

doi:10.19920/j.cnki.jmsc.2025.12.007

# 基于主动学习多输出高斯过程模型的 可靠性稳健设计优化<sup>①</sup>

冯泽彪<sup>1</sup>, 汪建均<sup>2\*</sup>, 马妍<sup>3</sup>

(1. 南京邮电大学管理学院, 南京 210003; 2. 南京理工大学经济管理学院, 南京 210094;  
3. 南京财经大学管理科学与工程学院, 南京 210023)

**摘要:** 针对多响应的质量改进问题, 本文在多输出高斯过程建模框架下, 提出了一种基于主动学习的多响应可靠性稳健设计优化(reliability-based robust design optimization, RBRDO)方法. 首先, 开发基于改进D-optimal设计的主动学习响应曲面建模方法, 以提升试验设计点的利用效率; 其次, 构造考虑响应相关性的协方差结构, 推导多输出高斯过程预测偏导数的表达式, 并结合一次二阶矩理论构建风险成本函数; 然后, 基于多输出高斯过程模型构建多元质量损失函数, 进而建立参数优化模型; 最后, 利用遗传算法获得Pareto解集, 并采用最短距离法确定最优解. 案例分析结果表明, 所提方法有效刻画了响应间的相关性, 提升了响应曲面模型和导数预测模型的预测精度, 获得了兼顾稳健性和可靠性的最优输入参数设置.

**关键词:** 多输出高斯过程模型; 主动学习; 可靠性稳健设计优化; 质量损失; 风险成本

**中图分类号:** F273.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2025)12-0088-20

## 0 引言

稳健设计(robust design, RD)和可靠性设计(reliability-based design, RBD)是实现产品质量持续改进的关键技术<sup>[1]</sup>. 产品质量的稳健性和可靠性改进, 可以为生产和服务打下坚实的基础, 提高产品的综合竞争力<sup>[2, 3]</sup>. RD方法主要目的是通过对生产过程参数的优化, 使得输出响应尽可能地满足产品质量特性要求, 同时最小化响应波动<sup>[4, 5]</sup>. 而RBD方法则通过优化过程参数, 使得输出响应尽可能地满足可靠度设计要求<sup>[6]</sup>. 单独使用RD方法或者RBD方法, 无法获得同时满足稳健性和可靠性要求的最优输入参数设置<sup>[7]</sup>. 因此, 集成的可靠性稳健设计优化(reliability-based

robust design optimization, RBRDO)方法常被用于实现产品全生命周期质量的稳健性和可靠性改进. RBRDO方法以失效概率为约束函数, 以质量损失为目标函数, 构建参数优化模型, 以获得兼顾稳健性和可靠性的最优解<sup>[8]</sup>. 然而, 工程实践中输入和输出之间的关系通常是高度复杂的, 这为失效概率的计算造成了极大的不便. 特别是针对多响应RBRDO问题, 目前大多数方法还无法有效刻画响应之间相关性对优化结果的影响, 这极有可能造成优化结果的稳健性和可靠性被高估.

针对产品质量改进中的可靠性稳健设计优化问题, 国内外学者提出了诸多理论方法. 彭茂林等<sup>[9]</sup>结合稳健性、可靠性以及6 $\sigma$ 设计思想, 提出了一种基于响应面理论的RBRDO方法. Youn

① 收稿日期: 2024-10-09; 修订日期: 2025-10-15.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(72301146; 72571142; 72501133; 72171118); 全国统计科学研究重点项目(2023LZ010); 中国博士后科学基金特别资助项目(2024T170430).

通讯作者: 汪建均(1977—), 男, 湖南慈利人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: jjwang@njut.edu.cn

等<sup>[10]</sup>将性能度量法和混合均值法相结合构建 RBD 指标,获得了考虑不确定性的可靠性最优设计. Du 等<sup>[11]</sup>提出了一种基于概率理论的逆可靠性分析方法,改善了二阶灵敏度对 FOSM 方法的限制. 随后, Yadav 等<sup>[12]</sup>将稳健设计与可靠性设计融为一体,提出基于混合质量损失函数的 RBRDO 模型,同时兼顾期望与偏差,以最小化质量损失并提升设计效率. Shin 和 Lee<sup>[13]</sup>构建了基于一次二阶矩 (first order and second moment, FOSM) 理论的性能函数,开展了道路最小曲线半径的可靠性分析和优化. Yang 和 Ching<sup>[14]</sup>将分位数统计矩重构为两类逆可靠性分析方法,以提升 FOSM 方法的精度和效率. Keshtegar 和 Chakraborty<sup>[15]</sup>提出一种基于有限度搜索技术的 FOSM 可靠性优化方法,提高了最优解的可靠性. Li 等<sup>[7]</sup>提出了一种基于直接概率积分法的 RBRDO 方法,可高效同步计算响应统计矩、可靠度及其灵敏度,进一步提升了最优解的有效性. 在基于 FOSM 理论的经典 RBRDO 方法中,如何准确获得最可能失效点 (most probable point, MPP) 是关键<sup>[16]</sup>. 因此,提高响应曲面模型的预测精度,以获得更为准确的 MPP 和失效概率,对改善参数优化结果的有效性至关重要.

高斯过程 (Gaussian process, GP 或 Kriging) 模型具有预测精度高和仿真成本少的优点,在产品质量设计领域得到了广泛的应用<sup>[17, 18]</sup>. 特别是,GP 模型可以精确近似高度复杂的非线性输入输出关系,为以响应曲面模型为基础的质量改进方法提供了便利<sup>[19]</sup>. Hyeon 和 Chai<sup>[20]</sup>提出一种基于 GP 模型的一阶可靠性优化方法,结合主动约束策略,拓展了统计矩方法在可靠性优化中的应用. Echard 等<sup>[21]</sup>提出以 GP 替代模型为核心的可靠性分析方法,并利用重要度抽样技术,实现小失效概率的高效评估. Wang 等<sup>[22]</sup>将时变概率约束转化为时不变约束,获得了动态情形下的最优解,进一步扩展了 GP 模型在可靠性优化方面的应用. Li 等<sup>[23]</sup>将时变纳入可靠性优化模型中,获得了动态情形下的可靠性最优解,进一步扩展了 GP 模型在可靠性优化方面的应用. 李宝玉等<sup>[24]</sup>将 GP 模型表示为张量积的形式,解决了梯度计算量

大以及可靠性分析困难的问题. 陆艺鑫等<sup>[25]</sup>提出了一种基于时变高斯过程模型的分层重要抽样方法,以评估航空发动机涡轮轴失效概率. Hong 等<sup>[26]</sup>提出了一种基于贝叶斯抽样技术的可靠性设计优化方法,利用罚函数将约束转化为无约束以降低模型复杂度,并结合高效采样策略,在多峰、强非线性场景下显著提升求解精度与效率. 上述研究利用 GP 建模技术构建输入参数和输出响应之间的近似关系模型,获得了相对准确的 MPP 和失效概率. 然而,针对多响应可靠性稳健设计优化问题时,标准高斯过程 (standard Gaussian process, SGP) 建模技术无法刻画各响应之间的相关性,这极易导致响应曲面模型预测精度的高估,故其所得优化结果的有效性值得商榷.

近年来,随着机器学习算法的发展,国内外学者尝试开发具有主动学习能力的 GP 模型,以改善响应曲面模型的预测精度<sup>[27-29]</sup>. 主动学习在统计学中也被称为序贯试验设计法. 一般而言,主动学习试验设计方法包括以下步骤<sup>[30-32]</sup>: 1) 构建初始设计方案,例如空间填充设计,收集数据,并建立初始模型; 2) 基于当前的拟合模型,更新指定的设计准则,并通过优化准则以选择下一批设计点; 3) 收集数据并更新模型; 4) 重复步骤 2) 和步骤 3),直到满足停止条件. 在步骤 2) 中使用的设计准则应符合试验的目的. 在可靠性稳健设计优化中,响应曲面模型的精度对获得准确的导数预测值至关重要, Wang 等<sup>[33]</sup>提出基于 U 函数的主动学习算法,以保证模型在分布参数变化范围内的预测能力. Haghighat 等<sup>[34]</sup>介绍了一类基于物理信息神经网络的深度学习方法,提升了 GP 模型的预测精度. Ko 和 Kim<sup>[35]</sup>提出一种基于深度高斯过程的集成模型,通过对潜在变量进行连续变换,捕捉响应曲面的非线性特征. Ding 等<sup>[36]</sup>开发了一种深度张量马尔可夫高斯过程建模方法,以提升模型的运算效率. Gnanasambandam 等<sup>[37]</sup>提出一种基于自动聚合程序的深度高斯过程建模方法,以近似增材制造过程中输入参数和输出响应之间的函数关系. Yan 等<sup>[38]</sup>提出一种深度多阶段学习框架,综合考虑各阶段的不确定性,以提升预测结果的准确性. Yue 等<sup>[39]</sup>提出了基于

方差的加权主动学习算法和 D-optimal 加权主动学习算法,量化了不确定性对响应曲面模型的影响. Chen 等<sup>[40]</sup>选择侧重估计系数方差的 D-optimal(DO)设计方法,以提升 GP 模型的预测精度. DO 算法在试验设计过程中重点考虑了极值、边界等信息丰富区域的预测精度,这些区域也是响应曲面模型误差的主要来源.但是,DO 算法又极易导致设计点的局部聚集,这不仅影响设计点的使用效率,也为协方差矩阵求逆造成困难.此外,上述方法是基于标准 GP 模型开发的,无法有效处理多响应的回归预测和参数优化问题.综上,现有的 RBRDO 方法未充分考虑输出响应相关性和设计点利用效率,这极有可能导致高估的响应曲面模型,进而影响所得最优输入参数设置的有效性.

本文拟在 GP 模型的框架下,围绕多输出建模、主动学习建模、RBRDO 建模以及参数优化四个阶段,实现多质量特性的可靠性稳健设计优化.首先,构建考虑响应相关性的多输出模型结构,利用最大化最小距离增强的 D-optimal 设计,以提升空间填充性,从而形成主动学习多输出高斯过程(multi-output Gaussian process, MGP)建模算法.其次,利用极大似然估计方法,估计模型超参数,建立主动学习 MGP 模型及其偏导数预测模型.然后,采用一次二阶矩方法,构建考虑响应相关性的风险成本函数和多元质量损失函数,进而建立 RBRDO 模型.最后,利用多目标优化算法,获得 Pareto 解集,并采用最短距离法选取最优解.本文所提多输出建模方法改善了响应曲面模型的预测精度,降低模型输出的不确定性.同时,所提主动学习建模算法提升了试验点的利用效率,适用于试验成本高、样本稀缺场景下的参数优化问题.本文方法综合考虑了响应相关性、质量损失以及风险成本对优化结果的影响,获得了兼顾稳健性和可靠性的最优输入参数设置,为实现产品质量的持续改进提供了技术支撑.

## 1 多输出高斯过程建模

### 1.1 经典高斯过程模型

标准的单变量 GP 模型中,假设有  $m$  个  $d$  维

输入为  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m]^T$ ,  $\mathbf{x}_i = [x_{i,1}, \dots, x_{i,d}]$ ,  $i = 1, \dots, m$ . 对应的  $m$  个输出响应为  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$ . 输出响应  $y$  与输入因子  $\mathbf{x}_0$  之间关系为

$$y(\mathbf{x}_0) = \mu + r_{\mathbf{x}_0}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mu \mathbf{I}) \quad (1)$$

其中  $\mu$  为预测响应均值;  $r_{\mathbf{x}_0} = (\text{cor}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), \dots, \text{cor}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_m))^T$  为  $\mathbf{x}_0$  和已知输入  $\mathbf{x}$  之间的  $1 \times m$  协方差关系;  $\mathbf{R}$  表示输入  $\mathbf{x}$  的  $m \times m$  协方差矩阵;  $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}$  为  $m \times m$  的协方差关系;  $\mathbf{I}$  为  $m$  维元素为 1 的向量.

GP 模型的协方差关系函数也被称为核函数,常用的核函数有平方指数核(Squared exponential covariance function)、马顿核(Matérn kernel)、 $\gamma$ -指数核( $\gamma$ -exponential covariance function)等<sup>[41]</sup>. 以平方指数核为例,输入  $\mathbf{x}_i$  和  $\mathbf{x}_j$  之间的协方差关系可以表示为

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \text{cor}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sigma^2 \exp \left( - \sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2 l_k^{-2} / 2 \right) \quad (2)$$

其中  $\sigma$  和  $l_k$  是未知参数,分别表示模型的估计方差和输入点在第  $k$  个方向的重要程度,  $[\mathbf{K}]_{i,j} = k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ . 通常采用最大似然函数法估计模型未知参数,负对数似然函数为

$$l(\mathbf{K}, \mu | \mathbf{y}, \mathbf{X}) = -\frac{1}{2} [m \ln(\sigma^2) + \ln(\mathbf{K}) + \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{y} - \mu \mathbf{I})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mu \mathbf{I})] \quad (3)$$

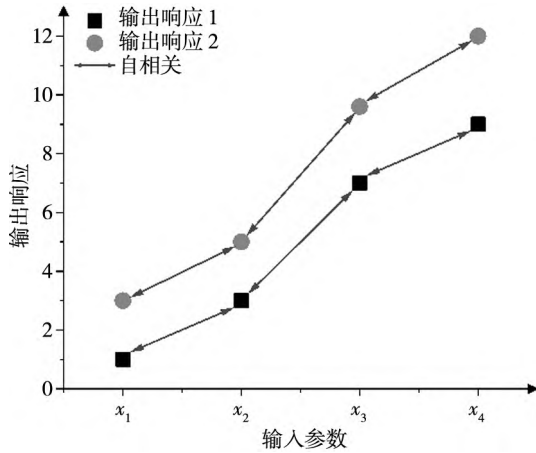
然后,最小化  $l(\mathbf{K}, \mu | \mathbf{y}, \mathbf{X})$  即可获得模型未知参数. 根据参数估计值,可得出任意输入  $\mathbf{x}_0$  处的预测方差

$$s_{\mathbf{x}_0}^2 = \sigma^2 (1 - \mathbf{r}_{\mathbf{x}_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_0} + (1 - \mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_0})^T \times (\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1})^{-1} (1 - \mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_0})) \quad (4)$$

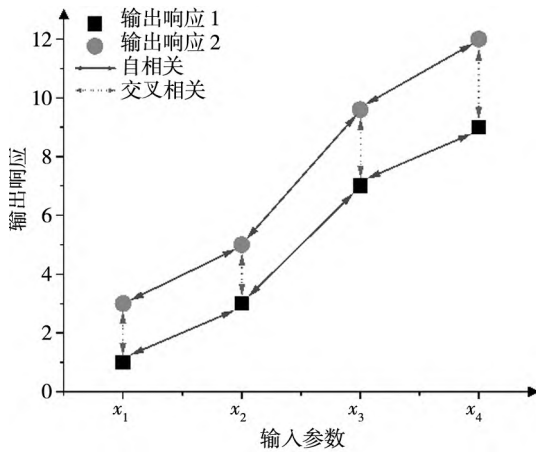
### 1.2 多输出高斯过程模型

标准 GP 模型能较好地处理一维输出响应的回归预测和参数优化问题.但是,针对多输出响应的可靠性稳健设计优化问题,该方法无法考虑输出响应之间的相关性,如图 1 所示.因此,使用标准 GP 构建多响应 RBRDO 模型,极有可能导致模型预测精度的不足,进而导致最优解稳健性的高估.为此,构建基于 MGP 的 RBRDO 模型,将能进

一步提升参数优化结果的稳健性和可靠性。



(a) 标准 GP 模型



(b) 多输出 GP 模型

图 1 标准 GP 模型和 MGP 模型

Fig. 1 Standard GP model and MGP model

本节考虑具有  $k$  个输入和  $n$  个输出类型的 MGP 模型. 假定所有输出类型为平稳 GP 过程, 这意味着输出  $y_g$  具有恒定的方差  $\sigma_g^2$ , 且其(自)协方差随着输入组合之间的距离而减小, 如式(2)所示. 此外, 在 MGP 中, 不同类型的输出  $y_g(x_i)$  和  $y_{g'}(x_j)$  (其中  $g, g' = 1, \dots, n$  且  $g \neq g'$ ) 在相同或不同的输入组合下具有相互协方差,  $x_i$  与  $x_j$  可以相同或不同. 以 2 个输出类型 ( $n = 2$ ) 为例<sup>[42]</sup>

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_i), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_j)) &= \\ & \begin{bmatrix} \text{cov}(y_1(x_i), y_1(x_j)) & \text{cov}(y_1(x_i), y_2(x_j)) \\ \text{cov}(y_1(x_i), y_2(x_j)) & \text{cov}(y_2(x_i), y_2(x_j)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

当  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$  且  $n = 2$ , 那么  $2 \times 2$  矩阵 ( $\Sigma_0$ ) 不随

输入组合  $\mathbf{x}$  变化, 式(5)可表示为

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中  $\sigma_{1,2} = \text{cov}(y_1, y_2)$ . 在具有  $n$  个输出的一般情况下, 任意输入  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 的(对称)协方差矩阵为

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

因此, 在一般情况下,  $\mathbf{Y}$  具有  $mn \times mn$  协方差矩阵

$$\begin{bmatrix} \Sigma_0 & \cdots & \text{Cov}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_1), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_m)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_1), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_m)) & \cdots & \Sigma_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

为了预测输入  $\mathbf{x}_0$  处的  $n$  个输出响应, 定义  $n \times mn$  协方差矩阵

$$\Sigma_{0,m,n} = (\text{Cov}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_1)), \dots, \text{Cov}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_m))) \quad (9)$$

根据最优线性无偏预测 (BLUP), 可得到 MGP 模型的预测响应

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0) = \hat{\boldsymbol{\mu}} + \Sigma_{0,m,n} \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (10)$$

其中  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  是  $\boldsymbol{\mu}$  的广义最小二乘 (generalized least squares, GLS) 估计

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\mathbf{F}^T \Sigma_Y^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{F}$  是一个  $m$  维单位向量与  $n \times n$  单位矩阵的 Kronecker 积. MGP 的预测方差为

$$\begin{aligned} \widehat{\text{MSPE}}[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0)] &= \hat{\Sigma}_0 - \hat{\Sigma}_{0,m,n} \left( (\hat{\Sigma}_Y)^{-1} \right) \hat{\Sigma}_{0,m,n}^T + \\ & \quad \mathbf{U} \mathbf{F}^T (\hat{\Sigma}_Y)^{-1} \mathbf{F} \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{U} = \mathbf{I}_n - \hat{\Sigma}_{0,m,n} (\hat{\Sigma}_Y)^{-1} \mathbf{F}$ .

为了保证式(10)和式(12)的有效性, 本文在共区域化线性 (linear model of coregionalization, LMC) 不可分建模方法<sup>[43]</sup>的框架下, 构建协方差矩阵以保证  $\Sigma_Y$  的正定特性. 一个具有均值向量  $\boldsymbol{\mu}$  和协方差矩阵  $\Sigma$  的  $n$  维高斯变量可以由包含  $n$  个独立同分布“标准”变量 (零均值和单位方差) 的向量  $\mathbf{Z}$  生成, 可以表示为  $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Z}$ ,  $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{A}$  是



一个对称矩阵<sup>[44]</sup>. 假定  $\mathbf{Y}$  为任意输入下的  $n$  维输出, 可表示为

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ} \quad (13)$$

其中  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  是 MGP 模型的均值向量;  $\mathbf{A} = (a_{g,g'})$  是一个对称正定矩阵;  $\mathbf{Z}$  是一个具有零均值和单位方差的相互独立的平稳高斯过程向量.  $\mathbf{Z}$  的高斯相关函数如式(2). 由式(2)可得多输出 GP 模型的协方差关系矩阵  $\mathbf{K}$  和超参数  $\mathbf{l}^o = (l_1^o, \dots, l_d^o)^T, o = 1, \dots, n$ . 则式(5) 可以表示为

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_i), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_j)) = \mathbf{A} \text{diag}[\mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \mathbf{l}^1), \dots, \mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \mathbf{l}^n)] \mathbf{A}^T \quad (14)$$

若  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ , 则式(2) 中  $\exp\left[-\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2 l_k^{-2}/2\right] = 1$ . 此时, 式(7) 中  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  为

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_i), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_i)) = \boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{A} \mathbf{A}^T \quad (15)$$

因此  $y_g$  和  $y_{g'}$  之间的协方差  $\sigma_{g,g'}$  可以表示为

$$\sigma_{g,g'} = \sum_{o=1}^n a_{g,o} a_{g',o} \quad (g, g' = 1, \dots, n) \quad (16)$$

特别地  $r_{g,g} = \sigma_g^2, \sigma_g^2$  为  $y_g$  的方差. 以  $n = 2$  的情况为例, 协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  可以表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 & a_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} \\ a_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} & a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

由于矩阵  $\mathbf{A}$  是对称的, 因此  $a_{g,g'} = a_{g',g}$ , 元素  $a_{g,g'}$  (等于  $a_{g',g}$ ) 表示两个输出的方差和协方差. 以平方指数核函数和一维输入  $x$  为例, 则式(2) 变为

$$\begin{aligned} K(x_i, x_j; l_k^{(g)}) &= \exp\left[-(x_i - x_j)^2 l_k^{(g)-2}/2\right] \\ &= \exp\left[-l_k^{(g)-2} d_{i,j}^2/2\right] \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $d_{i,j} = |x_i - x_j|$ , 可得协方差关系矩阵

$$\text{Cov}[\mathbf{Y}(\mathbf{x}_i), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_j)] = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{K}(d_{i,j}; l^1) & 0 \\ 0 & \mathbf{K}(d_{i,j}; l^2) \end{bmatrix} \mathbf{A}^T \quad (19)$$

将式(17)代入式(19)中可得

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{Y}(\mathbf{x}_i), \mathbf{Y}(\mathbf{x}_j)] &= \begin{bmatrix} a_{1,1}^2 \mathbf{K}(d_{i,j}; l^1) + a_{1,2}^2 \mathbf{K}(d_{i,j}; l^2) & \\ a_{1,1} \mathbf{K}(d_{i,j}; l^1) a_{2,1} + a_{1,2} \mathbf{K}(d_{i,j}; l^2) a_{2,2} & \\ a_{1,1} \mathbf{K}(d_{i,j}; l^1) a_{2,1} + a_{1,2} \mathbf{K}(d_{i,j}; l^2) a_{2,2} & \\ a_{2,1}^2 \mathbf{K}(d_{i,j}; l^1) + a_{2,2}^2 \mathbf{K}(d_{i,j}; l^2) & \end{bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

如式(15) 所示,  $\mathbf{A}$  是由  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  特征分解获得, 这

确保了  $\mathbf{A}$  的正定特性. 对矩阵  $\mathbf{A}$  进行 Cholesky 变换,  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$ . 确保  $\mathbf{L}$  主对角线上的所有元素为非负值, 即可保证协方差矩阵的对称正定特性, 进而确保式(5) ~ 式(12) 中建模过程的有效性. Svenson 和 Santner<sup>[44]</sup> 在最大似然估计过程中施加约束  $\{\mathbf{L}\}_{i,i} \geq 0 (i = 1, \dots, n)$ , 以保证对角线元素为非负. 受限的对数似然函数可以表示为

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Sigma}_Y, \boldsymbol{\mu} | \mathbf{Y}) &= \ln |\boldsymbol{\Sigma}_Y| + \ln |\mathbf{F}^T \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \mathbf{F}| + \\ &\quad (\mathbf{Y} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\mu}}) \end{aligned} \quad (21)$$

最大化对数似然函数式(21), 可估计 MGP 模型的超参数, 进而可获得 MGP 模型的预测响应和方差, 如式(10) 和式(12) 所示.

## 2 主动学习多输出高斯过程建模方法

在 RBRDO 中, 响应曲面模型和响应导数值的预测精度往往决定了所得优化结果的准确性和有效性<sup>[45]</sup>. 为此, 本节提出基于主动学习的 MGP 建模方法, 重点关注如何在有限试验成本情况下, 提升响应曲面模型和导数值的预测精度. DO 设计是提升模型预测精度的高效算法之一, 其通过最大化信息矩阵  $\det(\mathbf{M}^T \mathbf{M})$  的值来选择新的实验点, 矩阵  $\mathbf{M}$  是在  $m$  个设计点处的  $k$  个基函数的  $m \times k$  模型矩阵. 为了构建矩阵  $\mathbf{M}$ , 以刻画输出响应和其导数的信息, 本文将响应值及其导数预测值融入信息矩阵. 由于设计点的导数信息无法通过观测获得, 本文推导了 MGP 模型的导函数表达式, 并使用预测导数值代替真实值, 以改进文献[40] 中所介绍的 DO 准则. 对于  $m$  个设计点, 矩阵  $\mathbf{M}_m$  包含  $m$  行和  $k$  列. 则 DO 的设计准则为

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= \arg \max_{x \in \Omega} \det(\mathbf{M}_{m+1}^T \mathbf{M}_{m+1}) \\ &= \arg \max_{x \in \Omega} \det(\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m + \mathbf{m}(x) \mathbf{m}(x)^T) \\ &= \arg \max_{x \in \Omega} (1 + \mathbf{m}(x)^T (\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m)^{-1} \mathbf{m}(x)) \times \\ &\quad \det(\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m) \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\mathbf{m}(x)$  是评估输入  $x$  性能的  $k \times 1$  的基函数向

量. 由于  $\det(\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m)$  由已知的  $m$  个设计点获得, 其对于  $\mathbf{x}_{m+1}$  是不变的, 因此可以从目标函数中省略. 简化式(22)可得

$$\mathbf{x}_{m+1} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 + \mathbf{m}(\mathbf{x})^T (\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m)^{-1} \mathbf{m}(\mathbf{x})) \quad (23)$$

为了保证  $(\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m)^{-1}$  有解, 在式(23)中加入正则化项

$$\mathbf{x}_{m+1} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 + \mathbf{m}(\mathbf{x})^T (\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m + \rho \mathbf{I}_k)^{-1} \mathbf{m}(\mathbf{x})) \quad (24)$$

其中  $\rho$  是所有输出响应模型的信噪比均值.  $\rho_i$  是第  $i$  个输出模型的估计方差  $\sigma^2$  与现有  $m$  个观测值的样本方差  $s^2$  之比.

尽管 DO 方法能提升 MGP 模型的预测精度, 但其新增的设计点易聚集在设计空间的边界或极值区域, 从而可能影响整个响应曲面的预测精度, 并导致协方差矩阵的病态性. 为此, 本文采用最大化最小距离的填充设计准则 (space-filling, SF)<sup>[46]</sup> 对 DO 设计方法加以改进, 以提升设计点的空间填充性. 最大化最小距离准则可表示为

$$\mathbf{x}_{m+1} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{i=1, \dots, m} \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \quad (25)$$

其中  $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$  是设计点的距离度量, 本文采用欧氏距离  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2$ . 将 D-optimal 准则和最大化最小距离准则线性组合获得新的设计准则

$$\mathbf{x}_{m+1} = \arg \max [\alpha_1 \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2^2 + \alpha_2 (1 + \mathbf{m}(\mathbf{x})^T (\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m)^{-1} \mathbf{m}(\mathbf{x}))] \quad (26)$$

其中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是权重, 本文设置  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ . 为了消除量纲的影响, 对式(26)中的两个准则进行标准化

$$\mathbf{x}_{m+1} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \left[ \frac{\alpha_1}{U_s} \min_{i=1, \dots, m} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2^2 + \frac{\alpha_2}{U_D} (1 + \mathbf{m}(\mathbf{x})^T (\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m)^{-1} \mathbf{m}(\mathbf{x})) \right] \quad (27)$$

其中  $U_s = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2^2$ ;  $U_D = \max_{\mathbf{m} \in \mathcal{F}} (1 + \mathbf{m}^T (\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m)^{-1} \mathbf{m})$ . 它们可以通过二次规划计算获得. 本文所提主动学习过程如算法 1 所示.

### 算法 1 基于 MGP 模型的主动学习算法

Algorithm 1 Active learning algorithm based on the MGP model

---

**Input:** 最大允许设计点数  $N_{\max}$ ; 每次添加设计点个数  $N_{\text{add}}$ ; 每个响应分配的设计点个数  $B_i, i = 1, \dots, n$ ; 观测数据  $\mathbf{D}_0 = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ; 备选数据  $\Omega$

**Output:** MGP 模型和导数预测模型 (记为 dMGP 模型)

1. 利用观测数据  $\mathbf{D}_0$  构建 MGP 模型, 并推导 dMGP 模型;
2. **while**  $m < N_{\max}$  **do**
3. 根据现有观测数据  $\mathbf{D}_0$ , 构建新选择的设计点处的基函数, 并形成矩阵  $\mathbf{M}_m$ ;
4. 利用当前收集的数据拟合 MGP 模型, 获得  $\sigma^2$  和  $s^2$ , 并计算  $\rho$  值;
5. 根据 MGP 和 dMGP 模型, 计算潜在设计点处的基函数值  $\mathbf{m}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{m}_n(\mathbf{x})$ .
6. 初始化: 当前观测样本数量为  $m$ ;
7. **for**  $i = 1, \dots, n$  **do**
8. 初始化: 当前第  $i$  个响应观测样本数量为  $mz_i$ ;
9. **while**  $mz_i < B_i$  **do**
10. **for**  $j = 1, \dots, N_{\text{add}}$  **do**
11. 更新  $U_s$  和  $U_D$ ;
12. 计算每个设计点处的准则值, 使用式(27);
13. 选择具有最大准则值的设计点加入  $\mathbf{D}_0$ , 并将其从  $\Omega$  中移除;
14. 将  $(\mathbf{M}_{m+j-1}^T \mathbf{M}_{m+j-1})^{-1}$  更新为  $(\mathbf{M}_{m+j}^T \mathbf{M}_{m+j})^{-1}$ ;
15. 更新 MGP 和 dMGP 模型;
16. **end for**
17.  $mz_i \leftarrow mz_i + N_{\text{add}}$ ;
18. **end while**
19. **end for**
20. 获得新选择的  $\sum_{i=1}^n B_i$  个设计点;
21. 更新:  $m \leftarrow m + \sum_{i=1}^n B_i$ ;
22. **end while**
23. **return** MGP 模型和 dMGP 模型

---

## 3 基于主动学习建模策略的可靠性稳健设计优化

### 3.1 RBRDO 模型构建步骤

基于主动学习 MGP 建模技术的多响应 RBRDO 模型构建流程, 如图 2 所示, 详细步骤如下:

**步骤 1** 确定试验方案, 收集初始试验数据, 构建考虑响应相关性的初始 MGP 模型.

**步骤 2** 利用算法 1 中的主动学习方法选取新的试验点, 并更新试验数据集.

**步骤 3** 利用步骤 2 所得试验数据, 更新步骤 1 中的 MGP 模型, 并推导其偏导数预测模型.

**步骤 4** 根据指定的失效阈值,结合统计矩理论和偏导数预测模型输出结果,构建风险成本函数。

**步骤 5** 利用 MGP 模型的输出响应和方差,结合响应的质量特性要求,建立多元质量损失函数。

**步骤 6** 结合质量损失函数和风险成本函数,构建 RBRDO 模型。

**步骤 7** 利用多目标优化算法进行全局优化,获得 Pareto 解集。计算欧氏距离,并使用最短距离法确定最优输入参数设置。

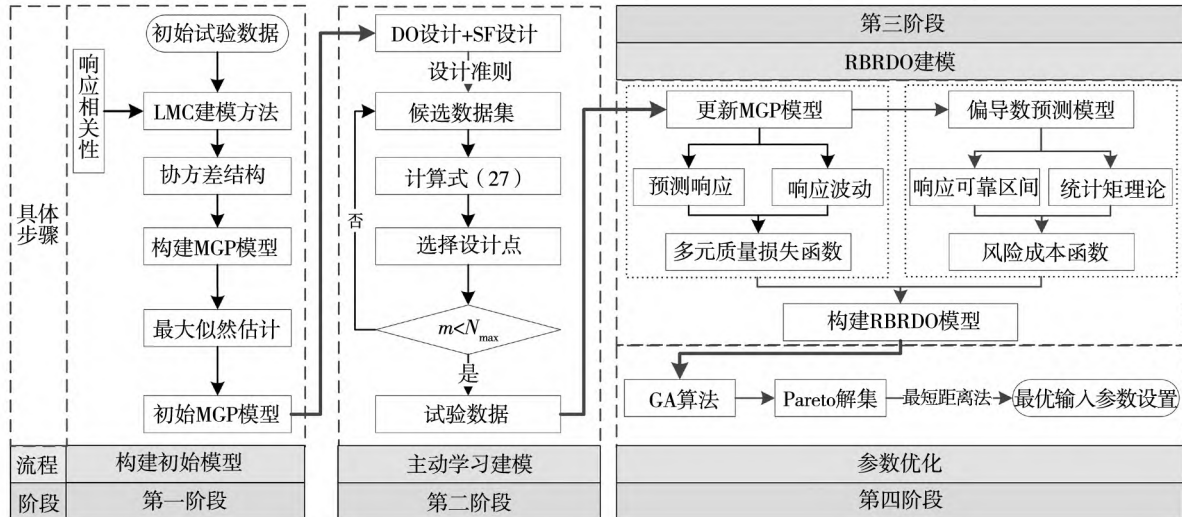


图 2 本文所提方法流程图

Fig. 2 Flowchart of the proposed method

### 3.2 失效风险成本

在可靠性设计中,可控变量的设计区域通常被极限状态函数 ( $G(\mathbf{x}) = 0$ ) 划分为安全区域 ( $G(\mathbf{x}) > 0$ ) 和失效区域 ( $G(\mathbf{x}) < 0$ ) 两个部分。假定输入变量  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_d]$  服从正态分布  $x_i \sim N(\mu_{x_i}, \sigma_{x_i})$ ,  $i = 1, \dots, d$ 。设计点  $\mathbf{x}' = [x'_1, \dots, x'_d]$  位于失效边界  $G(\mathbf{x}) = 0$  上,根据一次二阶矩理论,非线性功能函数在设计点  $\mathbf{x}'$  处的泰勒展开式为

$$GT(\mathbf{x}) \approx G(\mathbf{x}') + \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}'} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (28)$$

记功能函数式 (28) 的均值和标准差分别为  $\mu_G(\mathbf{x})$  和  $\sigma_G(\mathbf{x})$ , 且  $G(\mathbf{x}') = 0$ 。输入位置  $\mathbf{x}$  处的可靠度指标  $\gamma(\mathbf{x})$  和失效概率  $P(\mathbf{x})$  可表示为

$$\gamma(\mathbf{x}) = \frac{\mu_G(\mathbf{x})}{\sigma_G(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}'} (\mu_{x_i} - x'_i)}{\left[ \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}'}^2 \sigma_{x_i}^2 \right]^{1/2}} \quad (29)$$

$$P(\mathbf{x}) = \Phi[-\gamma(\mathbf{x})] \quad (30)$$

其中  $\mu_{\mathbf{x}}$  和  $\sigma_{\mathbf{x}}$  分别为输入  $\mathbf{x}$  的均值和标准差;  $\Phi[\cdot]$  是标准正态函数 CDF 的逆函数;可靠度指

标  $\gamma(\mathbf{x})$  用于衡量输入位置  $\mathbf{x}$  与功能函数设计点或最可能失效点 (MPP) 之间的几何距离。本文采用 HLRF (Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler) 迭代法计算功能函数的 MPP。HLRF 方法具有收敛效率高、运算成本低等优点,尤其在处理非线性极限状态函数时表现出较好的迭代性能。它通过梯度信息快速逼近 MPP,并在计算过程中保持较高的计算效率和稳定性。有关 HLRF 方法的具体迭代算法步骤,请参考文献[47]。

本文利用失效概率  $P(\mathbf{x})$  构造风险成本函数,以衡量输入点所对应的潜在风险成本。当输入点与 MPP 之间正向距离越大风险成本较小;反之,正向距离越小风险成本越大。当输入点与 MPP 之间为负向距离时,将发生失效成本。由于本文主要关注如何在可靠区域内,获得综合考虑稳健性和可靠度的最优输入设置。因此,本节仅考虑输入点与 MPP 之间为正向距离的情况。风险成本函数如下

$$RC(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})P(\mathbf{x}) \quad (31)$$

其中  $B(\mathbf{x})$  是产品不满足可靠区间限制所产生的失效成本;  $P(\mathbf{x}) = \Phi[-\gamma(\mathbf{x})]$  为失效概率。

由式(31)可知,要求解风险成本函数,需先获得极限状态函数的偏导数. 由于在工程实践中该偏导数无法通过观测直接获取,因此本文在 MGP 模型的框架下推导其偏导数预测表达式,具体过程如下:

假定  $x_{0,t}$  为输入  $\mathbf{x}_0$  的第  $t$  个因子,  $t = 1, \dots, d$ . 极限状态功能函数在  $x_{0,t}$  处的偏导数为

$$\left[ \frac{\partial y_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}}, \dots, \frac{\partial y_p(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}} \right] = \frac{\partial y(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}} \quad (32)$$

其中  $y(\mathbf{x}_0)$  为由 MGP 模型拟合的功能函数,将式(10)代入式(32)可得

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial y_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}}, \dots, \frac{\partial y_p(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}} \right] \\ &= \frac{\partial (\mathbf{F}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x}_0) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}\tilde{\boldsymbol{\beta}}))}{\partial x_{0,t}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}\tilde{\boldsymbol{\beta}}) \end{aligned} \quad (33)$$

其中  $\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_0)/\partial x_{0,t}$  为  $x_{0,t}$  偏导数和输入  $\mathbf{X}$  之间的协方差关系矩阵.  $x_{0,t}$  的偏导数和任意观测点  $\mathbf{x}_g$  之间的协方差关系可表示为

$$\begin{aligned} \text{cor} \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial x_{0,t}}, \mathbf{x}_g \right] &= \frac{\partial \text{cor}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_g]}{\partial x_{0,t}} = \\ & \tau_{bi,cj} \exp \left( - \sum_{k=1}^d (x_{0,k}^b - x_{g,k}^c) 2\phi_k^{-2}/2 \right) \times \\ & (-\phi_k^{-2} (x_{0,t}^b - x_{g,t}^c)) \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $b, c = 1, \dots, p$  分别表示第  $b$  个和第  $c$  个响应.  $\tau_{bi,cj}$  为响应之间的交叉相关度. 根据式(34)可获得输入  $\mathbf{x}_{0,t}$  和  $\mathbf{X}$  之间的协方差关系矩阵  $\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_0)/\partial x_{0,t}$ . 然后,  $x_{0,t}$  处的偏导数预测函数可表示为

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial y_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}}, \dots, \frac{\partial y_p(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}} \right] = \frac{\partial \text{cor}[\mathbf{x}_0, \mathbf{X}]}{\partial x_{0,t}} \times \\ & \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}\tilde{\boldsymbol{\beta}}) \end{aligned} \quad (35)$$

将式(35)代入式(31),可得基于 MGP 模型的风险成本函数

$$\begin{aligned} RC(\mathbf{x}_0) &= RC_1(\mathbf{x}_0) + \dots + RC_p(\mathbf{x}_0) \\ &= \sum_{h=1}^p B_h(\mathbf{x}_0) \Phi \left( - \frac{\sum_{t=1}^d \left( \frac{\partial y_h(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}} \right) (\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_0} - \mathbf{x}^*)}{\left[ \sum_{t=1}^d \left( \frac{\partial y_h(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0,t}} \right)^2 \right]_{\mathbf{x}^*} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}_0}^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (36)$$

其中  $B_h(\mathbf{x}_0)$  为第  $h$  个响应不满足可靠区间限制所产生的可靠度成本;  $y(\mathbf{x})$  为根据可靠区间和 MGP 建模技术构建的极限状态函数.

### 3.3 多元质量损失函数

质量损失函数用于度量偏离目标所造成的质量损失,作为稳健性指标被广泛用于产品/过程的质量改进<sup>[48]</sup>. 针对多响应的稳健参数优化问题, Wang 等<sup>[49]</sup>提出多元质量损失函数,以综合考虑成本和不确定性对优化结果的影响,表达式如下

$$EL(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T})^T \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}) + \text{trace}[\mathbf{C} \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})}] \quad (37)$$

其中  $\mathbf{T}$  为响应的目标值向量;  $\mathbf{C}$  是成本矩阵,用以反映经济成本因素;  $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})}$  是输入点处的  $p \times p$  预测方差协方差矩阵;  $p$  是响应个数. 本文以多元质量损失函数式(37)为评价指标,综合权衡最优解的稳健性.

### 3.4 多响应 RBRDO 模型

本文利用 MGP 建模技术,构建考虑响应相关性的偏导数预测模型. 基于失效概率构建风险成本函数,以衡量输出响应的潜在成本. 进而建立综合考虑质量损失、风险成本以及响应相关性的 RBRDO 模型

$$\begin{aligned} & \begin{cases} RC(\mathbf{x}) = RC_1(\mathbf{x}) + \dots + RC_p(\mathbf{x}) \\ EL(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T})^T \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}) + \\ \quad \text{trace}[\mathbf{C} \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})}] \end{cases} \quad (38) \\ & \text{s. t. } \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Psi} \end{aligned}$$

其中  $\boldsymbol{\Psi}$  为输入变量设计区域. 利用 MATLAB 优化工具箱中的全局优化算法,最小化式(38),可获得一组 Pareto 折中解. 本文利用最短距离法<sup>[50]</sup>从 Pareto 解集中选取折中最优解. 首先,利用遗传算法分别最小化式(38)中的两个目标函数,获得单目标理想解 ( $obj_1^{ideal}, obj_2^{ideal}$ ). 然后,计算所有 Pareto 折中解与理想解 ( $obj_1^{ideal}, obj_2^{ideal}$ ) 之间的欧几里得距离,并选择距离最近的解为折中最优解.

## 4 实例分析

### 4.1 数值案例分析

本节通过 Bohachevsky 测试函数,验证本文方法对多响应偏导数的预测能力. 该案例由 3 个输出响应和 2 个输入因子组成,测试函数表达式如下



$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3\cos(3\pi x_1) - 0.4\cos(4\pi x_2) + 0.7 \\ f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3\cos(3\pi x_1) - 0.4\cos(2\pi x_2) + 0.3 \\ f_3 = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3\cos(3\pi x_1 + 4\pi x_2) + 0.3 \end{cases} \quad (39)$$

其中  $x_i \in [-1, 1]$ ,  $i = 1, 2$ . 根据式(39), 利用切片拉丁方设计(sliced Latin hypercube design, SLHD)试验设计方案<sup>[51]</sup>, 产生初始观测样本点, 建立初始 MGP 模型. 并利用所提主动学习设计方法为每个响应增加新的样本点, 并生成最终的训练样本点. 为了说明所提方法的有效性, 本文均以方根误差(root mean square error, RMSE)和绝对平均误差(mean absolute error, MAE)为预测精度指标进行对比. RMSE 和 MAE 的计算表达式如下

$$\text{RMSE} = \frac{1}{\text{iter}} \sum_{u=1}^{\text{iter}} \left( \sqrt{\frac{1}{\text{num}} \sum_{i=1}^{\text{num}} (y_i - \hat{y}_i)^2} \right) \quad (40)$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{\text{iter}} \sum_{u=1}^{\text{iter}} \left( \frac{1}{\text{num}} \sum_{i=1}^{\text{num}} |y_i - \hat{y}_i| \right) \quad (41)$$

其中  $y_i$  是真实的响应值;  $\hat{y}_i$  是预测响应值; num 为测试点的个数, 设置为 20; iter 为重复迭代次

数, 设置为 50. 本节以 90、105、120 训练样本为例(利用主动学习准则为每个响应增加 10 个新的试验点), 计算 RMSE 值和 MAE 值, 以评估所提方法的性能. 为了提升对比结果的准确性, 以 50 次结果的 RMSE 和 MAE 均值为最终的对比指标, 迭代过程中训练点和测试点均更新. 本文也给出了其他三种方法的结果: 经典的 GP 建模方法(classical GP method, CM)<sup>[52]</sup>、基于 DO 准则的 MGP 建模方法(D-optimal method, DM)<sup>[53]</sup>、基于均匀空间填充准则的 MGP 建模方法(uniform space-filling method, UM)<sup>[54]</sup>. 此外, 为了说明本文 PM 方法对 DO 方法的改进效果, 图 3 中给出了 DM 和 PM 方法的试验结果. 如图 3 所示, DM 方法所增加的 30 个设计点大多聚集在边界区域, 这影响了试验点的利用效率. 而本文 PM 方法兼顾了信息丰富区域的预测精度和设计点的空间填充性, 获得了更为有效的试验数据. 为了进一步对比分析, 本文给出了 50 次重复迭代的 RMSE 值和 MAE 值, 如图 4 ~ 图 6 所示. RMSE 均值和 MAE 均值的对比结果, 如表 1 ~ 表 6 所示.

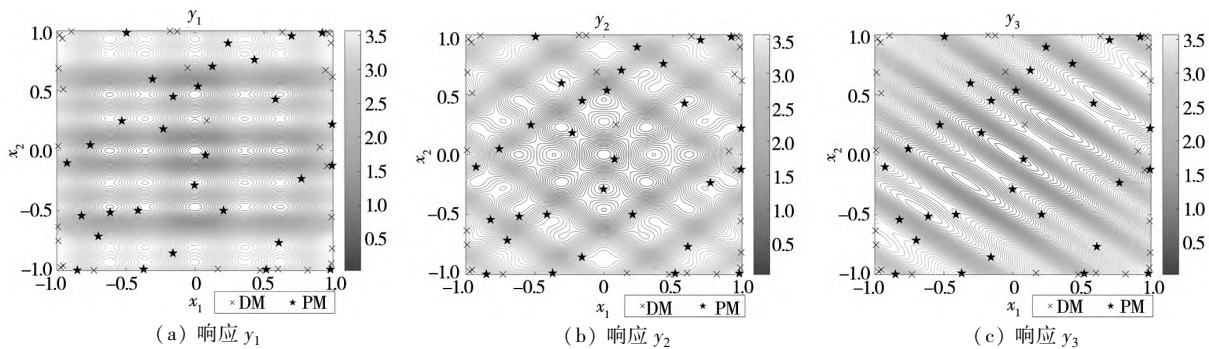


图 3 PM 和 DM 方法的试验结果

Fig. 3 Experimental results of PM and DM methods

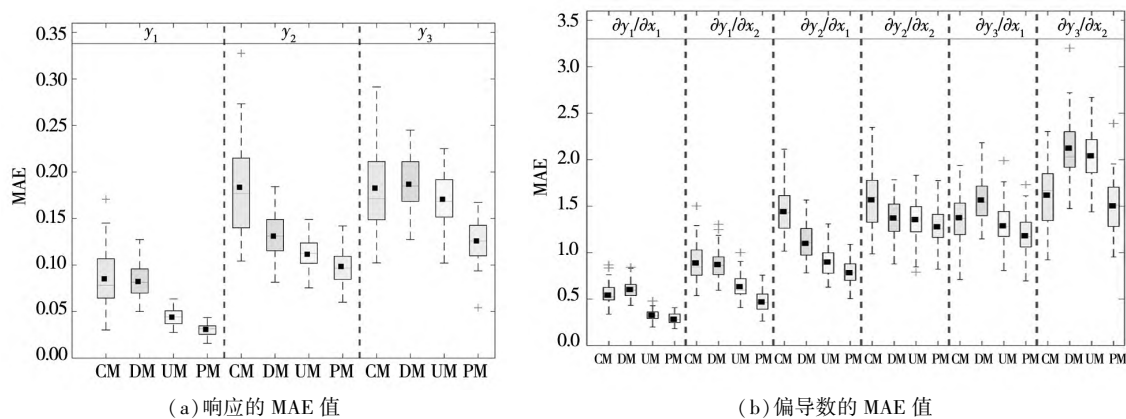
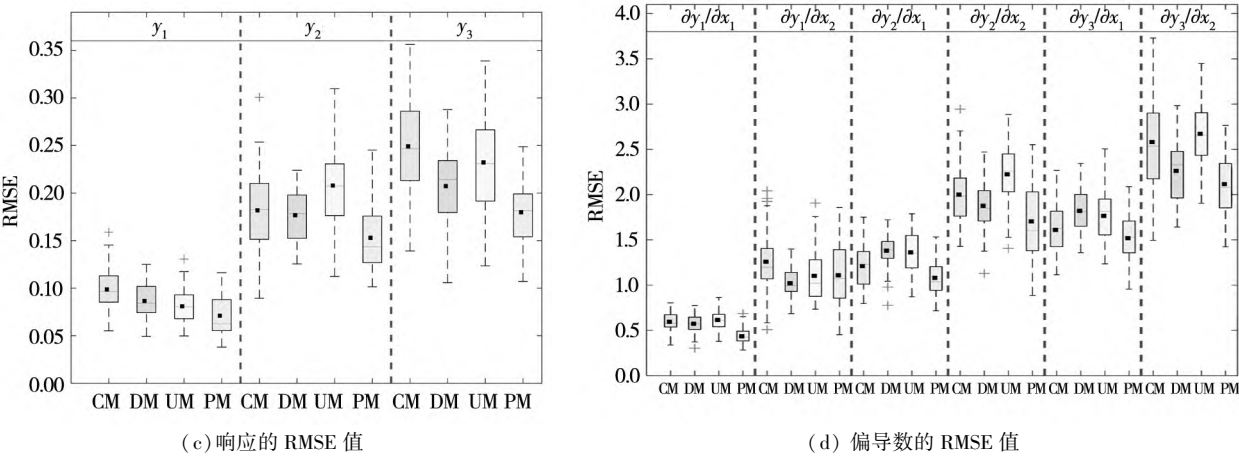


图 4 预测精度对比图 (90 个训练样本)

Fig. 4 Comparison of prediction accuracy (90 training points)



续图 4

Fig.4 Continues

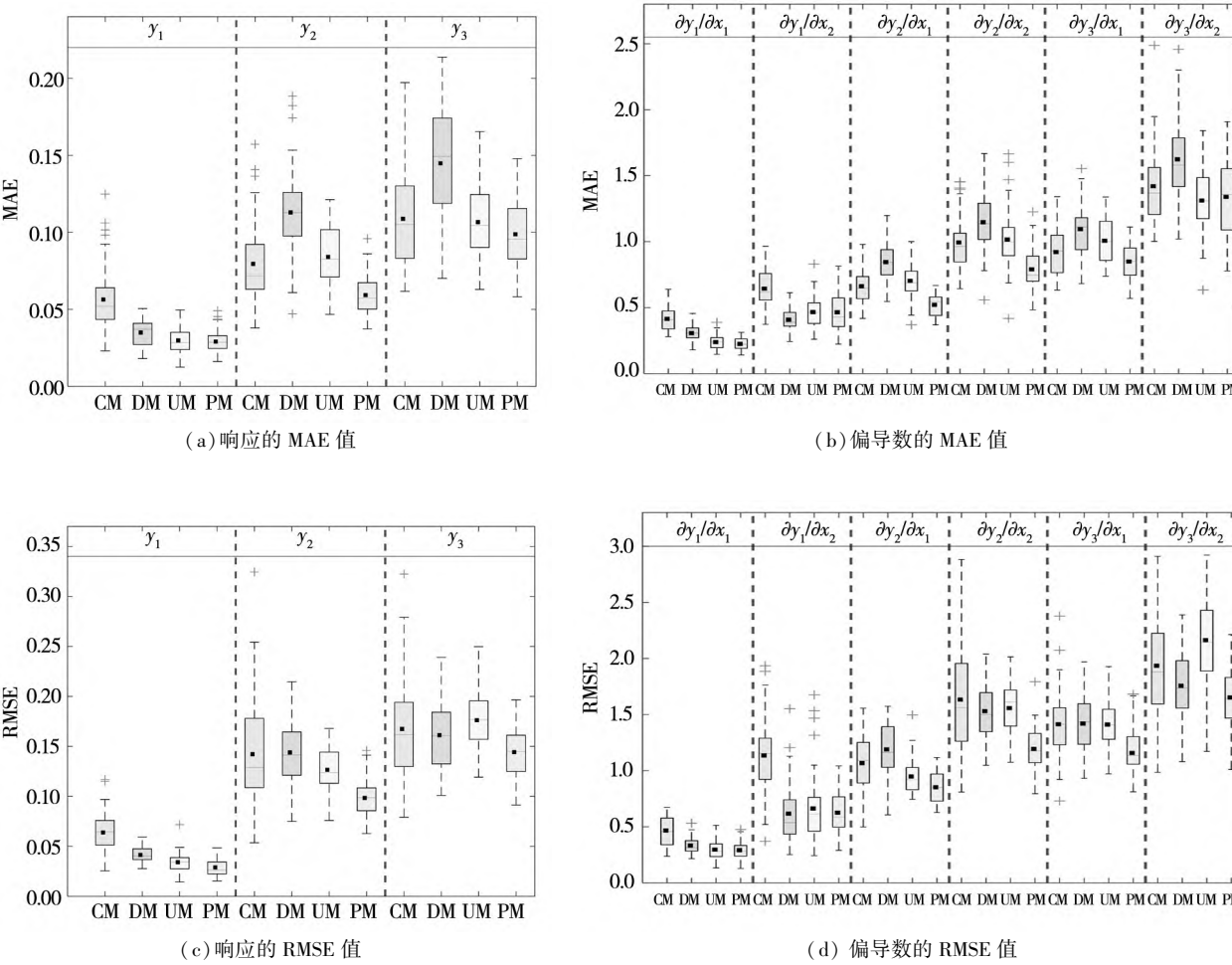


图 5 预测精度对比图 (105 个训练样本)

Fig.5 Comparison of prediction accuracy (105 training points)

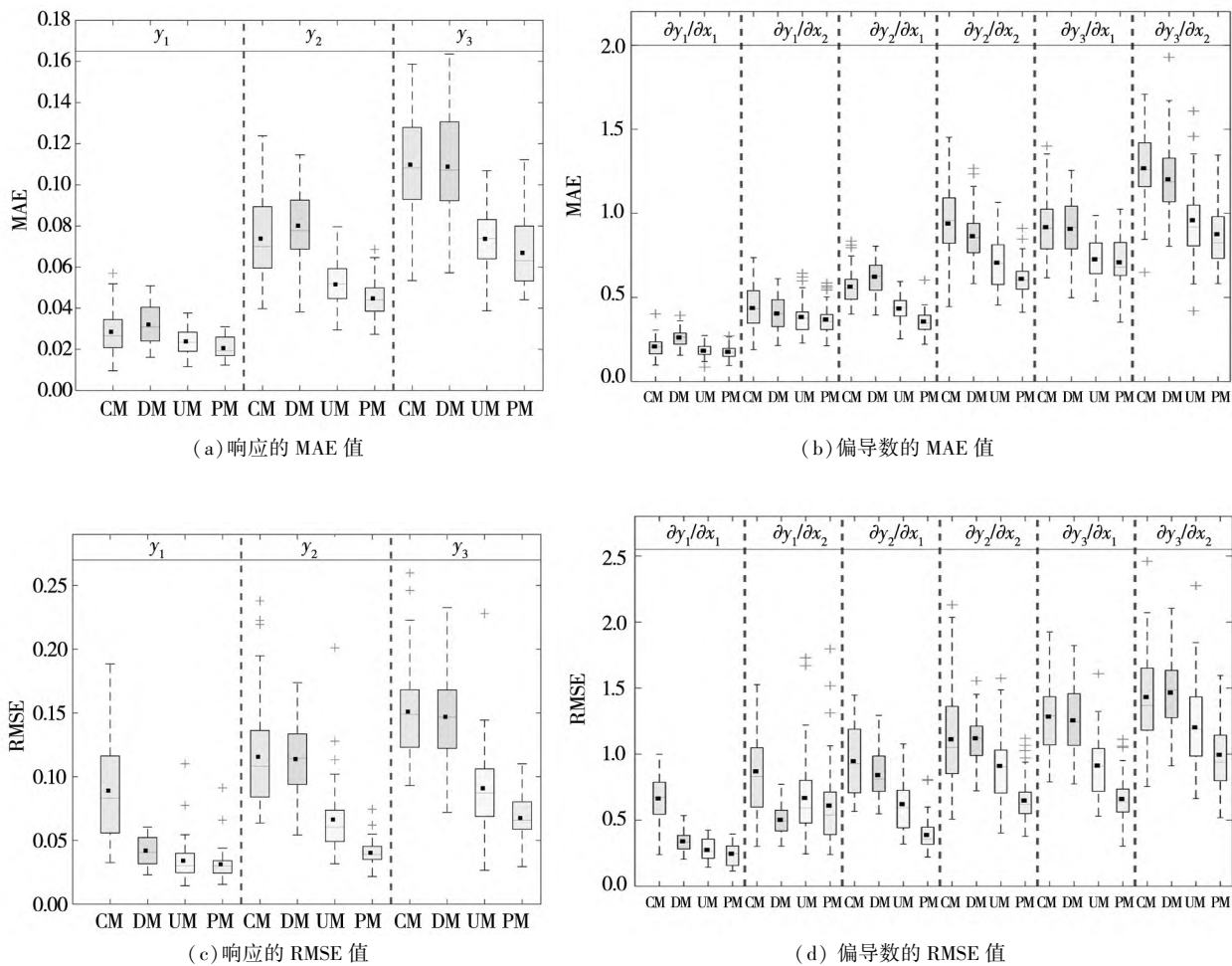


图 6 预测精度对比图 (120 个训练样本)

Fig. 6 Comparison of prediction accuracy (120 training points)

表 1 不同方法的 MAE 值 (90 个训练样本)

Table 1 MAE values of different methods (90 training points)

Method	MAE								
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\partial y_1 / \partial x_1$	$\partial y_1 / \partial x_2$	$\partial y_2 / \partial x_1$	$\partial y_2 / \partial x_2$	$\partial y_3 / \partial x_1$	$\partial y_3 / \partial x_2$
CM	0.085 3	0.183 6	0.182 7	0.541 8	0.888 3	1.441 4	1.567 4	1.375 5	1.618 2
DM	0.082 4	0.131 1	0.186 9	0.602 0	0.871 1	1.099 5	1.372 0	1.565 9	2.124 1
UM	0.044 1	0.111 7	0.170 7	0.326 0	0.632 9	0.898 2	1.355 1	1.288 3	2.041 4
PM	<b>0.030 9</b>	<b>0.098 5</b>	<b>0.126 0</b>	<b>0.282 7</b>	<b>0.469 0</b>	<b>0.783 7</b>	<b>1.277 6</b>	<b>1.180 5</b>	<b>1.503 7</b>

表 2 不同方法的 RMSE 值 (90 个训练样本)

Table 2 RMSE values of different methods (90 training points)

Method	RMSE								
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\partial y_1 / \partial x_1$	$\partial y_1 / \partial x_2$	$\partial y_2 / \partial x_1$	$\partial y_2 / \partial x_2$	$\partial y_3 / \partial x_1$	$\partial y_3 / \partial x_2$
CM	0.098 6	0.181 8	0.249 1	0.594 6	1.258 2	1.210 0	1.999 1	1.609 4	2.580 9
DM	0.086 5	0.176 7	0.207 3	0.572 5	<b>1.020 3</b>	1.380 6	1.876 0	1.819 8	2.261 9
UM	0.080 9	0.207 9	0.232 1	0.615 4	1.102 4	1.361 7	2.223 8	1.764 2	2.671 5
PM	<b>0.071 1</b>	<b>0.152 9</b>	<b>0.179 8</b>	<b>0.434 3</b>	1.108 2	<b>1.080 3</b>	<b>1.703 9</b>	<b>1.517 7</b>	<b>2.115 3</b>

表 3 不同方法的 MAE 值 (105 个训练样本)

Table 3 MAE values of different methods (105 training points)

Method	MAE								
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\partial y_1 / \partial x_1$	$\partial y_1 / \partial x_2$	$\partial y_2 / \partial x_1$	$\partial y_2 / \partial x_2$	$\partial y_3 / \partial x_1$	$\partial y_3 / \partial x_2$
CM	0.056 4	0.079 5	0.108 8	0.414 3	0.643 8	0.662 7	0.993 9	0.921 0	1.420 3
DM	0.034 9	0.112 9	0.144 8	0.306 4	<b>0.408 6</b>	0.845 5	1.147 3	1.095 0	1.624 3
UM	0.029 8	0.084 1	0.106 6	0.238 6	0.466 3	0.703 4	1.016 5	1.006 9	1.311 7
PM	<b>0.029 1</b>	<b>0.059 3</b>	<b>0.098 7</b>	<b>0.225 0</b>	0.464 8	<b>0.521 2</b>	<b>0.790 6</b>	<b>0.849 6</b>	<b>1.339 5</b>

表 4 不同方法的 RMSE 值 (105 个训练样本)

Table 4 RMSE values of different methods (105 training points)

Method	RMSE								
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\partial y_1 / \partial x_1$	$\partial y_1 / \partial x_2$	$\partial y_2 / \partial x_1$	$\partial y_2 / \partial x_2$	$\partial y_3 / \partial x_1$	$\partial y_3 / \partial x_2$
CM	0.063 9	0.142 2	0.167 4	0.467 2	1.135 0	1.067 7	1.633 7	1.413 6	1.935 1
DM	0.041 4	0.143 9	0.161 2	0.332 5	<b>0.616 8</b>	1.189 9	1.530 6	1.419 3	1.756 8
UM	0.034 1	0.126 6	0.176 1	0.296 1	0.662 7	0.947 8	1.557 3	1.411 0	2.163 3
PM	<b>0.028 9</b>	<b>0.098 4</b>	<b>0.144 3</b>	<b>0.291 8</b>	0.625 6	<b>0.852 3</b>	<b>1.193 7</b>	<b>1.157 8</b>	<b>1.652 2</b>

表 5 不同方法的 MAE 值 (120 个训练样本)

Table 5 MAE values of different methods (120 training points)

Method	MAE								
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\partial y_1 / \partial x_1$	$\partial y_1 / \partial x_2$	$\partial y_2 / \partial x_1$	$\partial y_2 / \partial x_2$	$\partial y_3 / \partial x_1$	$\partial y_3 / \partial x_2$
CM	0.028 5	0.073 9	0.109 8	0.208 3	0.437 0	0.564 1	0.939 3	0.918 0	1.268 2
DM	0.032 1	0.080 2	0.108 8	0.261 9	0.404 5	0.622 9	0.864 6	0.907 7	1.202 8
UM	0.023 9	0.051 6	0.073 7	0.182 7	0.383 3	0.434 1	0.706 6	0.726 6	0.959 2
PM	<b>0.020 6</b>	<b>0.044 7</b>	<b>0.066 9</b>	<b>0.176 8</b>	<b>0.369 3</b>	<b>0.356 9</b>	<b>0.610 5</b>	<b>0.708 7</b>	<b>0.876 2</b>

表 6 不同方法的 RMSE 值 (120 个训练样本)

Table 6 RMSE values of different methods (120 training points)

Method	RMSE								
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\partial y_1 / \partial x_1$	$\partial y_1 / \partial x_2$	$\partial y_2 / \partial x_1$	$\partial y_2 / \partial x_2$	$\partial y_3 / \partial x_1$	$\partial y_3 / \partial x_2$
CM	0.089 1	0.1156	0.151 0	0.664 2	0.870 3	0.947 3	1.112 9	1.284 3	1.432 3
DM	0.042 0	0.113 8	0.147 0	0.340 8	<b>0.503 0</b>	0.841 3	1.119 8	1.255 6	1.465 7
UM	0.034 1	0.066 4	0.090 9	0.274 8	0.668 4	0.621 2	0.911 2	0.913 6	1.202 7
PM	<b>0.031 3</b>	<b>0.040 3</b>	<b>0.067 6</b>	<b>0.245 9</b>	0.610 7	<b>0.388 4</b>	<b>0.649 1</b>	<b>0.660 8</b>	<b>0.995 4</b>

如图 4 ~ 图 6 所示,随着试验点样本数量的增加,所有方法的响应和偏导数的预测精度均有所提升. 在相同样本数量下,各方法均获得了较好的响应预测精度,而偏导数的预测精度相对较差. 这是由于偏导数预测模型的协方差函数更为复杂,导致精确获得其预测值更为困难. 由表 1 ~ 表 6 可知,不同样本数量下,本文所提 PM 方法获得了除  $\partial y_1 / \partial x_2$  外的其他指标的最小均值. 尽管 PM 方法所得  $\partial y_1 / \partial x_2$  (RMSE 值和 105 训练样本下的 MAE 值)要大于 DM 方法,但二者之间差距非常小,这表明了本文方法的有效性. 由于 CM 方法无法考虑多个输出响应之间的相关性,导致其



预测精度不如本文方法. DM 方法在试验过程中重点考虑了信息丰富区域的预测精度, UM 方法则更加关注设计区域的填充均匀性, 故上述几种方法的设计策略要差于本文方法. 而本文 PM 方法不仅考虑了响应之间的相关性, 而且兼顾了试验点的使用效率, 故其获得了较高的预测精度. 同时, 相较于偏导数的预测精度, 本文方法对响应预测精度的提升更为明显. 另一方面, 在表 1 ~ 表 6 中本文方法预测精度提升比例最大值为 65.1% (120 个训练样本下  $y_2$  的 RMSE 值), 提升比例最小值为 1.4% (105 个训练样本下  $\partial y_1 / \partial x_1$  的 RMSE 值). 表 1 中本文 PM 方法相较于 CM、DM、UM 方法的改进比例均值 (不含  $\partial y_1 / \partial x_2$ ) 分别为 34.3%、32.8%、16.8%; 表 2 中相应的改进比例均值分别为 18.5%、15.3%、21.2%; 表 3 中相应的改进比例均值分别为 23%、29%、13.3%; 表 4 中相应的改进比例均值分别为 27.1%、19.9%、16.5%; 表 5 中相应的改进比例均值为 30.9%、34%、10.3%; 表 6 中相应的改进比例均值为 53.5%、43.4%、24.3%. 因此, 本文方法在响应值和偏导数值的预测精度方面具有明显的提升. 为比较计算效率, 图 7 给出了各方法完成单次试验设计迭代的运行时间 (s). 所有结果均在同一硬件环境下进行 (台式机: Intel Core i7 - 13700K, 3.40 GHz; 内存 32 GB).

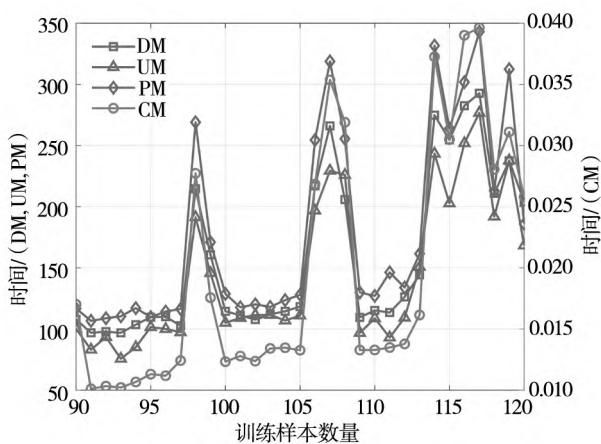


图 7 不同方法的计算效率

Fig. 7 Computational efficiency of different methods

由于 CM 方法采用经典响应曲面建模策略, 其试验设计过程只需执行一次抽样, 且模型结构相对简单, 故其消耗的计算成本是所有方法中最少的. 而 DM、UM 及 PM 方法均是基于主动学习

算法框架的建模方法, 需要在试验过程中迭代更新响应曲面模型, 故这三种方法消耗的计算成本相对较多. 图 7 中 DM、UM 及 PM 方法所消耗的最大时间成本分别为 292.75 s、343.08 s、276.76 s, 均远远大于 CM 方法. 另一方面, 相较于另外两种主动学习方法 (DM 和 UM), 本文 PM 方法并未消耗过多的运算成本, 故本文方法的计算效率和其他主动学习建模方法几乎相同. 此外, 由于参数优化过程中不需要迭代更新响应曲面模型, 故各种方法在优化过程中所消耗的时间相差不大 (将在下一节进行对比分析). 尽管本文方法耗费了更多的计算成本, 但其提升了响应曲面模型的预测精度, 为构建有效的 RBRDO 模型提供了坚实的基础.

#### 4.2 工程案例分析

该工程案例研究了在钛合金薄板上进行微纳制孔实验的可靠性稳健设计优化问题<sup>[55]</sup>. 实验过程包括 3 个可控变量: 给进速度  $x_1$  (mm/min)、轴速  $x_2$  (rpm) 和辅助气压  $x_3$  (bars). 假设各可控变量服从正态分布  $x_i \sim N(\mu_{x_i}, \sigma_{x_i})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 且设计容差和标准差分别为  $\delta_{x_i} = \pm 0.1\mu_{x_i}$  和  $\sigma_{x_i} = \delta_{x_i}/3$ , 可控变量因子水平如表 7 所示. 该过程的 3 个输出响应为: 推力  $y_1$  (N)、超切  $y_2$  ( $\mu\text{m}$ ) 和圆度  $y_3$  ( $\mu\text{m}$ ). 响应  $y_1$  表示制孔过程轴相推力, 为望目质量特性, 其目标值设置为 12.5. 同时较大的  $y_1$  易损坏钻头, 而较小的  $y_1$  又无法满足生产效率要求. 故为了保证生产过程的可靠度要求,  $y_1$  的可靠区间设置为  $y_1 \in [10, 15]$ . 响应  $y_2$  表示钻头半径和入孔半径之间的差, 为望小质量特性, 其目标值设置为 30. 较大的  $y_2$  易导致圆孔形状的不规则, 产生失效的不合格产品, 其可靠区间设置为  $y_2 \in [0, 45]$ . 响应  $y_3$  表示孔的最大内切圆直径与最小外接圆直径之间的差值, 为望小质量特性, 目标值设置为 20.  $y_3$  值越小, 产品的可靠度表现越好, 其可靠区间为  $y_3 \in [0, 38]$ .

表 7 可控变量因子水平

Table 7 Levels of controllable variables

可控变量	水平		
	-1	0	1
$x_1$	5	10	15
$x_2$	2 000	3 500	5 000
$x_3$	2	4	6

当响应落在指定区间之外时,将产生质量损失.同时,当失效概率大于 0 时,将产生相应的失效风险成本.因此,本实验的目的是在设计变量可行域内寻找一组最优输入参数设置,尽可能地减少风险成本和质量损失,以提升产品/过程的稳健性和可靠性.响应曲面模型是实现可靠性稳健设计优化的基础,其预测精度对所得最优输入参数设置的有效性至关重要.因此,本节采用主动学习建模方法,以提升模型的预测精度,进而改善所得最优解的稳健性和可靠性.首先,利用 SLHD 方法选取 5 个初始试验点;然后,利用算法 1 中所提主动学习方法分别对每个响应增加 10 个试验点,最终可获得 35 个训练样本点,试验结果如表 8 所示.为了说明该案例中输入参数对输出响应的影响,本文对输入—输出关系进行了敏感性分析.首先,使用表 8 中的试验数据拟合 MGP 模型;然后,采用随机抽样方法选取 200 个测试点,用于敏感性分析;最后,计算 Sobol 指数以衡量敏感性,结果见表 9.由表 9 可知,输入参数  $x_1$  对响应  $y_1$  和  $y_2$  的影响较大,对响应  $y_3$  的影响适中.输入参数  $x_2$  对响应  $y_1$  和  $y_2$  的影响较大,对响应  $y_3$  的影响相对较小.输入参数  $x_3$  对所有响应均有较为显著的影响.本案例所得 Sobol 指数的最小值为 0.098(输入参数  $x_2$  对响应  $y_3$  的影响).总体而言,表 9 中的 Sobol 指数整体较大,未出现小于常用阈值(0.01 或 0.05)的情形,表明该案例中各输入参数对输出响应均有较为明显的影响.另一方面,不同方法所得的 Sobol 指数虽略有不同,但相对大小与变化趋势基本一致,从而表明表 9 的敏感性分析结果具有良好的稳健性.针对该工程案例,构造极限状态函数如下

$$\begin{aligned} G_{y_1}^1(\boldsymbol{x}) &= y_1(\boldsymbol{x}) - 10 \\ G_{y_1}^2(\boldsymbol{x}) &= 15 - y_1(\boldsymbol{x}) \\ G_{y_2}(\boldsymbol{x}) &= 45 - y_2(\boldsymbol{x}) \\ G_{y_3}(\boldsymbol{x}) &= 38 - y_3(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{42}$$

其中  $y_p(\boldsymbol{x})$  为 MGP 模型的第  $p$  个响应.将模型输出代入 HLRF 算法求解式(42)的 MPP 点为  $(-0.03, -0.05, -0.03), (-0.72, -1, -0.63), (0.11, -0.18, 0.07), (-0.1, 0.08, 0.09)$ .根据式(36)构建风险成本函数

表 8 试验设计和结果  
Table 8 Experimental design and results

No.	输入变量			输出响应		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
1	-0.56	0.06	0.60	9.72	49.24	33.02
2	-0.74	0.25	0.43	9.46	52.11	32.55
3	0.17	-0.40	0.18	10.14	42.68	41.90
4	0.35	0.97	-0.25	7.90	52.94	38.78
5	0.85	-0.82	-0.72	10.42	41.06	61.39
6	-0.86	-0.98	-0.95	15.52	46.81	49.05
7	-0.98	0.81	-0.95	9.27	62.25	35.12
8	1.00	0.99	0.96	6.68	46.68	39.04
9	-0.95	-0.97	-0.35	14.54	44.56	44.39
10	0.93	0.98	-0.54	7.80	50.83	49.15
11	-0.36	-0.96	-0.93	14.36	45.07	50.95
12	-0.80	-0.84	-0.99	15.03	47.90	48.49
13	-0.84	-0.90	-0.47	14.32	45.19	44.87
14	-0.73	-0.97	-0.25	13.97	43.25	44.03
15	-0.50	-0.99	-0.85	14.60	44.96	49.59
16	0.88	-0.96	0.19	9.06	35.91	53.01
17	-0.99	0.82	-0.16	8.21	59.89	31.35
18	0.98	-0.92	0.90	7.94	33.89	47.32
19	0.99	-0.32	0.61	7.76	38.47	47.35
20	-0.91	0.90	-0.71	8.64	61.66	33.38
21	-0.92	0.76	-0.81	9.24	61.01	34.84
22	-0.96	0.73	-0.73	9.24	60.59	34.63
23	-0.83	0.95	-0.85	8.68	62.14	33.92
24	-0.95	0.67	-0.69	9.37	59.96	34.80
25	-0.93	0.86	-0.58	8.60	61.06	33.00
26	0.94	-0.59	-1.00	10.37	43.77	64.42
27	0.41	-0.73	-0.99	12.03	44.55	57.29
28	0.83	-0.78	-0.95	10.85	42.69	63.33
29	-0.67	0.86	0.94	7.42	56.84	27.49
30	0.58	-0.52	-0.98	11.19	45.27	57.89
31	0.93	-0.55	-0.94	10.24	43.71	63.25
32	0.93	0.29	-0.92	9.15	48.54	57.24
33	-0.93	0.04	0.98	9.78	50.94	31.65
34	0.92	-0.66	-0.93	10.39	42.98	63.72
35	0.84	-0.48	-0.91	10.36	44.24	60.95

$$RC(\boldsymbol{x}) = RC_1(\boldsymbol{x}) + RC_2(\boldsymbol{x}) + RC_3(\boldsymbol{x}) \tag{43}$$

其中  $\boldsymbol{T} = [12.5, 30, 20]$ .为了不失一般性,假设成本矩阵  $\boldsymbol{C}$  为

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.5 & 0.025 \\ 0.025 & 0.025 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{44}$$

表 9 敏感性分析 *Sobol* 指数  
Table 9 *Sobol* values of sensitivity analysis

参数	CM			DM			UM			PM		
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0.298	0.579	0.154	0.286	0.577	0.163	0.280	0.643	0.168	0.289	0.585	0.167
$x_2$	0.266	0.599	0.098	0.262	0.629	0.102	0.268	0.643	0.099	0.274	0.662	0.107
$x_3$	0.437	0.256	0.331	0.376	0.228	0.342	0.421	0.234	0.336	0.444	0.252	0.350

其中成本矩阵  $C$  中的值也可以由经济成本计算获得, 详见文献[56]. 结合风险成本函数和质量损失函数, 构造双目标优化模型式(38). 然后, 利用 MATLAB 工具箱中的多目标遗传算法进行全局寻优, 初始种群规模设置为 200, 其余参数保持默认. 本文将优化过程重复 20 次, 以分析遗传算法的稳定性和一致性, 优化结果如图 8 所示. 相较于 CM 方法和 UM 方法, DM 方法和 PM 方法 20 次优化所得 Pareto 前沿的相似度高, 表明它们在优化过程中的稳定性相对更好. 从优化角度看, 本文所提方法的

Pareto 前沿总体上更接近理想解, 表明其所得 Pareto 解集较其他方法更优. 因此, 本文方法获得了兼顾稳定性和有效性的 Pareto 解集. 为了进一步对比分析, 本文选择与理想解距离最近的 Pareto 解为最终的最优解. 然后, 以 20 次优化结果的预测偏差均值(预测响应和真实响应的偏差均值)、目标偏差均值(真实响应和目标值之间的距离均值)、质量损失的均值、风险成本的均值、95%置信区间(下限 CIL 和上限 CIU), 以及优化过程运算时间为指标, 对比各方法的性能, 结果见表 10.

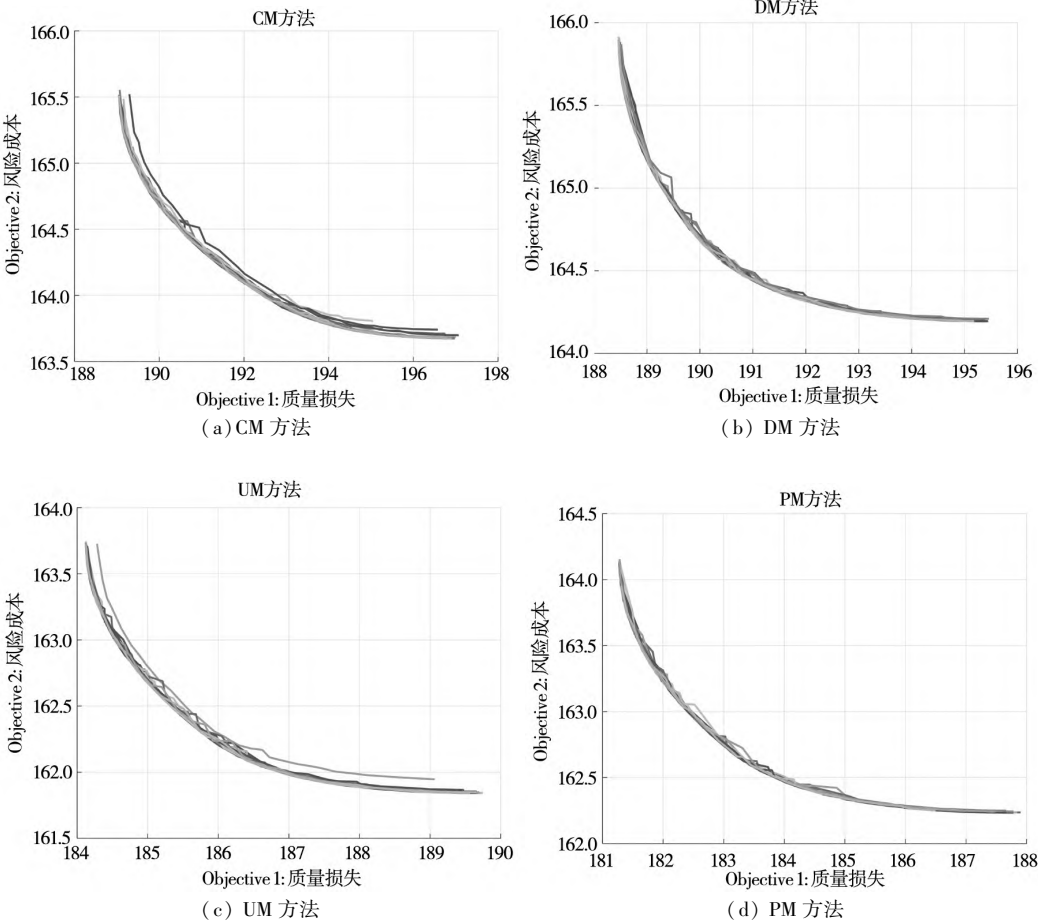


图 8 不同方法的 Pareto 前沿  
Fig. 8 Pareto fronts of different methods

表 10 20 次优化结果对比  
Table 10 Comparison of 20 optimization results

方法	时间	预测偏差均值			目标偏差均值			质量损失			风险成本		
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	均值	CIL	CIU	均值	CIL	CIU
CM	181	0.10	0.42	0.13	1.67	9.25	<b>16.31</b>	189.23	189.19	189.28	165.18	165.14	165.22
DM	<b>179</b>	0.07	0.59	0.07	1.40	8.74	16.61	188.72	188.66	188.78	165.41	165.36	165.47
UM	193	<b>0.02</b>	0.14	0.09	1.40	8.86	16.47	184.39	184.34	184.44	<b>163.18</b>	163.14	163.22
PM	185	0.09	<b>0.06</b>	<b>0.05</b>	<b>1.35</b>	<b>8.62</b>	16.43	<b>181.55</b>	<b>181.51</b>	<b>181.59</b>	163.57	<b>163.54</b>	<b>163.61</b>

如表 10 所示,四种方法 20 次优化的运算时间相差大不,其中单次优化所需平均时间最少的是 DM 方法(179s),所需平均时间最多是 UM 方法(193s).表 10 中的运算时间表明,四种方法在参数优化过程中的运算效率几乎相同.从响应预测偏差的角度分析,本文所提 PM 方法获得了响应  $y_2$  和  $y_3$  最小预测偏差均值,故本文方法所得最优解的响应  $y_2$  和  $y_3$  更接近它们的真实值,响应  $y_1$  则距离其真实值相对较远.从目标偏差均值的角度分析,PM 方法的真实响应值  $y_1$  和  $y_2$  距离其目标值更近,这也意味着它们距离失效边界相对较远,具有较好的稳健性和可靠性.虽然 PM 方法响应  $y_3$  的目标偏差均值不是所有方法中最小的,但与其与最小值最为接近.这符合多响应优化的 Pareto 特性,即可以找到一组折中的最优解,而不是每个响应都达到最优的状态.从质量损失的角度分析,PM 方法获得了表 10 中最小的质量损失均值( $QL=181.55$ ),表明本文方法获得了稳健性最佳的输入参数设置.从风险成本的角度分析,UM 方法获得了最小的失效风险成本均值( $RC=163.18$ ),表明该方法获得了可靠性最佳的输入参数设置.同时,本文 PM 方法的风险成本均值为 163.57,该值与 UM 方法所得结果非常接近,表明这两种方法所得最优解在风险成本优化方面的性能相近,且优于另外两种方法.此外,为了分析优化算法的性能,表 10 中给出了 20 次优化所得质量损失和风险成本的 95%置信区间.PM 方法的质量损失和风险成本的置信区间宽度相对更小,这表明本文方法的优化过程的稳定性优于其他方法.从 Pareto 性能的角度分析,本文所提 PM 方法获得了显著低于其他方法的质量损失均值,同时获得了与最小风险成本均值几乎相同的结果,这表明本文方法所得最优解的折中性能优于其他方法.综上,本文构建了考虑响应相关性的主动学习

MGP 模型,提升了试验点的利用效率,并获得了更为精确的响应曲面模型和导数预测模型,进而改善了优化结果的稳健性和可靠性.

5 讨 论

相较而言,本文方法在处理多响应的可靠性稳健设计优化问题时具有一些突出的优势.首先,本文方法构建了考虑响应之间相关性的 MGP 模型和偏导数预测模型,改善了输出响应和其导数值的预测精度,为构建 RBRDO 模型提供了更为有效的响应曲面.其次,本文方法构建了考虑输出响应和导数预测值的信息矩阵,并采用 SF 方法改善了 D-optimal 设计的空间填充性能,进一步提升了设计点的利用效率和模型的有效性.最后,本文方法构建了综合考虑质量损失和风险成本的优化模型,改善了最优解的稳健性和可靠性.综上,本文方法综合考虑了响应之间的相关性、质量损失以及风险成本对优化结果的影响,提出了基于主动学习 MGP 模型的 RBRDO 方法,获得了兼顾稳健性和可靠性的最优解.

本文方法除了具有上述的优点之外,也存在一些不足之处.本文方法通过构建协方差矩阵刻画响应之间的相关性,并通过主动学习策略构建响应曲面模型,相对复杂的模型结构和试验策略增加了一定的运算成本,如第 4 节所述.因此,在处理大量响应(如响应维度增加到 10 以上)的优化问题时,计算效率可能会成为限制本文方法适用性的关键因素.

6 结束语

针对产品质量改进中的多响应参数优化问题,本文综合考虑了质量损失、风险成本以及响应



之间相关性等因素,结合多输出高斯过程建模技术、主动学习算法、统计矩理论及多元质量损失函数,提出了一种具有主动学习能力的多响应可靠性稳健设计优化方法.首先,该方法在 MGP 模型中融入统计矩理论,提出一种新的响应曲面建模方法,实现了偏导数的回归预测.然后,本文改进了 DO 设计准则,构建了主动学习 MGP 建模策略,提升了模型的预测能力.最后,本文结合质量损失和风险成本建立 RBRDO 模型,以权衡优化结果的稳健性和可靠性,改善了最优输入参数设置的综合性能.仿真结果表明,本文方法获得了质量损失和风险成本之间最佳平衡点,提高了最优解的稳健性和可靠性.

本文方法有助于权衡多元质量特性之间的关系,减少过程变异性,从而提升产品质量的一致性和可靠性.该方法能有效处理工程实践中试验成本高、试验周期长、数据样本少等情形下的可靠性稳健设计优化问题,如航空航天领域、汽车工程领域、能源与核工程领域、生物医学与医疗工程领域等.此外,本文方法还可以应用到其他管理学领域的预测和优化中,如供应链的多环节优化和项目管理的多指标优化.需要指出的是,本文方法在建模过程中,没有考虑模型参数不确定性因素.若能利用贝叶斯方法量化参数不确定性对建模过程的影响,将能进一步提高优化结果的稳健性和可靠性.这将是下一步的主要研究内容.

## 参 考 文 献:

- [1] Shen L, Jun Y, Yu Z. An integration design optimization framework of robust design, axiomatic design, and reliability-based design[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2011, 27(7): 959–968.
- [2] 汪建均, 屠雅楠, 马义中. 结合 SUR 与因子效应原则的多响应质量设计[J]. *管理科学学报*, 2020, 23(12): 12–29.  
Wang Jianjun, Tu Yanan, Ma Yizhong. Multi-response quality design integrating SUR models with factorial effect principles [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2020, 23(12): 12–29. (in Chinese)
- [3] Ouyang L, Zhu S, Ye K, et al. Robust Bayesian hierarchical modeling and inference using scale mixtures of normal distributions[J]. *IIE Transactions*, 2022, 54(7): 659–671.
- [4] He Z, Han M, He S. Customised product design optimisation considering module synergy effects and expert preferences[J]. *International Journal of Production Research*, 2024, 63(1): 148–170.
- [5] Lv S, Zhao Y, Li S, et al. Robust parameter design for constrained randomization lifetime improvement experiments[J]. *Journal of Management Science and Engineering*, 2025, 10(1): 126–141.
- [6] Wang J, Chen J, Lan F, et al. An adaptive double-loop reliability-based design optimization method for solving structural nonlinear problems[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2025, (81): 103793.
- [7] Li H, Zhong T, Chen G, et al. Dynamic reliability-based robust design optimization for lead rubber bearings of girder bridges via direct probability integral method[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2025, 68(10): 1–20.
- [8] Datta G, Bhattacharjya S, Chakraborty S. Efficient reliability-based robust design optimization of structures under extreme wind in dual response surface framework[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(5): 2711–2730.
- [9] 彭茂林, 杨自春, 曹跃云, 等. 基于响应面法的可靠性稳健设计优化[J]. *航空动力学报*, 2013, 28(8): 1784–1790.  
Peng Maolin, Yang Zichun, Cao Yueyun, et al. Reliability robust design optimization based on response surface method [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(8): 1784–1790. (in Chinese)
- [10] Youn B D, Choi K K, Yang R J, et al. Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(3–4): 272–283.
- [11] Du X, Sudjianto A, Chen W. An integrated framework for optimization under uncertainty using inverse reliability strategy [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(4): 562–570.
- [12] Yadav O P, Bhamare S S, Rathore A. Reliability-based robust design optimization: A multi-objective framework using hy-

- brid quality loss function[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2010, 26(1): 27–41.
- [13] Shin J, Lee I. Reliability analysis and reliability-based design optimization of roadway horizontal curves using a first-order reliability method[J]. *Engineering Optimization*, 2015, 47(5): 622–641.
- [14] Yang Z, Ching J. A novel reliability-based design method based on quantile-based first-order second-moment[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, (88): 461–473.
- [15] Keshtegar B, Chakraborty S. An efficient-robust structural reliability method by adaptive finite-step length based on Armijo line search[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2018, (172): 195–206.
- [16] Meng Z, Kong L, Yi J, et al. Optimum-pursuing method for constrained optimization and reliability-based design optimization problems using Kriging model[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2024, (420): 116704.
- [17] 冯泽彪, 汪建均, 马义中. 基于多变量高斯过程模型的贝叶斯建模与稳健参数设计[J]. *系统工程理论与实践*, 2020, 40(3): 703–713.
- Feng Zebiao, Wang Jianjun, Ma Yizhong. Bayesian modeling and robust parameter design based on multivariate Gaussian process model[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2020, 40(3): 703–713. (in Chinese)
- [18] Lin W, Sung C L, Chen R. Category tree Gaussian process for computer experiments with many-category qualitative factors and application to cooling system design[J]. *Journal of Quality Technology*, 2024, 56(5): 391–408.
- [19] 崔庆安, 朱傲泉. 基于 GPR 的 3D 打印稳健性参数设计[J]. *工业工程与管理*, 2022, 27(5): 127–135.
- Cui Qingan, Zhu Aoquan. Research on robust parameter design of 3D printing based on GPR[J]. *Industrial Engineering and Management*, 2022, 27(5): 127–135. (in Chinese)
- [20] Hyeon J B, Chai L B. Reliability-based design optimization using a moment method and a Kriging metamodel[J]. *Engineering Optimization*, 2008, 40(5): 421–438.
- [21] Echard B, Gayton N, Lemaire M, et al. A combined importance sampling and Kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2013, (111): 232–240.
- [22] Wang P, Wang Z, Almaktoom A T. Dynamic reliability-based robust design optimization with time-variant probabilistic constraints[J]. *Engineering Optimization*, 2013, 46(6): 784–809.
- [23] Li M, Bai G, Wang Z. Time-variant reliability-based design optimization using sequential kriging modeling[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(3): 1051–1065.
- [24] 李宝玉, 张磊刚, 裘群海, 等. 基于 Kriging 模型梯度解析解的改进一次二阶矩方法[J]. *航空学报*, 2019, 40(5): 155–162.
- Li Baoyu, Zhang Leigang, Qiu Qunhai, et al. An advanced first order and second moment method based on gradient analytical solution of Kriging surrogate model[J]. *Acta Aeronauticae Astronautica Sinica*, 2019, 40(5): 155–162. (in Chinese)
- [25] 陆艺鑫, 吕震宙, 李恒朝. 可靠性寿命高效分析方法及在涡轮轴中的应用[EB/OL]. *航空学报*, DOI: <https://link.cnki.net/urlid/11.1929.v.20250811.1606.030>, 2025: 1–13.
- Lu Yixin, Lü Zhenzhou, Li Hengchao. Efficient method of reliability lifetime analysis and its application in turbine shaft [EB/OL]. *Acta Aeronauticae Astronautica Sinica*, DOI: <https://link.cnki.net/urlid/11.1929.v.20250811.1606.030>, 2025: 1–13. (in Chinese)
- [26] Hong F, Wei P, Fu J, et al. A sequential sampling-based Bayesian numerical method for reliability-based design optimization[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2024, (244): 109939.
- [27] Sauer A, Gramacy R B, Higdon D. Active learning for deep Gaussian process surrogates[J]. *Technometrics*, 2022, 65(1): 4–18.
- [28] Han M, Huang Q, Ouyang L, et al. A kriging-based active learning algorithm for contour estimation of integrated response with noise factors[J]. *Engineering with Computers*, 2023, 39(2): 1341–1362.
- [29] 王国东, 李晓阳. 模型不确定情况下的序贯加速寿命试验设计与分析[J]. *系统工程理论与实践*, 2025, 45(27): 2418–2432.

- Wang Guodong, Li Xiaoyang. Planning and analysis of sequential accelerated life tests under model uncertainty[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2025, 45(27): 2418–2432. (in Chinese)
- [30] Chen X, Zhou Q. Sequential design strategies for mean response surface metamodeling via stochastic kriging with adaptive exploration and exploitation[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 262(2): 575–585.
- [31] Feng Z, Wang J, Huang W. An active learning multi-objective robust optimization framework via Gaussian process models under uncertainty[EB/OL]. Engineering Optimization, DOI: <https://doi.org/10.1080/0305215X.2025.2495800>, 2025: 1–24.
- [32] 崔庆安, 崔楠. 试验设计及参数优化的 LS-SVR 显著性因子筛选[J]. 管理科学学报, 2023, 26(12): 42–61.  
Cui Qingan, Cui Nan. Significant factors screening of LS-SVR for experimental design and parameters optimization[J]. Journal of Management Sciences in China, 2023, 26(12): 42–61. (in Chinese)
- [33] Wang P, Zhang Z, Huang X, et al. An application of active learning Kriging for the failure probability and sensitivity functions of turbine disk with imprecise probability distributions[J]. Engineering with Computers, 2021, 38(4): 3417–3437.
- [34] Haghighat E, Raissi M, Moure A, et al. A physics-informed deep learning framework for inversion and surrogate modeling in solid mechanics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, (379): 113741.
- [35] Ko J, Kim H. Deep Gaussian process models for integrating multifidelity experiments with nonstationary relationships[J]. IJSE Transactions, 2022, 54(7): 686–698.
- [36] Ding L, Tuo R, Shahrampour S. A sparse expansion for deep Gaussian processes[J]. IJSE Transactions, 2023, 56(5): 559–572.
- [37] Gnanasambandam R, Shen B, Law A C C, et al. Deep Gaussian process for enhanced Bayesian optimization and its application in additive manufacturing[J]. IJSE Transactions, 2025, 57(4): 423–436.
- [38] Yan H, Sergin N D, Brenneman W A, et al. Deep multistage multi-task learning for quality prediction of multistage manufacturing systems[J]. Journal of Quality Technology, 2021, 53(5): 526–544.
- [39] Yue X, Wen Y, Hunt J H, et al. Active learning for Gaussian process considering uncertainties with application to shape control of composite fuselage[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2021, 18(1): 36–46.
- [40] Chen J, Kang L, Lin G. Gaussian process assisted active learning of physical laws[J]. Technometrics, 2021, 63(3): 329–342.
- [41] Williams C K I, Rasmussen C E. Gaussian Processes for Machine Learning[M]. Cambridge: MIT press, 2006.
- [42] Kleijnen J P C, Mehdad E. Multivariate versus univariate Kriging metamodels for multi-response simulation models[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(2): 573–582.
- [43] Fricker T E, Oakley J E, Urban N M. Multivariate Gaussian process emulators with nonseparable covariance structures[J]. Technometrics, 2013, 55(1): 47–56.
- [44] Svenson J D, Santner T J. Multiobjective optimization of expensive black-box functions via expected maximin improvement[J]. The Ohio State University, Columbus, Ohio, 2010, (32): 1–21.
- [45] Zafar T, Zhang Y, Wang Z, et al. An efficient Kriging based method for time-dependent reliability based robust design optimization via evolutionary algorithm[J]. Computer Methods in Applied Mechanics, 2020, (372): 113386.
- [46] Joseph V R. Space-filling designs for computer experiments: A review[J]. Quality Engineering, 2016, 28(1): 28–35.
- [47] Melchers R E, Beck A T. Structural Reliability Analysis and Prediction[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2018.
- [48] 张旭涛, 何桢. 基于似无关回归的多元稳健损失函数方法[J]. 数理统计与管理, 2017, 36(5): 802–809.  
Zhang Xutao, He Zhen. A robust loss function approach for multi-response optimization based on seemingly unrelated regressions[J]. Journal of Applied Statistics & Management, 2017, 36(5): 802–809. (in Chinese)
- [49] Wang J, Ma Y, Ouyang L, et al. A new Bayesian approach to multi-response surface optimization integrating loss function with posterior probability[J]. European Journal of Operational Research, 2016, 249(1): 231–237.
- [50] Sun G, Li G, Zhou S, et al. Crashworthiness design of vehicle by using multiobjective robust optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44(1): 99–110.
- [51] Qian P Z G. Sliced Latin hypercube designs[J]. Journal of the American Statistical Association, 2012, 107(497): 393–

399.

- [52] Guo B, Li X, Liu M, et al. Construction of orthogonal general sliced Latin hypercube designs[J]. Statistical Papers, 2023, 64(3): 987–1014.
- [53] Gibson L A, Liu F F, Harris T J, et al. Simple method for incorporating prior parameter information during model-based D-optimal design of experiments for multi-response chemical process models[J]. Industrial Engineering Chemistry Research, 2024, 63(24): 10651–10665.
- [54] Do B, Ohsaki M, Yamakawa M. Sequential mixture of Gaussian processes and saddlepoint approximation for reliability-based design optimization of structures[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 64(2): 625–648.
- [55] Prasanna J, Karunamoorthy L, Venkat Raman M, et al. Optimization of process parameters of small hole dry drilling in Ti-6Al-4V using Taguchi and grey relational analysis[J]. Measurement, 2014, (48): 346–354.
- [56] Ouyang L, Ma Y, Wang J, et al. A new loss function for multi-response optimization with model parameter uncertainty and implementation errors[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 258(2): 552–563.

## Reliability-based robust design optimization via an active learning multi-output Gaussian process model

FENG Ze-biao<sup>1</sup>, WANG Jian-jun<sup>2\*</sup>, MA Yan<sup>3</sup>

1. School of Management, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China;
2. School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;
3. School of Management Science and Engineering, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China

**Abstract:** For multi-response quality improvement, this paper proposes a multi-response reliability-based robust design optimization (RBRDO) within an active learning multi-output Gaussian process (MGP) modeling framework. First, an active learning response surface modeling approach based on an improved D-optimal design is developed to enhance the utilization of experimental design points. Second, a covariance structure that captures correlations is specified to build the MGP, the expressions of its predictive partial derivatives are derived, and a risk cost function is formulated based on first-order second-moment theory. Then, a multivariate quality loss function is defined from the MGP outputs, upon which a parameter optimization model is established. Finally, a genetic algorithm is used to obtain the Pareto solution set, and the shortest distance method is applied to determine the optimal solution. Simulation results indicate that the proposed method effectively characterizes correlations among responses, improves the predictive accuracy of both the response surface and derivative prediction models, and yields optimal input parameter settings that balance robustness and reliability.

**Key words:** multi-output Gaussian process model; active learning; reliability-based robust design optimization; quality loss; risk cost