结构比较 [J]. *金融市场研究*, 2020, (3): 51–58.
Ma Yao, Qiao Guorong, Chi Ming, et al. Comparative analysis of shareholdings in the domestic and overseas stock markets [J]. *Financial Market Research*, 2020, (3): 51–58. (in Chinese)
- [41] Li S Y, Ning K X, Zhang T. Sentiment-aware jump forecasting [J]. *Knowledge-based Systems*, 2021, 228: 107292.
- [42] 陈淼鑫, 徐亮. 基于 Hawkes 过程的尾部风险溢酬分析 [J]. *管理科学学报*, 2019, 22(6): 97–112.
Chen Miaoxin, Xu Liang. Tail risk premium analysis based on Hawkes process [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(6): 97–112. (in Chinese)
- [43] 雷立坤, 余江, 魏宇, 等. 经济政策不确定性与我国股市波动率预测研究 [J]. *管理科学学报*, 2018, 21(6): 88–98.
Lei Likun, Yu Jiang, Wei Yu, et al. Forecasting volatility of Chinese stock market with economic policy uncertainty [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(6): 88–98. (in Chinese)

Do the cumulative changes of volatility trigger jumps? Evidence from international equity markets

ZHU Fu-min¹, LIU Yi-rong^{1,2}, ZHENG Zun-xin^{1*}

1. College of Economics, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China;

2. Business School, University of Nottingham Ningbo, Ningbo 315100, China

Abstract: The existence of jump self-exciting and volatility clustering in the stock markets has become a common sense. However, there are still controversies about whether random jumps and continuous fluctuations in the market will be converted into each other and whether accumulated volatility will trigger random jumps. Therefore, this paper treats the cumulative changes of continuous volatility as the “quantitative changes” of prices, and the intermittent jumps as the “qualitative changes”. Then, a two-factor cross feedback dynamic model of jump self-exciting and volatility clustering, combined with the conditional characteristic function of the Lévy process, the generalized method of moments, and particle filtering approaches (GMM-PF), is adopted to capture the interaction between jumps and volatility of important international equity market indexes. Empirical research on representative international stock markets is conducted to capture and quantify the interactive transmission mechanism and degree of jumps and diffusion. Results show that there are co-evolution and cross-feedback effects between random jumps and continuous volatility: Jumps will lead to changes in the continuous volatility of the next period, and the accumulation of volatility will also increase the future jump arrival rate. Hence, the quantitative changes of volatility will cause the qualitative changes of jumps. Compared with the maximum likelihood estimation and particle filtering approach (MLE-PF) and sequential Bayesian learning method (SBL), the GMM-PF method proposed in this paper is more efficient and faster with high precision. Further, this paper also documents that the transmission mechanism between jump and diffusion differs greatly in different markets. Specifically, compared with developed markets, most emerging markets are relatively weak in digesting, transferring and diversifying jump risk, making their persistence of jumps remain at a high level. Therefore, both regulatory authorities and investors need to pay more attention to the evolution of jumps.

Key words: quantity breeds quality; jump self-exciting; jump-diffusion cross-feedback; generalized method of moments; particle filtering