

doi: 10.19920/j.cnki.jmsc.2026.06.010

# 基于隔夜高频信息和跳跃的期权定价模型<sup>①</sup>

梁方<sup>1</sup>, 杜灵珊<sup>2</sup>, 黄卓<sup>3\*</sup>

(1. 中山大学国际金融学院, 珠海 519082; 2. 北京大学光华管理学院, 北京 100871;  
3. 北京大学国家发展研究院、北京大学中国经济研究中心, 北京 100871)

**摘要:** 及时反映非交易时段的风险波动是有效防范和化解金融风险面临的关键问题, 研究标的资产隔夜波动率如何影响期权定价对促进多层次资本市场健康发展具有重要意义. 本研究通过对隔夜波动率、日内波动率与跳跃行为联合建模, 提出了新的离散时间期权定价模型 Bisected Affine Realized Volatility and Jump (BARVJ), 通过傅里叶逆变换推导了欧式期权定价公式的解析解, 使用 S&P 500 指数和 S&P 500 E-mini 期货 2007 年—2022 年的 1 min 数据和 90 816 个期权样本, 实证检验了 BARVJ 模型和基准模型集的期权定价效果. 本研究发现, 通过考虑隔夜高频信息和跳跃, BARVJ 模型降低了 19.99% 的期权定价误差. 对于期限较长的期权和金融市场的高波动时期, BARVJ 模型的改进更为显著.

**关键词:** Bisected Affine Realized Volatility and Jump; 隔夜“隐含价格”; 跳跃; 欧式期权定价解析解  
**中图分类号:** F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2026)06-0135-21

## 0 引言

在金融资产价格变化过程中, 市场隔夜时段 (overnight period) 对应的资产价格波动发挥日益重要的作用<sup>[1-5]</sup>. 金融资产隔夜价格波动重要性的大幅提升对研究隔夜资产价格的时变特征提出了迫切需求. 已有研究为隔夜信息对股票收益率和波动率的作用提供了大量实证支持. 股票价格对隔夜信息的反应集中体现在开盘价, 而基于开盘价计算的日度收益率的波动率往往高于收盘价得到的日度收益率波动率<sup>[4, 6-8]</sup>. 另外, 在交易时段, 股票收益率的波动率高于非交易时段<sup>[9-12]</sup>. 上述研究记载了不同时间段的收益率各自的时间变化特征, 进一步地, 这些时间变化特征反映出的隔夜信息已经被广泛地运用于预测资产价格波动率<sup>[2, 5, 13]</sup>和风险管理<sup>[14]</sup>当中.

股票是期权的主要标的资产, 隔夜信息通过影响标的资产的收益率和波动率进一步作用于期权价格. 目前, 检验隔夜信息对期权价格影响的研究比较有限. Jones 和 Shemesh<sup>[15]</sup>认为缺少对标的资产非交易时段的股票收益率的准确建模是普遍存在的期权定价误差的来源, 大量期权定价领域的研究应该考虑隔夜时段的影响. Boes 等<sup>[16]</sup>将标的资产的隔夜价格变化视为一个单独的跳跃过程, 发现标的资产隔夜价格对解释期权价格具有重要作用, 隔夜跳跃占总跳跃风险的 25%. 该文开启了隔夜信息在期权定价中的应用, 为隔夜信息在期权定价中的重要性提供了直接的实证支持. Wang 等<sup>[17]</sup>将日度波动率分为隔夜波动率与日内波动率两部分, 发现对隔夜波动率单独建模的 HNG-ARV 模型相比只考虑日度波动率的 ARV 模型的定价误差减少了 20.27%, 隔夜信息能够

① 收稿日期: 2022-10-06; 修订日期: 2024-06-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(72101278; 72271010; 72241418); 广东省哲学社会科学规划资助项目(GD25YYJ15); 中国国家留学基金资助项目(202406380098); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目(23YJC790034).

通讯作者: 黄卓(1978—), 男, 湖北武汉人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: zhuohuang@nsd.pku.edu.cn

显著提升期权定价的准确性。上述考虑隔夜价格对期权定价影响的文献均只使用开盘价和收盘价这两个观测值来构造隔夜收益率和波动率,无法精确刻画隔夜时段标的资产价格的时间变化过程。

伴随着高频金融数据的广泛应用,已有研究提出了一系列使用高频数据构建的金融波动率的已实现测度,包括已实现方差(realized variance<sup>[18]</sup>)、已实现双幂次变差(realized bipower variation<sup>[19]</sup>)、已实现核估计(realized kernel<sup>[20]</sup>)等。与使用开盘价和收盘价两个观测值构造的波动率相比,上述使用分时或分笔高频数据构建的已实现测度的信息含量更大,对金融波动率的测算更准确,可以实时、精确地提取和运用金融市场风险波动的信号。已有研究为已实现测度在金融资产价格波动率的建模和预测、期权定价中的巨大优越性提供了大量实证证据<sup>[21-35]</sup>。本研究使用24 h交易的衍生品的高频数据,根据衍生品价格与标的资产价格的理论关系,在隔夜时段由衍生品价格反推出标的资产的“隐含价格”。在此基础上,构造标的资产隔夜波动率的已实现测度。隔夜高频“隐含价格”包含大量隔夜信息,能够精确刻画标的资产隔夜价格的时间变化规律,提高期权定价的准确性。

此外,标的资产价格大幅变动将导致标的资产收益率的跳跃,从而影响标的衍生品的定价<sup>[36-48]</sup>。已有研究将收益率分为跳跃与扩散两个部分,建立了Jump-Diffusion模型,并广泛用于期权定价<sup>[41,42,49,50]</sup>。Feunou和Tédongap<sup>[51]</sup>讨论含跳跃的随机波动率模型与考虑条件偏度的随机波动率模型的关系。Christoffersen等<sup>[52]</sup>在日度Heston-Nandi GARCH模型中分离出波动率的跳跃部分,允许波动率的跳跃与连续部分服从不同的动态过程;实证结果表明,与未考虑跳跃的GARCH模型相比,DVCJ模型<sup>②</sup>的期权定价误差减少了3.3%,DVSDJ模型<sup>③</sup>减少了45.4%。随着高频数据可得性的提升,Christoffersen等<sup>[29]</sup>参考Barndorff-

Nielsen和Shephard<sup>[19]</sup>构造了连续波动率与跳跃波动率的实证测度(Realized Bipower Variation, Realized Jump Variation),建立具有解析形式期权定价公式的BPJVM模型。Pan等<sup>[53]</sup>沿用Christoffersen等<sup>[29]</sup>对跳跃过程的设定,将波动率的连续部分拆分为好的波动率(good volatility)与坏的波动率(bad volatility),该期权定价模型相比仅将波动率拆分为好的波动率与坏的波动率的GSARV模型<sup>[54]</sup>,定价准确度改进了9.85%,而相比考虑了跳跃波动率的BPJVM模型仅改进3.85%,可见其改进主要来源于对跳跃建模的贡献。已有研究为标的资产价格的跳跃在期权定价中的重要作用提供了扎实的实证支持,在此基础上,本研究根据上述文献分离连续与跳跃波动率的理论基础,建立了包含隔夜连续波动率、日内连续波动率与日度跳跃波动率的期权定价模型,该模型能够有效捕捉隔夜时段可能存在的跳跃现象及其风险溢价,刻画隔夜跳跃对期权定价的影响,提高期权定价的灵敏性。

本研究的边际贡献主要体现在以下方面:首先,对标的资产隔夜连续波动率、日内连续波动率与日度跳跃波动率联合建模,提出了新的离散时间期权定价模型Bisected Affine Realized Volatility and Jump (BARVJ),该模型能够反映标的资产隔夜和日内波动率表现的特有动态规律,非交易时段和交易时段标的资产市场信息对期权价格的动态影响和传导机制,以及隔夜和日内时段可能存在的跳跃现象及其风险溢价;第二,在BARVJ模型的基础上,本研究推导了欧式期权定价公式的解析解,为期权定价提供新的方法。通过考虑隔夜高频价格与跳跃过程,能够降低19.99%的期权定价误差;第三,根据衍生品价格与标的资产价格的理论关系,本研究由24 h交易的衍生品的高频价格推出标的资产隔夜“隐含价格”,构造标的资产隔夜波动率的已实现测度,精确刻画标的资产隔夜价

② Dynamic Volatility Constant Jump 模型,该模型将日度跳跃视为常数。

③ Dynamic Volatility Stochastic Dynamic Jump 模型。

格的时间变化,实时反映标的资产隔夜市场信息对期权价格的动态影响;第四,BARVJ 框架通过综合考虑非交易时段和交易时段的市场信息,对金融资产价格变化的刻画更贴近市场规律,更加精确地提取和运用金融市场风险波动的信号。

### 1 收益率与已实现测度

下面从理论基础和实证构造两个角度阐述资产价格的隔夜和日内收益率与波动率的构造方法,并对由上述方法构造的收益率与已实现测度序列进行描述性统计分析,为构建期权定价模型奠定基础。

#### 1.1 连续波动率与跳跃波动率

资产价格服从如下的跳跃扩散过程 (Jump-Diffusion Process) [19]。

$$d \log(S_t) = \sqrt{V_t} dW_t + J_t dq_t \quad (1)$$

其中  $\sqrt{V_t} dW_t$  刻画扩散部分,  $dW_t$  为标准布朗运动的微分形式,  $\sqrt{V_t}$  为波动率。  $J_t dq_t$  刻画跳跃部分,  $dq_t$  为泊松过程的微分形式,  $J_t$  为跳跃强度。

对式(1)两边同时平方并积分,可得

$$RV_t \rightarrow \int_{t-1}^t V_s ds + \int_{t-1}^t J_s^2 dq_s \quad (2)$$

即已实现波动率 ( $RV_t$ ) 由连续和跳跃两部分构成。已实现二次变差

$$RBV_t \rightarrow \int_{t-1}^t V_s ds \quad (3)$$

衡量波动率的连续部分,已实现跳跃波动率

$$RJV_t \equiv RV_t - RBV_t \rightarrow \int_{t-1}^t J_s^2 dq_s \quad (4)$$

衡量波动率的跳跃部分。

#### 1.2 隔夜波动率、日内波动率和跳跃波动率的已实现测度

本研究使用 S&P 500 指数 (SPX) 和 S&P 500 E-mini 期货 (ES) 的 1 min 高频交易数据计算波动率的已实现测度,数据来源为 Tick Data 和 FirstRate Data。根据 Patton 和 Sheppard [55]、Feunou 和 Okou [54] 等构造已实现二次变差。

$$RV_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2}{\sum_{i=1}^T \widetilde{RV}_i} \widetilde{RV}_{t+1} \quad (5)$$

$$RBV_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2}{\sum_{i=1}^T \widetilde{RV}_i} \widetilde{RBV}_{t+1} \quad (6)$$

$$RBV_{CO,t+1} = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2}{\sum_{i=1}^T \widetilde{RV}_i} \widetilde{RBV}_{CO,t+1} \quad (7)$$

$$RBV_{OC,t+1} = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2}{\sum_{i=1}^T \widetilde{RV}_i} \widetilde{RBV}_{OC,t+1} \quad (8)$$

其中

$$\widetilde{RV}_{t+1} = \frac{1}{5} \sum_{j=0}^4 \sum_{i=1}^{\frac{z}{5}} R_{t+\frac{j+5i}{z}}^2 \quad (9)$$

$$\widetilde{RBV}_{t+1} = \frac{\mu}{5} \sum_{j=0}^4 \sum_{i=1}^{\frac{z}{5}-1} |R_{t+\frac{j+5i}{z}}| |R_{t+\frac{j+5i+5}{z}}| \quad (10)$$

$$\widetilde{RBV}_{CO,t+1} = \frac{\mu}{5} \sum_{j=0}^4 \sum_{i=1}^{\frac{z}{5}-1} |R_{t+\frac{j+5i}{z}}| |R_{t+\frac{j+5i+5}{z}}| \times 1(\{R_{t+\frac{j+5i}{z}}, R_{t+\frac{j+5i+5}{z}}\} \subset \{R_{CO,k,t+1}\}) \quad (11)$$

$$\widetilde{RBV}_{OC,t+1} = \frac{\mu}{5} \sum_{j=0}^4 \sum_{i=1}^{\frac{z}{5}-1} |R_{t+\frac{j+5i}{z}}| |R_{t+\frac{j+5i+5}{z}}| \times 1(\{R_{t+\frac{j+5i}{z}}, R_{t+\frac{j+5i+5}{z}}\} \subset \{R_{OC,k,t+1}\}) \quad (12)$$

$\bar{\mu} = \frac{\pi}{2} z$  表示交易日的 1 min 高频数据的观测值

个数,  $\bar{R}$  表示样本期间日度对数收益率的平均值,  $R_{CO,k,t+1}$  与  $R_{OC,k,t+1}$  表示交易日  $t+1$  的非交易时间段 (close-to-open period, CO) 与交易时间段 (open-to-close period, OC) 的高频收益率,  $1$  为示性函数。根据 Barndorff-Nielsen 和 Shephard [19], 计算已实现跳跃波动率

$$RJV_{t+1} = (RV_{t+1} - RBV_{t+1})^+ \quad (13)$$

#### 1.3 收益率与波动率的时间变化特征

图 1 展示了日度总波动率、不同时间段的波动率、波动率的连续和跳跃部分的时间变化趋势。在 2008 年—2009 年金融危机期间波动率达到高峰,

在新冠疫情爆发期间再次出现高峰. 对比图 1( a) 和图 1( b) , 在两次高峰期间 , 已实现跳跃波动率约占已实现波动率的 30% , 与 Maheu 和 McCurdy<sup>[56]</sup> 的结果一致<sup>④</sup>. 对比隔夜波动率与日内波动率序列 2008 年—2009 年期间 ,  $RV_{CO}$  的峰值低于  $RV_{OC}$  , 在 2020 年 ,  $RV_{CO}$  的峰值高于  $RV_{OC}$  ,

可见隔夜波动率在日度波动率中的占比提高 , 隔夜高频信息的重要性逐渐凸显. 进一步地 , 隔夜波动率与日内波动率遵循各自的动态过程. 整体上 ,  $RV_{CO}$  ( 图 1( c) ) 相比  $RV_{OC}$  ( 图 1( d) ) 呈现更高频次的跳跃. 这为本研究对非交易时段的跳跃建模提供了实证支持.

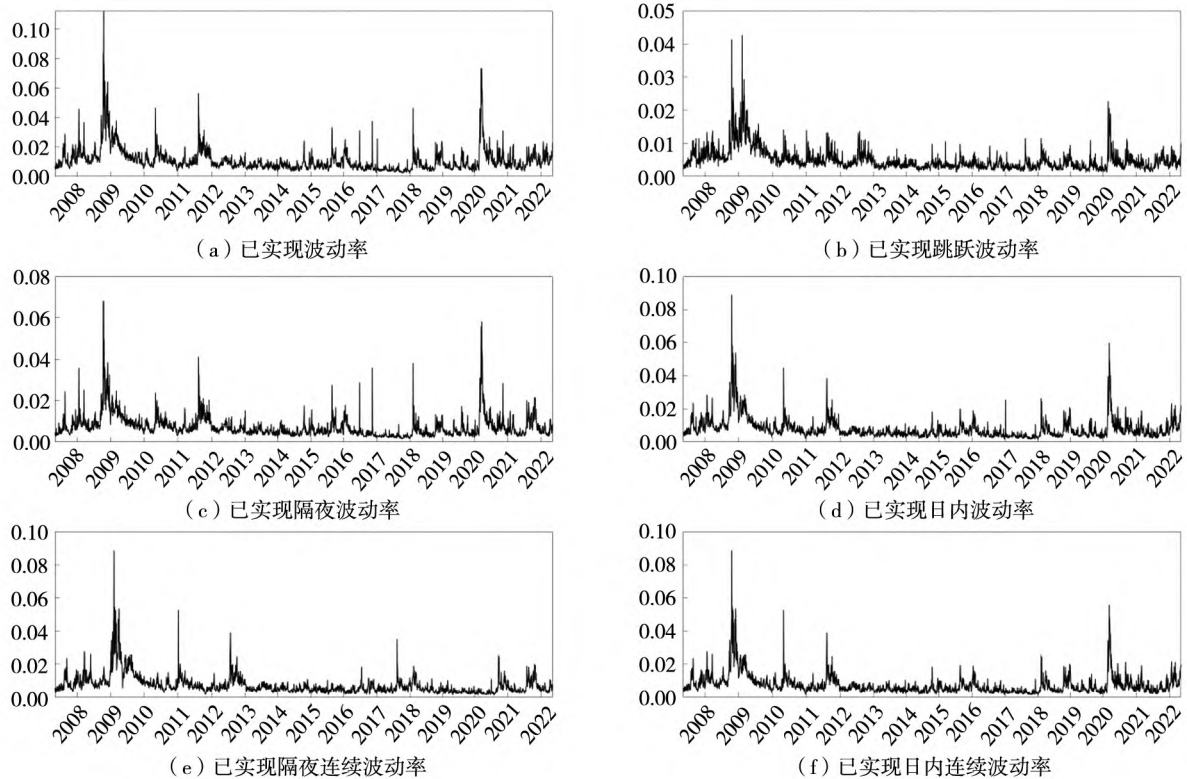


图 1 收益率与已实现波动率的时间序列

Fig. 1 Time series of returns and realized volatilities

注: 图( a) ~图( f) 纵轴展示了  $\sqrt{RV_t}$ 、 $\sqrt{RJV_t}$ 、 $\sqrt{RV_{CO,t}}$ 、 $\sqrt{RV_{OC,t}}$ 、 $\sqrt{RBV_{CO,t}}$  和  $\sqrt{RBV_{OC,t}}$  的时间序列. 横轴为年份. 样本区间为 2007 年 5 月 1 日—2022 年 5 月 1 日. 数据来源于 FirstRate Data 和 Tick Data.

波动率聚集性( volatility clustering) 是金融资产价格变化的特征事实. 图 2 报告了收益率的平方和已实现方差的自回归系数. 整体而言 , 所有序列的 60 阶内的自回归系数均落在 Bartlett  $\pm 2$  倍标准误以外 , 而已实现测度的自回归系数较高 , 更好地描述了波动率的持续性( volatility persistence) . 此外 , 对比图 2( d) 、图 2( e) 、图 2( f) 可以发现  $RJV$  的长期自相关性最强( 60 阶自相关系数仍高于

0. 2) , 为本研究对跳跃波动率的动态过程单独建模提供了实证依据.

表 1 报告了各序列的描述性统计结果 , 收益率和波动率均为年化值. 结果显示 , 收益率的一阶自回归系数为负 , 波动率的则均为正 , 与已有研究发现一致<sup>[53, 54]</sup>. 隔夜与日内波动率体现了不同的动态特征 , 隔夜波动率的一阶自回归系数( 0. 67) 小于日内波动率的相应值( 0. 72) , 即日内波动率具有更高的持续性.

④ Maheu 和 McCurdy<sup>[56]</sup> 考虑了跳跃波动率的持续性与杠杆效应.

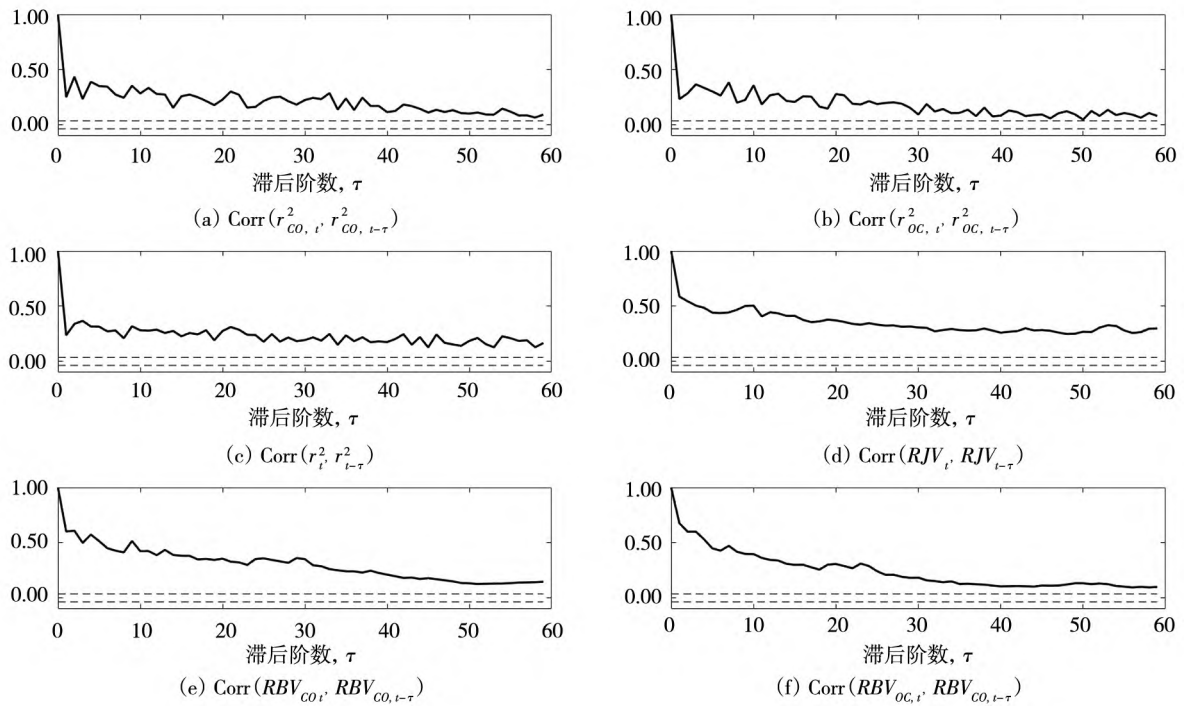


图 2 序列自回归系数图

Fig. 2 Autoregression coefficients of series

注: 图 (a) ~ 图 (f) 分别报告了  $r_{CO}^2, r_{OC}^2, r^2, RJV, RBV_{CO}, RBV_{OC}$  的自回归系数, 虚线表示 Bartlett  $\pm 2$  倍标准误. 样本区间为 2007 年 5 月 1 日—2022 年 5 月 1 日, 数据来源为 Tick Data 与 FirstRate Data.

表 1 收益率与已实现波动率序列的描述性统计

Table 1 Summary statistics of series of returns and realized volatilities

收益率与已实现波动率序列的描述性统计						
序列	平均值 / %	中位数 / %	标准差 / %	偏度	峰度	AR(1)
日度收益率	4.884 3	29.139 0	23.266 0	-0.347 6	9.499 9	-0.143 6
隔夜收益率	2.654 0	14.935 9	16.438 6	-0.470 4	13.852 1	-0.155 5
日内收益率	2.230 3	15.073 9	16.113 3	-0.480 6	11.828 9	-0.106 4
隔夜连续波动率	11.359 7	8.707 1	9.171 3	3.893 3	30.148 1	0.667 5
日内连续波动率	11.738 3	8.996 0	9.527 3	3.897 2	28.958 9	0.717 9
跳跃波动率	7.815 1	6.457 1	5.108 1	3.215 0	22.028 9	0.620 1

注: 表 1 报告了年化收益率和年化波动率的描述性统计量. 其中样本平均值、中位数和标准差表示为百分比, AR(1) 表示一阶自回归系数. 样本区间为 2007 年 5 月 1 日—2022 年 5 月 1 日.

## 2 模型

BARVJ 模型是一个包含收益率 ( $R_t$ )、隔夜已实现连续波动率 ( $RBV_{CO,t}$ )、日内已实现连续波动率 ( $RBV_{OC,t}$ ) 和已实现跳跃波动率 ( $RJV_t$ ) 的期权定价模型. 其中隔夜和日内连续波动率服从 Af-fine Realized Volatility (ARV) 过程, 该模型设定能

精确预测标的资产价格波动率, 具有解析形式的期权定价公式.

### 2.1 收益率方程

BARVJ 模型的收益率方程可表示为

$$R_{t+1} = r_f + \left( \lambda_{CO} - \frac{1}{2} \right) h_{CO,t} + \left( \lambda_{OC} - \frac{1}{2} \right) h_{OC,t} + (\lambda_y - \xi) h_{y,t} + z_{t+1} + y_{t+1} \quad (14)$$

其中  $R_{t+1}$  为交易日  $t+1$  的日度收益率,  $r_f$  为无风

险利率,  $z_{t+1}$  是连续部分的异方差随机项, 由隔夜随机项和日内随机项构成

$$z_{t+1} = z_{CO,t+1} + z_{OC,t+1} \tag{15}$$

隔夜随机项和日内随机项可以表示为

$$z_{CO,t+1} = \sqrt{h_{CO,t}} \varepsilon_{1,CO,t+1} \tag{16}$$

$$z_{OC,t+1} = \sqrt{h_{OC,t}} \varepsilon_{1,OC,t+1}$$

$h_{CO,t}$  和  $h_{OC,t}$  是隔夜和日内时段的条件方差,  $\varepsilon_{1,CO,t+1}$  和  $\varepsilon_{1,OC,t+1}$  服从二元联合正态分布,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,CO,t+1} \\ \varepsilon_{1,OC,t+1} \end{pmatrix} \text{i. i. d.} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{17}$$

上述分布意味着

$$\text{Corr}(\varepsilon_{1,CO,t+1}, \varepsilon_{1,OC,t+1}) = 0 \tag{18}$$

对于跳跃部分, 根据已有研究<sup>[29, 36, 52, 53]</sup>, 日度收益率中的跳跃过程为复合泊松过程, 即

$$y_{t+1} = \sum_{j=0}^{n_{t+1}} x_{t+1}^j x_{t+1}^j \text{i. i. d.} \sim \mathcal{N}(\theta, \delta^2) \tag{19}$$

其中跳跃频率  $n_{t+1}$  服从以下泊松分布

$$n_{t+1} \sim Ps(h_{y,t}) \tag{20}$$

这表明  $\mathbb{E}_t[n_{t+1}] = h_{y,t}$ , 即跳跃波动率将决定下一交易日的跳跃频率的平均水平.

综上可得, 日度收益率向前一期的条件期望为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(R_{t+1}) &= r_f + \left(\lambda_{CO} - \frac{1}{2}\right)h_{CO,t} + \\ &\quad \left(\lambda_{OC} - \frac{1}{2}\right)h_{OC,t} + (\lambda_y - \xi + \theta)h_{y,t} \end{aligned} \tag{21}$$

可见  $\mathbb{E}_t(R_{t+1})$  是隔夜连续波动率  $h_{CO,t}$ 、日内连续波动率  $h_{OC,t}$  以及跳跃波动率  $h_{y,t}$  的线性组合. 其中  $\xi$  为跳跃风险补偿参数 (jump compensator parameter)<sup>[29]</sup>, 由模型中的待估参数  $\theta$  与  $\delta$  表示<sup>⑤</sup>

$$\xi = e^{\theta + \frac{1}{2}\delta^2} - 1 \tag{22}$$

这一设定保证了

$$\mathbb{E}_t(\exp(R_{t+1})) = \exp\left(\begin{matrix} r_f + \lambda_{CO} h_{CO,t} + \\ \lambda_{OC} h_{OC,t} + \\ \lambda_y h_{y,t} \end{matrix}\right) \tag{23}$$

$\lambda_{CO}$  以及  $\lambda_{OC}$  分别衡量隔夜连续波动率、日内连续

波动率以及跳跃波动率的风险补偿 (或风险价格<sup>[28]</sup>). 式 (23) 的指数仿射形式一方面反映了超额收益是承担风险所得到的补偿, 另一方面为后文推导指数仿射形式的条件矩生成函数, 进而推导期权定价解析解奠定了数学基础.

同理, 假设隔夜、日内和跳跃波动率之间不相关, 可以得到日度收益率向前一期的条件方差

$$\text{VAR}_t(R_{t+1}) = h_{CO,t} + h_{OC,t} + (\theta^2 + \delta^2)h_{y,t} \tag{24}$$

### 2.2 测量方程

根据 Hansen 等<sup>[26]</sup>、Christoffersen 等<sup>[29]</sup>、Fenuou 和 Okou<sup>[54]</sup> 等, 为描述已实现测度  $RBV_{CO,t}$ ,  $RBV_{OC,t}$  对波动率潜变量的度量关系, 本研究给出以下测量方程

$$\begin{aligned} RBV_{CO,t+1} &= h_{CO,t} + \\ &\quad \sigma_{CO} \left[ \frac{(\varepsilon_{2,CO,t+1} - \gamma_{CO} \sqrt{h_{CO,t}})^2}{(1 + \gamma_{CO}^2 h_{CO,t})} - \right] \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} RBV_{OC,t+1} &= h_{OC,t} + \\ &\quad \sigma_{OC} \left[ \frac{(\varepsilon_{2,OC,t+1} - \gamma_{OC} \sqrt{h_{OC,t}})^2}{(1 + \gamma_{OC}^2 h_{OC,t})} - \right] \end{aligned} \tag{26}$$

其中  $\varepsilon_{2,CO,t+1}$  和  $\varepsilon_{2,OC,t+1}$  为独立同分布的标准正态分布随机项, 即

$$\varepsilon_{2,m,t+1} \text{i. i. d.} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad m \in \{CO, OC\} \tag{27}$$

这意味着

$$\text{Corr}(\varepsilon_{2,CO,t+1}, \varepsilon_{2,OC,t+1}) = 0 \tag{28}$$

BARVJ 模型考虑了同一个交易日的同一时段内 (同为非交易时段或同为交易时段) 一阶矩和二阶矩的随机项之间的相关性, 具体地,

$$\text{Corr}(\varepsilon_{1,m,t+1}, \varepsilon_{2,m,t+1}) = \rho_m \quad m \in \{CO, OC\} \tag{29}$$

对于跳跃部分, 根据 Christoffersen 等<sup>[29]</sup>、Pan 等<sup>[53]</sup>,  $RJV_{t+1}$  由每一次跳跃的平方加总得到

$$RJV_{t+1} = \sum_{j=0}^{n_{t+1}} (x_{t+1}^j)^2 \tag{30}$$

根据泊松分布的性质, 可得

$$\mathbb{E}_t(RJV_{t+1}) = (\theta^2 + \delta^2)h_{y,t} \tag{31}$$

⑤ 因此, 本研究并未在实证过程中将  $\xi$  作为待估参数.

### 2.3 波动率的动态方程

根据 Christoffersen 等<sup>[28]</sup>、Christoffersen 等<sup>[29]</sup>、Feunou 和 Okou<sup>[54]</sup>, BARVJ 模型设定连续波动率  $h_{CO,t}$ ,  $h_{OC,t}$  与跳跃波动率  $h_{y,t}$  服从以下动态过程

$$h_{CO,t+1} = w_{CO} + b_{CO} h_{CO,t} + a_{CO} RBV_{CO,t+1} \quad (32)$$

$$h_{OC,t+1} = w_{OC} + b_{OC} h_{OC,t} + a_{OC} RBV_{OC,t+1} \quad (33)$$

$$h_{y,t+1} = w_y + b_y h_{y,t} + a_y RJV_{t+1} \quad (34)$$

已实现测度  $RBV_{CO}$ 、 $RBV_{OC}$  与  $RJV$  在动态方程中更新潜变量的时间变化. 将式(25)、式(26)分别代入式(27)、式(28), 可得

$$\begin{aligned} h_{m,t+1} &= w_m + b_m h_{m,t} + a_m RBV_{m,t+1} \\ &= (w_m - a_m \sigma_m) + \\ &\quad (b_m + a_m - a_m \sigma_m \gamma_m^2) h_{m,t} + \\ &\quad a_m \sigma_m (\varepsilon_{2,m,t+1} - \gamma_m \sqrt{h_{m,t}}) \end{aligned} \quad (35)$$

其中  $m \in \{CO, OC\}$ . 令

$$\omega_m = w_m - a_m \sigma_m$$

$$\beta_m = b_m + a_m - a_m \sigma_m \gamma_m^2$$

$$\alpha_m = a_m \sigma_m$$

以及

$$\omega_y = w_y, \beta_y = b_y, \alpha_y = a_y$$

则 BARVJ 模型中波动率的动态方程可表示为

$$\begin{aligned} h_{CO,t+1} &= \omega_{CO} + \beta_{CO} h_{CO,t} + \\ &\quad \alpha_{CO} (\varepsilon_{2,CO,t+1} - \gamma_{CO} \sqrt{h_{CO,t}}) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} h_{OC,t+1} &= \omega_{OC} + \beta_{OC} h_{OC,t} + \\ &\quad \alpha_{OC} (\varepsilon_{2,OC,t+1} - \gamma_{OC} \sqrt{h_{OC,t}}) \end{aligned} \quad (37)$$

$$h_{y,t+1} = \omega_y + \beta_y h_{y,t} + \alpha_y RJV_{t+1} \quad (38)$$

其中  $\gamma_m$  刻画了杠杆效应 (leverage effect), Christoffersen 和 Jacobs<sup>[58]</sup> 为杠杆效应对期权定价样本外表现具有显著贡献提供了实证证据.

## 3 物理测度估计

### 3.1 似然函数

本研究使用拟极大似然估计法 (quasi maximum likelihood estimation, QMLE) 估计  $\mathbb{P}$  测度下的模型系数. 由全概率公式

$$f_t(R_{t+1}, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}, RJV_{t+1}) =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} f_t(R_t, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}, RJV_{t+1} | n_{t+1} = j) = \\ &\sum_{j=0}^{\infty} f_t(R_t, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}, RJV_{t+1} | n_{t+1} = j) \times \\ &\quad \text{Prob}(n_{t+1} = j) \end{aligned} \quad (39)$$

根据 Poisson 分布的分布函数

$$\text{Prob}(n_{t+1} = j) = \frac{e^{-h_{y,t}} h_{y,t}^j}{j!} \quad (40)$$

参考 Christoffersen 等<sup>[29]</sup> 和 Pan 等<sup>[53]</sup>, 本研究将观测日分为发生了跳跃和未发生跳跃两种情形, 可得

$$\begin{aligned} &f_t(R_{t+1}, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}, RJV_{t+1} | n_{t+1} = j) \\ &= \begin{cases} f_t(R_{t+1}, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}), & j = 0 \\ f_t(j), & j > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

具体地

$$\begin{aligned} f_t(R_{t+1}, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\Sigma_{0,t}}} \times \\ &\exp\left(-\frac{1}{2} (X_{0,t+1} - \mu_{0,t})' \Sigma_{0,t}^{-1} (X_{0,t+1} - \mu_{0,t})\right), \\ f_t(j) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\Sigma_{j,t}}} \times \\ &\exp\left(-\frac{1}{2} (X_{j,t+1} - \mu_{j,t})' \Sigma_{j,t}^{-1} (X_{j,t+1} - \mu_{j,t})\right) \end{aligned} \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} X_{0,t+1} &= [R_{t+1}, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}]', \\ X_{j,t+1} &= [R_{t+1}, RBV_{CO,t+1}, RBV_{OC,t+1}, RJV_{t+1}]', \\ \mu_{j,t} &= \mathbb{E}_t[X_{j,t+1} | n_{t+1} = j], \\ \mu_{0,t} &= \mathbb{E}_t[X_{0,t+1} | n_{t+1} = 0], \\ \Sigma_{j,t} &= \text{VAR}_t[X_{j,t+1} | n_{t+1} = j], \\ \Sigma_{0,t} &= \text{VAR}_t[X_{0,t+1} | n_{t+1} = 0]. \end{aligned}$$

因此 似然函数为

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}_P &= \sum_{t=1}^{T-1} \log f_t(R_{t+1}, RBV_{CO,t+1}, \\ &\quad RBV_{OC,t+1}, RJV_{t+1}) \end{aligned} \quad (43)$$

### 3.2 给定跳跃次数下的条件矩

为计算似然函数, 需要首先计算给定  $n_{t+1}$  时的条件矩. 根据模型设定, 条件期望如下

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[R_{t+1} | n_{t+1}] &= r_f + \left(\lambda_{CO} - \frac{1}{2}\right) h_{CO,t} + \\ &\left(\lambda_{OC} - \frac{1}{2}\right) h_{OC,t} + (\lambda_y - \xi) h_{y,t} + \theta n_{t+1} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_t [RBV_{m,t+1} | n_{t+1}] = h_{m,t}$$

$$\mathbb{E}_t [RJV_{t+1} | n_{t+1}] = (\theta^2 + \delta^2) h_{y,t} \quad (44)$$

条件方差

$$\text{VAR}_t [RBV_{m,t+1} | n_{t+1}] = 2\sigma_m^2(1 + 2\gamma_m^2 h_{m,t})$$

$$\text{VAR}_t [RJV_{t+1} | n_{t+1}] = 2\delta^2(\delta^2 + 2\theta^2) n_{t+1} \quad (45)$$

条件协方差

$$\text{COV}_t [R_{t+1} RBV_{m,t+1} | n_{t+1}] = -2\rho_m \gamma_m \sigma_m h_{z,t}$$

$$\text{COV}_t [R_{t+1} RJV_{t+1} | n_{t+1}] = 2\theta\delta^2 n_{t+1}$$

$$\text{COV}_t [RBV_{m,t+1} RJV_{t+1} | n_{t+1}] = 0$$

$$\text{COV}_t [RBV_{CO,t+1} RBV_{OC,t+1} | n_{t+1}] = 0 \quad (46)$$

其中  $m \in \{CO, OC\}$ .

### 3.3 嵌套模型

BARVJ 框架能够同时刻画隔夜和日内资产价格的不同动态过程以及价格跳跃行为,十分灵活. BARVJ 框架具有多种嵌套模型,不考虑资产价格的跳跃行为时,可以简化为 BARV 模型(bi-sected affine realized volatility model). BARVJ 也可以容纳多个已有期权定价模型,例如 ARV-HNG 模型<sup>[17]</sup>、BPJVM 模型(bipower variation and jump variation model<sup>[29]</sup>)、ARV 模型(affine realized volatility model<sup>[28]</sup>)与 HNG 模型(Heston-Nandi GARCH<sup>[57]</sup>).

#### 3.3.1 BARV 模型

在 BARVJ 框架下,不考虑跳跃波动率  $h_{y,t}$ ,可以得到 BARV 模型. BARV 模型能够使用高频信息更新隔夜和日内资产价格的不同动态过程,具有简洁的模型结构和较少的待估参数. BARV 模型的测量方程如下

$$RV_{CO,t+1} = [(\varepsilon_{2,CO,t+1} - \gamma_{CO} \sqrt{h_{CO,t}})^2 - (1 + \gamma_{CO}^2 h_{CO,t})] \quad (47)$$

$$RV_{OC,t+1} = [(\varepsilon_{2,OC,t+1} - \gamma_{OC} \sqrt{h_{OC,t}})^2 - (1 + \gamma_{OC}^2 h_{OC,t})] \quad (48)$$

其中  $RV_{CO,t+1}$  与  $RV_{OC,t+1}$  使用高频数据计算,其度量包括了波动率的连续和跳跃部分, BARV 模型不单独对跳跃波动率建模.

#### 3.3.2 ARV-HNG 模型

不考虑隔夜时段的高频信息,仅使用隔夜

收益率信息更新隔夜波动率的动态过程时,可以得到 ARV-HNG 模型. 因此, ARV-HNG 模型的隔夜波动率不具有测量方程,也不具有二阶矩的随机扰动项  $\varepsilon_{2,CO,t}$ ,隔夜波动率的动态方程如下

$$h_{CO,t+1} = \omega_{CO} + \beta_{CO} h_{CO,t} + \alpha_{CO} (\varepsilon_{1,CO,t} - \gamma_{CO} \sqrt{h_{CO,t}})^2 \quad (49)$$

#### 3.3.3 BPJVM 模型

仅考虑日度波动率的时间变化和价格的跳跃行为,不考虑隔夜和日内波动率各自的动态过程,可得 BPJVM 模型. 在 BPJVM 模型的收益率方程中,日度收益率是无风险利率 ( $r_f$ )、连续波动率 ( $h_{z,t}$ )、跳跃波动率 ( $h_{y,t}$ ) 和随机项 ( $z_{t+1}$  与  $y_{t+1}$ ) 的线性组合

$$R_{t+1} = r_f + \left(\lambda_z - \frac{1}{2}\right) h_{z,t} + (\lambda_y - \xi_y) h_{y,t} + z_{t+1} + y_{t+1} \quad (50)$$

对应地,测量方程可以表示为

$$RBV_{t+1} = h_{z,t} + \sigma [(\varepsilon_{t+1} - \gamma \sqrt{h_{z,t}})^2 - (1 + \gamma^2 h_{z,t})] \quad (51)$$

$$RJV_{t+1} = \sum_{j=0}^{n_{t+1}} (x_{t+1}^j)^2 \quad (52)$$

其中  $RBV$  与  $RJV$  的度量均不考虑非交易时段. BPJVM 模型的波动率动态方程也使用已实现测度更新条件波动率的时间变化

$$h_{z,t+1} = \omega_z + \beta_z h_{z,t} + \alpha_z RBV_{t+1} \quad (53)$$

$$h_{y,t+1} = \omega_y + \beta_y h_{y,t} + \alpha_y RJV_{t+1} \quad (54)$$

#### 3.3.4 ARV 模型

若不考虑资产价格跳跃行为的独立动态过程,仅考虑日度波动率的时间变化,可以得到 ARV 模型. 此时,日度收益率是无风险利率、日度波动率 ( $h_t$ ) 和随机项线性组合

$$R_{t+1} = r_f + \lambda h_t - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} \varepsilon_{1,t+1} \quad (55)$$

测量方程可以表示为

$$RV_{t+1} = h_t + \sigma [(\varepsilon_{2,t+1} - \gamma \sqrt{h_t})^2 - (1 + \gamma^2 h_t)] \quad (56)$$

$h_t$  的动态方程为

$$h_{t+1} = \omega + \beta h_t + \alpha (\varepsilon_{2,t+1} - \gamma \sqrt{h_t})^2 \quad (57)$$

3.3.5 HNG 模型

在 ARV 模型的基础上,剔除高频信息,可以得到 HNG 模型. HNG 模型的收益率方程与 ARV 模型相同,波动率方程为

$$h_{t+1} = \omega + \beta h_t + \alpha (\varepsilon_t - \gamma \sqrt{h_t})^2 \quad (58)$$

由于 HNG 模型不使用已实现测度作为条件波动率时间变化的更新项, HNG 模型无测量方程.

3.4 物理测度估计结果

表 2 报告了 BARVJ 模型与基准模型集的参数估计结果. 估计结果显示,所有模型的波动率风

险溢价均为正,与已有研究的发现一致. 其中, BARVJ 模型估计得到的隔夜连续波动率的风险溢价较高(  $\lambda_{CO} = 2.9389$  ), 日内连续波动率的风险溢价次之(  $\lambda_{OC} = 1.0797$  ), 最后是日度跳跃波动率的风险溢价(  $\lambda_y = 0.4699$  ). 已有文献<sup>[46, 59]</sup>的测算结果为跳跃波动率的风险溢价提供了证据. BARVJ 模型使用非交易时段的高频信息,更好地捕捉了资产价格在隔夜时段的跳跃行为,从而准确地识别了交易日的跳跃风险溢价.

表 2 物理测度估计结果

Table 2 Estimation results under physical measure

参数	BARVJ		BARV		ARV-HNG		BPJVM	ARV	HNG
	CO	OC	CO	OC	CO	OC	—	—	—
$\lambda_{ARV}$	2.938 9 (1.530 3)	1.079 7 (0.491 2)	2.518 7 (1.171 6)	1.008 0 (0.058 6)	4.956 8 (2.999 6)	0.025 9 (0.035 9)	2.366 8 (6.52E-05)	1.834 7 (0.776 6)	0.296 9 (1.088 3)
$\omega_{ARV}$	-5.89E-06	-1.54E-06	-7.44E-06	-2.83E-06	—	-2.37E-06	1.17E-08	-7.85E-06	—
$\beta_{ARV}$	4.19E-06 (1.57E-06)	4.00E-06 (2.50E-07)	3.96E-06 (1.40E-06)	4.00E-06 (4.00E-08)	—	4.78E-06 (3.52E-07)	0.245 1 (0.091 1)	3.53E-06 (7.65E-07)	—
$\gamma_{ARV}$	411.657 3 (40.718 2)	564.946 9 (24.816 6)	366.502 0 (18.440 8)	533.103 3 (1.499 7)	—	533.144 4 (11.685 4)	71 600.712 2 (6 547.988 3)	356.598 3 (8.094 7)	—
$\alpha_{ARV}$	5.90E-06 (1.17E-06)	3.06E-06 (2.70E-07)	7.44E-06 (8.32E-07)	3.46E-06 (4.42E-08)	—	3.46E-06 (1.45E-07)	0.754 8 (0.038 9)	7.86E-06 (3.49E-07)	—
$\sigma$	8.98E-06 (8.20E-07)	4.79E-06 (8.06E-08)	1.09E-05 (1.32E-06)	5.41E-06 (4.24E-08)	—	5.41E-06 (1.50E-07)	3.70E-08 (6.90E-09)	1.21E-05 (3.48E-07)	—
$\omega_R$	—	—	—	—	-8.82E-07	—	—	—	-5.51E-07
$\beta_R$	—	—	—	—	0.938 7 (0.010 3)	—	—	—	0.814 5 (0.018 5)
$\gamma_R$	—	—	—	—	116.048 5 (21.710 7)	—	—	—	115.286 0 (11.678 4)
$\alpha_R$	—	—	—	—	1.99E-06 (2.56E-07)	—	—	—	9.57E-06 (1.04E-06)
$\rho$	0.207 8 (0.106 2)	0.163 0 (0.023 3)	0.192 3 (0.045 6)	0.149 7 (0.048 3)	—	0.150 1 (0.022 0)	0.448 2 (0.013 6)	0.241 9 (0.015 5)	—
$\lambda_y$	0.469 9	—	—	—	—	—	0.000 3	—	—
$\theta$	0.000 3 (3.47E-06)	—	—	—	—	—	0.000 3 (3.96E-05)	—	—
$\delta$	0.018 8 (0.000 1)	—	—	—	—	—	0.003 9 (2.81E-05)	—	—
$\omega_y$	2.14E-09	—	—	—	—	—	0.050 7	—	—
$\beta_y$	0.663 2 (0.049 3)	—	—	—	—	—	0.974 3 (0.011 2)	—	—
$\alpha_y$	125.411 7 (27.876 5)	—	—	—	—	—	302.640 0 (48.599 4)	—	—
$\mathbb{E}[\bar{h}_z]$	7.07E-05	6.37E-05	8.50E-05	6.98E-05	3.21E-05	6.98E-05	1.17E-04	1.55E-04	1.55E-04
$\mathbb{E}[\bar{h}_y]$	2.04E-05	—	—	—	—	—	3.75E-05	—	—
$\mathcal{L}$	90 471	—	80 475	—	55 219	—	62 898	34 684	9 830

注: 括号内为标准误. 样本区间为 2007 年 5 月 1 日—2022 年 5 月 1 日.

根据 BARVJ 模型设定,无条件波动率  $\mathbb{E}[h_{m,t}]$ 、 $\mathbb{E}[h_{y,t}]$  和波动率持续性  $Persist_m$ 、 $Persist_y$  的测度可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h_{m,t}] &= \frac{\omega_m + \alpha_m}{1 - (\beta_m + \alpha_m \gamma_m^2)} \\ &= \frac{\omega_m + \alpha_m}{1 - Persist_m} \quad m \in \{CO, OC\} \\ \mathbb{E}[h_{y,t}] &= \frac{(\theta^2 + \delta^2) \omega_y}{1 - (\beta_y + (\theta^2 + \delta^2) \alpha_y)} \\ &= \frac{(\theta^2 + \delta^2) \omega_y}{1 - Persist_y} \end{aligned} \quad (59)$$

对于 BPJVM 模型,无条件波动率和波动率持续性的测度为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h_{z,t}] &= \frac{\omega_z}{1 - (\beta_z + \alpha_z)} = \frac{\omega_z}{1 - Persist_z} \\ \mathbb{E}[h_{y,t}] &= \frac{(\theta^2 + \delta^2) \omega_y}{1 - (\beta_y + (\theta^2 + \delta^2) \alpha_y)} \\ &= \frac{(\theta^2 + \delta^2) \omega_y}{1 - Persist_y} \end{aligned} \quad (60)$$

同理可得其他基准模型的相应测度. 根据表 2 的估计结果,所有模型的波动持续性均在 0.9 以上. 另外,表 2 倒数第二行、第三行报告的无条件波动率的结果反映出各模型迭代得到的潜变量

数量级相似, BPJVM 模型的跳跃波动率比连续波动率的数量级小,与 Christoffersen 等<sup>[52]</sup>、Christoffersen 等<sup>[29]</sup>、Pan 等<sup>[53]</sup> 等的发现一致.

加入跳跃波动率动态方程后,对市场数据的拟合程度大幅提升. BARVJ 模型中,隔夜方程的参数  $\beta_{CO}$  等和跳跃方程的参数  $\theta$ 、 $\delta$ 、 $\beta_y$  等均显著异于 0,可见对隔夜信息和跳跃行为单独建模的必要性. BARVJ 模型的隔夜波动率方程与日内波动率方程估计系数的异质性反映了隔夜与日内波动率具有不同的动态特征<sup>[17]</sup>. 另外,表 2 中所有模型系数  $\gamma$  与  $\rho$  的估计结果均显著为正,体现出杠杆效应的稳健性.

图 3 展示了各模型条件波动率潜变量的样本内拟合序列. 具体而言,左列的模型未单独考虑隔夜波动率动态过程,依次汇报了: HNG 模型的潜变量  $\sqrt{h}$ 、ARV 模型的潜变量  $\sqrt{h}$  和 BPJVM 模型的潜变量  $\sqrt{h_z}$  的样本内拟合序列; 右列的模型均考虑了隔夜与日内波动率不同的动态过程,汇报了 ARV-HNG 模型、BARV 模型以及 BARVJ 模型的潜变量  $\sqrt{h_{CO}}$  和  $\sqrt{h_{OC}}$  的样本内拟合序列. 其中  $\sqrt{h_{CO}}$ 、 $\sqrt{h_{OC}}$  分别由黑色实线和灰色阴影表示.

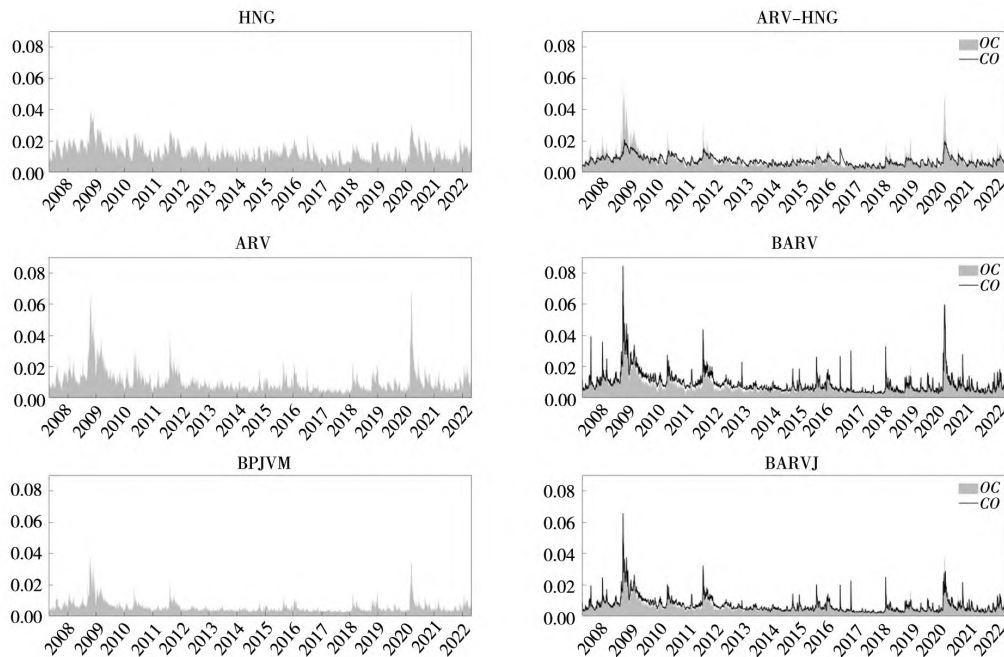


图 3 波动率的样本内拟合序列  
Fig. 3 In-sample fitted volatilities

注: 上图报告的时间序列均为基于表 2 参数估计的样本内拟合结果,横轴为年份. 其中左列的 HNG 模型与 ARV 模型报告  $\sqrt{h}$  序列, BPJVM 模型报告了  $\sqrt{h_z}$  即连续波动率; 右列的 ARV-HNG 模型、BARV 模型与 BARVJ 模型分别报告了隔夜波动率  $\sqrt{h_{CO}}$  与日内波动率  $\sqrt{h_{OC}}$ , 分别由黑色实线和灰色阴影表示.

图 3 左列中, ARV 模型与 BPJVM 模型的波动率序列特征较为相似, 二者均有明显高峰: 在 2008 年—2009 年金融危机期间以及 2020 年, 与图 1 的规律一致. HNG 模型的波动率序列持续处于较低水平, 这与 Christoffersen 等<sup>[29]</sup> 的估计结果相符<sup>⑥</sup>, 可见高频信息的重要性. 右列三个单独考虑隔夜波动率动态过程的模型也体现了类似的特征: ARV-HNG 模型的隔夜波动率序列稳定保持较低水平, 而包含隔夜高频信息的 BARV 与 BARVJ 模型的隔夜波动率序列均呈现出对市场变化更高的灵敏性. 对比 BARV 模型与 BARVJ 模型, 2008 年—2009 年金融危机期间, 隔夜波动率与日内波动率、隔夜连续波动率与日内连续波动率的水平相当; 在 2020 年, 隔夜波动率与日内波动率的峰值相近, 但隔夜连续波动率的高峰明显低于日内连续波动率的高峰, 这意味着 2020 年的隔夜波动率高峰由跳跃波动率主导. 近年来, 隔夜波动率中跳跃成分的重要性逐渐增加, 与图 1 相符.

### 4 期权定价

本节使用 BARVJ 模型进行期权定价. 首先, 推导  $\mathbb{P}$  测度下的矩生成函数 (moment generating function, MGF) 给出基于 BARVJ 模型的定价核 (pricing kernel) 完成模型的风险中性化, 得出  $\mathbb{Q}$  测度下的 BARVJ 模型. 接着通过傅里叶逆变换得到期权定价公式的解析解. 最后, 使用收益率序列、已实现测度序列和期权数据集进行联合估计, 与基准模型集进行比较, 检验 BARVJ 模型样本外定价表现.

#### 4.1 物理测度下的矩生成函数

基于 BARVJ 模型, 本研究证明  $\mathbb{P}$  测度下的向前一期联合条件矩生成函数具有以下形式

$$\mathbb{E}_t \left[ \exp \left( \frac{u R_{t+1} + v_{CO} h_{CO,t+1} + v_{OC} h_{OC,t+1} + v_y h_{y,t+1}}{v_{CO} h_{CO,t+1} + v_y h_{y,t+1}} \right) \right] = \exp \left( \frac{A_{CO}(u, v_{CO}) h_{CO,t} + A_{OC}(u, v_{OC}) h_{OC,t} + A_J(u, v_J) h_{y,t} + B(u, v_{CO}, v_{OC})}{v_{CO} h_{CO,t+1} + v_y h_{y,t+1}} \right) \quad (61)$$

其中  $R_{t+1}$  为收益率,  $h_{CO,t+1}$ 、 $h_{OC,t+1}$ 、 $h_{y,t+1}$  分别为

隔夜连续波动率、日内连续波动率与跳跃波动率, 上式的证明过程与  $A_{CO}$ 、 $A_{OC}$  和  $A_J$  的具体表达式详见附录<sup>⑦</sup>.

$\mathbb{P}$  测度下的向前一期条件矩生成函数具有指数仿射形式, 这为后文推导解析形式的期权定价公式提供重要基础. 同理, 本研究证明向前多期联合条件矩生成函数具有以下形式

$$\Psi_{t,t+M} = \exp \left( \frac{A_{CO}(u, v_{CO}(u, M)) h_{CO,t} + A_{OC}(u, v_{OC}(u, M)) h_{OC,t} + A_J(u, v_J(u, M)) h_{y,t} + B(u, v_{CO}(u, M), v_{OC}(u, M))}{v_{CO} h_{CO,t+1} + v_y h_{y,t+1}} \right) \quad (62)$$

其中  $M$  表示到期期限, 证明详见附录<sup>⑧</sup>.

#### 4.2 风险中性测度的转换

根据 Christoffersen 等<sup>[60]</sup>, 本研究采用以下指数仿射形式的定价核对物理测度下的模型进行风险中性化

$$\zeta_{t+1} = \frac{\exp \left( \frac{v_{1,CO,t} \varepsilon_{1,CO,t+1} + v_{2,CO,t} \varepsilon_{2,CO,t+1} + v_{1,OC,t} \varepsilon_{1,OC,t+1} + v_{2,OC,t} \varepsilon_{2,OC,t+1} + v_{3,t} \sum_{j=0}^{n_{t+1}} x_{t+1}^j}{v_{3,t} \sum_{j=0}^{n_{t+1}} x_{t+1}^j} \right)}{\mathbb{E}_t \left[ \exp \left( \frac{v_{1,CO,t} \varepsilon_{1,CO,t+1} + v_{2,CO,t} \varepsilon_{2,CO,t+1} + v_{1,OC,t} \varepsilon_{1,OC,t+1} + v_{2,OC,t} \varepsilon_{2,OC,t+1} + v_{3,t} \sum_{j=0}^{n_{t+1}} x_{t+1}^j}{v_{3,t} \sum_{j=0}^{n_{t+1}} x_{t+1}^j} \right) \right]} \quad (63)$$

为保持  $\mathbb{Q}$  测度下的 BARVJ 模型具有仿射性质, 根据 Christoffersen 等<sup>[52]</sup>、Christoffersen 等<sup>[29]</sup> 等, 做出以下设定, Christoffersen 等<sup>[29]</sup> 指出此类设定是模型保持仿射性质的充分必要条件

$$\begin{aligned} v_{2,m,t} + v_{1,m,t} \rho_m - \gamma_m \sqrt{h_{m,t}} &= -\gamma_m^* \sqrt{h_{m,t}} \\ v_{3,t} &= v_3 \end{aligned} \quad (64)$$

其中  $m \in \{CO, OC\}$ .

由此, 得到  $\mathbb{Q}$  测度下的 BARVJ 模型

$$R_{t+1} = r_f - \frac{1}{2} h_{CO,t} - \frac{1}{2} h_{OC,t} - \xi^* h_{y,t} +$$

⑥ Christoffersen 等<sup>[29]</sup> 的图 4 展示了 GARCH 模型、RVM 模型、JVM 模型与 BPJVM 模型所提取的波动率序列. 其中不含高频信息的 GARCH 模型的波动率序列未呈现明显高峰, 而基于其余三个含高频信息的模型所提取的波动率序列均表现出对金融危机的高度敏感性.

⑦ 附录以备索方式提供, 感兴趣的读者可向作者索取.

⑧ 附录以备索方式提供, 感兴趣的读者可向作者索取.

$$\begin{aligned}
& z_{CO,t+1}^* + z_{OC,t+1}^* + y_{t+1} \\
RBV_{CO,t+1} &= h_{CO,t}^* + \sigma_{CO} \left[ \varepsilon_{2,CO,t+1}^* - \gamma_{CO} \sqrt{h_{CO,t}} \right]^2 - \\
& \quad (1 + \gamma_{CO}^2 h_{CO,t}^*) \\
RBV_{OC,t+1} &= h_{OC,t}^* + \sigma_{OC} \left[ \varepsilon_{2,OC,t+1}^* - \gamma_{OC} \sqrt{h_{OC,t}} \right]^2 - \\
& \quad (1 + \gamma_{OC}^2 h_{OC,t}^*) \\
RJV_{t+1} &= \sum_{j=0}^{n_{t+1}} (x_{t+1}^j)^2 \\
h_{CO,t+1} &= \omega_{CO} + \beta_{CO} h_{CO,t} + \\
& \quad \alpha_{CO} (\varepsilon_{2,CO,t+1}^* - \gamma_{CO} \sqrt{h_{CO,t}})^2 \\
h_{OC,t+1} &= \omega_{OC} + \beta_{OC} h_{OC,t} + \\
& \quad \alpha_{OC} (\varepsilon_{2,OC,t+1}^* - \gamma_{OC} \sqrt{h_{OC,t}})^2 \\
h_{y,t+1} &= \omega_y + \beta_y h_{y,t} + \alpha_y RJV_{t+1} \tag{65}
\end{aligned}$$

其中  $\varepsilon_{1,m,t+1}^*$  和  $\varepsilon_{2,m,t+1}^*$  是Q测度下的随机项，

$$\begin{aligned}
h_{y,t}^* &= e^{\theta v_3 t + \frac{1}{2} \delta^2 v_3^2 t} h_{y,t} \\
\theta^* &= \theta + \delta^2 v_3 \\
\xi^* &= e^{\theta^* + \frac{1}{2} \delta^2} - 1
\end{aligned}$$

推导过程详见附录⑨。

### 4.3 期权定价公式

欧式看涨期权价格可以表示为

$$e^{-r_f M} \mathbb{E}_t^Q [\max(S_{t+M} - K, 0)] \tag{66}$$

其中  $S_{t+M}$  表示到期日当天的标的资产价格， $K$  表示执行价格。

求解 Q测度下  $S_t$  的分布是推导定价公式解析形式的关键。换言之，给定  $t$  时刻标的资产价格，需研究累计收益率的分布，而后者可以由前述推导的 Q测度下的向前多期条件联合矩生成函数反推得到。由此可得命题 1。

**命题 1** (基于 BARVJ 模型的欧式期权定价公式)：在  $t$  时刻，将于  $t + M$  时刻到期的欧式看涨期权价格为

$$C = S_t P_1(t, M) - \exp(-r_f M) K P_2(t, M) \tag{67}$$

其中

$$\begin{aligned}
P_1(t, M) &= \frac{1}{2} + \\
& \int_0^{+\infty} \Re \Re \left[ \frac{\Psi_{t,t+M}^Q(1+iu) \exp(-r_f M - iu \log(\frac{K}{S_t}))}{\pi i u} \right] du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(t, M) &= \frac{1}{2} + \\
& \int_0^{+\infty} \Re \Re \left[ \frac{\Psi_{t,t+M}^Q(iu) \exp(-iu \log(\frac{K}{S_t}))}{\pi i u} \right] du \tag{68}
\end{aligned}$$

$S_t$  为  $t$  时刻标的资产的价格， $K$  为执行价格， $r_f$  为无风险利率， $M$  为到期期限， $\Re \Re(\cdot)$  为实部。同参数的欧式看跌期权价格可由期权平价公式 (Put-Call Parity) 得到。

证明 主要思路为对 Q测度下的矩生成函数进行傅里叶逆变换，证明过程详见附录⑩。

### 4.4 联合估计

#### 4.4.1 联合估计方法

隐含波动率均方根误差 (implied volatility root mean squared error, IVRMSE) 被广泛用于衡量期权定价误差<sup>[28, 29, 53, 54, 61]</sup>。Renault<sup>[62]</sup> 通过比较多种衡量期权定价误差的指标，为 IVRMSE 的合理性与准确性提供了大量证据。根据上述文献，本研究计算 IVRMSE 用于评价不同模型的期权定价实证表现。首先，将按照期权定价公式得到的期权价格  $C_n^{MOD}$  与参数集合  $\{S_n, M_n, K_n, r_f\}$  代入 Black-Scholes 期权定价公式，得到模型隐含波动率  $IV_n^{MOD}$

$$IV_n^{MOD} = BSM^{-1}(C_n^{MOD})$$

其中  $n$  表示第  $n$  个期权。接着，通过期权的市场价格  $C_n^{MKT}$  得到基于市场价格的市场隐含波动率  $IV_n^{MKT}$

$$IV_n^{MKT} = BSM^{-1}(C_n^{MKT})$$

最后，利用 RMSE 的定义式计算模型隐含波动率与市场隐含波动率之间的均方根误差，得到 IVRMSE

$$IVRMSE \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (IV_n^{MOD} - IV_n^{MKT})^2}$$

使用 IVRMSE 构造似然函数要求期权价格非负<sup>[28]</sup>，否则无法通过 Black-Scholes 期权定价公式反推隐含波动率，已有文献通常的做法是采用 Vega 加权的均方根差 (VWRMSE) 构造似然函数

⑨ 以备索方式提供，感兴趣的读者可向作者索取。

⑩ 以备索方式提供，感兴趣的读者可向作者索取。

$$VWRMSE \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_n^2}$$

$$\equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \frac{C_n^{MKT} - C_n^{MOD}}{BSV_n^{MKT}} \right)^2}$$

其中  $BSV_n^{MKT}$  表示 Black-Scholes Vega, 即期权价格对市场波动率的一阶导数. 由此得出刻画期权定价误差的对数似然函数  $\log \mathcal{L}_o$

$$\log \mathcal{L}_o \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \ln(VWRMSE^2) + \frac{e_n^2}{VWRMSE^2} \right\} \quad (69)$$

本研究进行联合估计的似然函数如下

$$\max \log \mathcal{L}_p + \log \mathcal{L}_o \quad (70)$$

其中  $\log \mathcal{L}_p$  为波动率模型的似然函数. 联合似然函数能从隔夜时段、日内时段、资产价格跳跃行为、期权观测值等多时段、多特征、多市场的数据中估计 BARVJ 模型的参数, 更好地反映多层次资本市场联动交易的真实规律.

#### 4.4.2 期权数据

本研究使用 S&P 500 期权的日度数据, 与 S&P 500 指数收益率、波动率的已实现测度等序列进行联合估计. 期权数据来自 OptionMetrics 数据库, 样本区间为 2007 年 5 月 2 日—2019 年 12 月 18 日.

根据 Christoffersen 等<sup>[28]</sup>、Pan 等<sup>[53]</sup> 等, 对期权数据进行清洗和处理. 具体地, 保留周三和周四的期权数据, 剔除隐含波动率缺失或当天交易量为 0 的观测值. 计算买价与卖价的均值, 以此作为期权当天的市场价格. 在此基础上, 剔除市场价小于 5 美元的期权. 保留到期期限位于 15 d ~ 180 d 且剔除  $S/K < 0.7$  或  $S/K > 1.3$  的期权, 由此, 剔除了到期期限过长或过短、深度虚值或实值的期权. 接着, 根据交易量对每个交易日内的各个到期

期限与执行价格的集合  $\{S, K, M\}$  进行组内排序, 仅保留排名前六的期权, 由此筛选出流动性充分且市场价格合理的期权. 最后, 通过期权平价公式将看跌期权的价格转换为对应的看涨期权的价格, 其中无风险利率的数据来源于 OptionMetrics 数据库.

经过上述步骤, 在与前文的收益率、波动率的已实现测度序列匹配后, 本研究得到了由 90 816 个期权组成的样本. 对于期权实证样本根据价值程度 Delta、到期期限与 VIX 水平分组的描述性统计结果报告在表 3. 其中, 价值程度的表达式为

$$\text{Delta} = \Phi \left( \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + r_f T + \frac{1}{2(IV^{MKT})^2} \times T/365}{IV^{MKT} \sqrt{T/365}} \right)$$

表 3 结果表明, 本研究使用的期权样本与已有文献 Christoffersen 等<sup>[28]</sup>、Christoffersen 等<sup>[29]</sup>、Feunou 和 Okou<sup>[54]</sup> 所使用的期权数据集的特征相似, 并且符合期权的市场特征. 具体地, Panel A 显示, 样本中有 39.4% 位于  $\text{Delta} \geq 0.7$  的分组, 为深度实值期权, 即期权价格对资产价格变动的敏感性较高, 该组别平均期权价格(192.513 5)与平均波动率(20.09%)均最高, 而平均买卖价差则最低(0.918 0), 体现了深度实值期权的高流动性. 同时, 随着 Delta 增大, 期权平均价格上升, 与 Feunou 和 Okou<sup>[54]</sup>、Pan 等<sup>[53]</sup> 的发现相符. Panel B 报告了根据到期期限分类的结果, 到期日小于 60 个自然日的合约占 54.96%, 且流动性水平最佳. 随着到期期限的增加, 期权的平均价格也增加. Panel C 显示, 随着 VIX 水平不断提高, 期权的平均隐含波动率不断增加, 在  $VIX \geq 35$  时, 期权的平均隐含波动率高达 41.26%.

表 3 期权描述性统计

Table 3 Summary statistics of options

Panel A: 根据价值程度分类							
Delta	Delta < 0.3	0.3 ≤ Delta < 0.4	0.4 ≤ Delta < 0.5	0.5 ≤ Delta < 0.6	0.6 ≤ Delta < 0.7	Delta ≥ 0.7	All
合约数	13 103	6 713	10 211	15 085	9 903	35 801	90 816
平均价格	11.661 2	23.391 4	38.619 0	58.532 3	84.361 1	192.513 5	102.567 0
平均隐含波动率	0.124 3	0.133 5	0.145 1	0.160 4	0.173 5	0.200 9	0.168 9
平均买卖价差	0.953 3	1.189 1	1.399 1	1.531 6	1.374 1	0.918 0	1.148 9

续表3

Table 3 Continues

Panel B: 根据到期期限分类							
DTM	DTM < 30	30 ≤ DTM < 60	60 ≤ DTM < 90	90 ≤ DTM < 120	120 ≤ DTM < 150	DTM ≥ 150	All
合约数	22 496	27 420	14 430	11 530	8 222	6 718	90 816
平均价格	48.461 4	85.541 5	114.874 4	137.258 8	174.069 2	179.750 0	102.567 0
平均隐含波动率	0.141 4	0.164 3	0.184 0	0.190 9	0.188 3	0.185 8	0.168 9
平均买卖价差	0.715 3	0.982 4	1.382 6	1.549 8	1.497 3	1.664 0	1.148 9
Panel C: 根据 VIX 水平分类							
VIX	VIX < 15	15 ≤ VIX < 20	20 ≤ VIX < 25	25 ≤ VIX < 30	30 ≤ VIX < 35	VIX ≥ 35	All
合约数	46 061	26 383	10 113	4 316	1 629	2 314	90 816
平均价格	98.926 0	110.258 7	104.841 5	100.943 5	101.320 9	81.310 4	102.567 0
平均隐含波动率	0.130 3	0.174 3	0.218 7	0.252 7	0.295 3	0.412 6	0.168 9
平均买卖价差	0.772 3	1.206 3	1.632 0	1.941 4	2.613 5	3.368 5	1.148 9

注: Panel A 中的价值程度由期权的希腊字母 Delta 衡量; Panel B 中的期限 (Day-to-maturity) 由期权合约本身决定; Panel C 中的 VIX 是 CBOE 测算的隐含波动率指数. 表格中的期权数据来自 OptionMetrics, VIX 数据来自 Investing. 样本区间为 2007 年 5 月 2 日—2019 年 12 月 18 日.

4.4.3 联合估计结果

本节对模型和期权定价公式的参数进行样本内估计. 样本内估计的时间窗口为 2007 年 5 月 2 日—2015 年 12 月 30 日, 对此期间周三

的收益率序列、已实现波动率序列以及期权数据进行联合估计, 表 4 报告了参数结果. 与表 2 类似, 表 4 也给出了无条件波动率的计算结果.

表 4 联合估计结果

Table 4 Joint estimation results

参数	BARVJ		BARV		ARV-HNG		BPJVM	ARV	HNG
	CO	OC	CO	OC	CO	OC	—	—	—
$\lambda_{ARV}$	0.302 5 (8.950 5)	2.800 9 (0.043 9)	0.952 5 (2.592 9)	1.766 4 (0.062 4)	1.380 1 (3.985 3)	1.765 6 (0.113 8)	1.779 4 (6.52E-05)	1.435 7 (0.053 8)	1.675 1 (0.006 3)
$\beta_{ARV}$	6.00E-06 (1.02E-06)	1.12E-05 (3.29E-07)	6.41E-06 (9.87E-07)	1.29E-05 (2.71E-06)	—	4.78E-06 (3.52E-07)	0.242 9 (0.025 6)	5.61E-06 (2.13E-06)	—
$\gamma_{ARV}$	483.006 1 (28.793 0)	555.419 7 (3.706 7)	392.775 4 (20.582 6)	527.094 0 (10.858 2)	—	527.098 4 (10.311 7)	50 760.881 4 (5 611.480 4)	361.098 0 (18.442 5)	—
$\alpha_{ARV}$	4.29E-06 (6.09E-07)	3.17E-06 (4.78E-08)	6.48E-06 (1.15E-06)	3.55E-06 (1.83E-07)	—	3.46E-06 (1.45E-07)	0.757 0 (0.024 5)	7.38E-06 (7.14E-07)	—
$\sigma$	6.45E-06 (4.54E-07)	5.27E-06 (1.78E-08)	—	—	—	5.41E-06 (1.50E-07)	3.70E-08 (6.9E-09)	1.21E-05 (8.02E-07)	—
$\beta_R$	—	—	—	—	0.934 2 (0.015 1)	—	—	—	0.674 1 (0.005 5)
$\gamma_R$	—	—	—	—	190.304 2 (42.597 1)	—	—	—	589.378 0 (3.020 6)
$\alpha_R$	—	—	—	—	1.99E-06 (2.56E-07)	—	—	—	9.00E-07 (1.11E-08)
$\rho$	0.219 0 (0.045 1)	0.141 9 (0.051 0)	0.191 3 (0.054 8)	0.129 8 (0.095 1)	—	0.129 8 (0.013 8)	0.395 0 (0.025 4)	0.177 4 (0.018 9)	—
$\lambda_y$	0.176 5		—	—	—	—	0.000 3	—	—

续表 4

Table 4 Continues

参数	BARVJ		BARV		ARV-HNG		BPJVM	ARV	HNG
	CO	OC	CO	OC	CO	OC	—	—	—
$\theta$	-0.001 7 (5.06E-06)		—	—	—	—	0.000 4 (3.96E-05)	—	—
$\delta$	0.164 4 (0.000 8)		—	—	—	—	0.004 3 (2.81E-05)	—	—
$\beta_y$	0.641 5 (0.023 6)		—	—	—	—	0.968 9 (0.006 7)	—	—
$\alpha_y$	7.307 6 (0.079 3)		—	—	—	—	314.249 2 (62.461 1)	—	—
$\gamma^*$	483.006 1 (1.631 7)	555.419 7 (5.923 2)	406.387 9 (116.600 2)	538.547 0 (101.104 0)	—	580.396 7 (2.417 1)	—	368.116 3 (31.397 4)	—
$\nu$	0.014 6 (0.001 4)		—	—	—	—	0.003 2 (8.16E-05)	—	—
$\mathbb{E}[\bar{h}_z]$	8.39E-05	7.07E-05	1.01E-04	7.83E-05	—	—	1.31E-04	1.68E-04	2.88E-04
$\mathbb{E}[\bar{h}_y]$	2.45E-05		—	—	—	—	4.57E-05	—	—
$\mathcal{L}$	197 268		195 416		131 493		75 863	30 023	27 326

注: 括号内为标准误. 样本内区间为 2007 年 5 月 2 日—2015 年 12 月 30 日.

表 4 中各模型的  $\gamma^*$  均不小于  $\gamma$  表明资产收益率的风险中性偏度 (Risk-Neutral Skewness) 比物理偏度更大. BARVJ 模型与 BARV 模型中, 系数  $\rho_{CO}$  与  $\rho_{OC}$  与表 2 的估计结果接近, 可见收益率冲击与波动率冲击具有稳定的相关性. 此外, 跳跃波动率动态方程的系数  $\beta_y$  等与刻画跳跃分布特征的系数  $\theta$ 、 $\delta$  均显著异于 0, 为在期权定价模型中考虑资产价格的跳跃行为提供了实证支持.

#### 4.4.4 期权定价效果

本研究使用三个样本检验了 BARVJ 模型和基准模型集的实证定价表现: 使用 2007 年 5 月 2 日—2015 年 12 月 30 日的周三的期权进行样本内检验 (表 5), 使用同时期周四的期权进行第一个样本外检验 (表 6), 使用 2016 年 1 月 6 日—2019 年 12 月 18 日的周三的期权进行第二个样本外检验 (表 7).

表 5 样本内期权定价误差: 2007—2015 周三

Table 5 In-sample option pricing error: 2007—2015, WED

IVRMSE						
模型	BARVJ	BARV	ARV-HNG	BPJVM	ARV	HNG
总 IVRMSE	<b>5.068 5</b>	5.149 8	5.314 5	5.424 3	5.572 9	5.846 4
Panel A: 根据价值程度分类						
Delta < 0.3	<b>4.982 6</b>	5.076 3	5.055 4	5.551 0	5.330 8	5.677 0
0.3 ≤ Delta < 0.4	5.065 0	5.101 6	<b>4.994 1</b>	5.626 0	5.476 5	5.676 1
0.4 ≤ Delta < 0.5	<b>4.933 5</b>	5.080 2	5.109 0	5.435 9	5.427 7	5.713 5
0.5 ≤ Delta < 0.6	<b>5.209 8</b>	5.260 1	5.311 3	5.712 8	5.794 7	5.979 6
0.6 ≤ Delta < 0.7	<b>5.423 4</b>	5.562 4	5.703 4	5.933 7	5.908 1	5.950 1
Delta ≥ 0.7	<b>4.794 4</b>	4.846 2	5.131 7	4.973 4	5.502 6	5.885 3
Panel B: 根据到期期限分类						
DTM < 30	<b>4.863 7</b>	4.969 7	4.882 7	5.465 3	5.128 3	5.275 8
30 ≤ DTM < 60	<b>5.060 3</b>	5.193 5	5.241 6	5.565 3	5.579 3	5.671 2
60 ≤ DTM < 90	<b>4.968 8</b>	5.095 4	5.311 5	5.280 2	5.556 6	6.031 0

续表 5  
Table 5 Continues

IVRMSE						
模型	BARVJ	BARV	ARV-HNG	BPJVM	ARV	HNG
总 IVRMSE	<b>5.068 5</b>	5.149 8	5.314 5	5.424 3	5.572 9	5.846 4
Panel B: 根据价值程度分类						
90 ≤ DTM < 120	<b>5.205 0</b>	5.300 4	5.492 7	5.569 6	5.850 0	6.343 7
120 ≤ DTM < 150	<b>5.093 6</b>	5.165 2	5.600 1	5.298 9	5.839 2	6.089 7
DTM ≥ 150	<b>4.874 5</b>	5.043 3	5.531 0	4.970 8	5.738 1	5.802 5
Panel C: 根据 VIX 水平分类						
VIX < 15	4.141 1	4.328 6	4.850 0	4.237 8	4.910 8	<b>2.187 1</b>
15 ≤ VIX < 20	<b>2.291 9</b>	2.367 5	2.654 3	2.304 5	2.816 1	3.588 8
20 ≤ VIX < 25	<b>4.591 6</b>	4.592 3	4.607 3	4.980 7	5.092 7	6.889 5
25 ≤ VIX < 30	<b>6.972 1</b>	7.322 1	7.431 8	7.813 4	7.512 4	9.253 9
30 ≤ VIX < 35	<b>10.406 8</b>	11.237 7	11.446 3	11.869 8	10.945 4	12.476 5
VIX ≥ 35	<b>11.440 7</b>	11.871 9	11.939 5	12.777 6	12.343 1	15.596 9

注: 本表报告了使用表 4 报告的估计参数对 2007 年 5 月 2 日—2015 年 12 月 30 日期间周三的期权进行定价的结果。  
其中, Panel A 报告了基于价值程度进行分类的 IVRMSE 结果; Panel B 报告了基于到期期限进行分类的 IVRMSE 结果; Panel C 报告了基于期权报价当天 VIX 水平进行分类的 IVRMSE 结果。

表 6 样本外期权定价误差: 2007—2015 周四

Table 6 Out-of-sample option pricing error: 2007—2015, THU

IVRMSE						
模型	BARVJ	BARV	ARV-HNG	BPJVM	ARV	HNG
总 IVRMSE	<b>5.015 8</b>	5.120 5	5.396 5	5.426 6	5.571 4	6.003 6
Panel A: 根据价值程度分类						
Delta < 0.3	5.061 9	<b>5.029 1</b>	5.211 1	5.615 7	5.471 3	5.829 6
0.3 ≤ Delta < 0.4	<b>5.042 0</b>	5.064 9	5.349 8	5.623 1	5.468 2	6.151 3
0.4 ≤ Delta < 0.5	<b>5.027 6</b>	5.037 4	5.031 2	5.484 0	5.518 7	5.872 0
0.5 ≤ Delta < 0.6	<b>5.212 6</b>	5.243 2	5.431 2	5.670 9	5.739 5	6.089 2
0.6 ≤ Delta < 0.7	<b>5.306 6</b>	5.553 5	5.409 4	5.852 5	5.831 3	6.158 7
Delta ≥ 0.7	<b>4.797 0</b>	4.814 0	5.514 2	5.008 8	5.474 1	5.985 5
Panel B: 根据到期期限分类						
DTM < 30	5.007 1	<b>4.940 7</b>	5.156 5	5.674 1	5.334 2	5.928 0
30 ≤ DTM < 60	<b>5.052 0</b>	5.141 4	5.338 6	5.489 1	5.463 0	6.111 2
60 ≤ DTM < 90	<b>4.949 4</b>	5.077 1	5.156 0	5.298 1	5.547 6	5.866 8
90 ≤ DTM < 120	5.317 8	<b>5.279 3</b>	5.565 3	5.619 3	5.911 4	6.251 5
120 ≤ DTM < 150	<b>4.837 3</b>	5.144 1	5.317 9	5.026 3	5.628 7	5.976 9
DTM ≥ 150	<b>4.935 4</b>	4.993 7	5.569 1	5.044 8	5.737 4	5.614 9
Panel C: 根据 VIX 水平分类						
VIX < 15	<b>4.269 3</b>	4.319 1	4.752 3	4.342 9	5.034 0	4.469 5
15 ≤ VIX < 20	2.342 3	<b>2.333 6</b>	2.836 0	2.289 0	2.905 6	2.718 8
20 ≤ VIX < 25	4.680 6	<b>4.535 8</b>	4.741 2	5.058 9	5.223 8	5.410 2
25 ≤ VIX < 30	<b>7.170 4</b>	7.291 6	7.809 2	8.171 1	7.616 5	8.318 0
30 ≤ VIX < 35	<b>9.875 7</b>	11.048 5	11.129 4	11.537 2	10.177 7	12.504 6
VIX ≥ 35	<b>10.729 3</b>	11.090 7	12.132 3	11.945 1	11.688 5	15.276 7

注: 本表报告了使用表 4 报告的估计参数对 2007 年 5 月 3 日—2015 年 12 月 31 日的周四的期权进行定价的结果。

表 5 报告了样本内期权定价结果, 分别以价值程度( Black-Scholes Delta)、到期期限( Days to Maturity) 以及期权报价当天的 VIX 水平分组报告. 结果表明, 考虑隔夜高频信息与跳跃行为能有效提升模型的准确度. BARVJ 模型的 *IVRMSE* 为 5.068 5, 相比未考虑隔夜信息的 BPJVM 模型减少了 6.56% 相比未考虑隔夜信息以及跳跃行为的 ARV 模型与 HNG 模型, BARVJ 模型的定价误差分别减少了 9.05% 和 13.31%. 从 Panel A 可见, BARVJ 模型既适用于深度实值期权, 也适用于期权价格对标的价格变动不敏感的期权

(  $\Delta < 0.3$  ). Panel B 与 Panel C 显示, 在期限最长(  $T \geq 150$ ) 与 VIX 水平最高(  $VIX \geq 35$ ) 的组别中, BARVJ 模型的定价能力相比表现次之的 BARV 模型分别提升 3.35% 和 3.63%. 根据图 2 和表 2, 长期期权定价误差的减小可能来自隔夜高频信息中跳跃部分的提取与建模. 对于线性的波动率模型<sup>①</sup>, 高波动时期定价能力的提升来自对隔夜动态过程单独建模, 精确地提取和运用隔夜时段市场风险波动的信号, 更加全面及时地捕捉金融市场风险信息, 对金融资产价格变化的刻画更贴近现实.

表 7 样本外期权定价误差: 2016 - 2019, 周三

Table 7 Out-of-sample option pricing error: 2016 - 2019, WED

<i>IVRMSE</i>						
模型	BARVJ	BARV	ARV-HNG	BPJVM	ARV	HNG
总 <i>IVRMSE</i>	<b>3.744 0</b>	3.853 1	4.096 4	3.925 6	4.679 5	4.791 3
Panel A: 根据价值程度分类						
$\Delta < 0.3$	<b>3.945 1</b>	4.033 4	4.212 7	4.110 5	5.245 3	5.590 3
$0.3 \leq \Delta < 0.4$	<b>4.278 0</b>	4.317 7	4.678 0	4.298 3	5.711 1	5.647 6
$0.4 \leq \Delta < 0.5$	<b>3.945 5</b>	4.104 5	4.190 9	4.170 8	5.373 1	5.329 9
$0.5 \leq \Delta < 0.6$	<b>3.706 7</b>	3.717 2	4.122 3	3.790 1	4.821 3	4.760 9
$0.6 \leq \Delta < 0.7$	<b>3.674 4</b>	3.867 3	3.887 4	4.276 1	4.533 9	4.612 5
$\Delta \geq 0.7$	<b>3.252 2</b>	3.287 3	3.530 8	3.688 1	4.013 7	4.210 3
Panel B: 根据到期期限分类						
$DTM < 30$	<b>4.316 0</b>	4.446 8	4.575 3	4.610 2	5.623 3	5.232 3
$30 \leq DTM < 60$	<b>3.593 9</b>	3.761 9	3.800 8	3.970 2	4.770 5	4.697 3
$60 \leq DTM < 90$	<b>3.296 7</b>	3.314 4	3.622 8	3.537 9	4.183 7	4.435 5
$90 \leq DTM < 120$	<b>2.597 8</b>	2.951 4	2.542 7	3.118 0	3.697 9	4.473 1
$120 \leq DTM < 150$	<b>2.601 0</b>	2.739 9	2.719 7	2.942 4	3.342 9	4.473 0
$DTM \geq 150$	<b>2.428 5</b>	2.537 5	2.481 0	2.891 7	3.169 6	4.459 6
Panel C: 根据 VIX 水平分类						
$VIX < 15$	3.680 8	<b>3.526 2</b>	4.098 8	3.357 9	5.051 7	5.394 4
$15 \leq VIX < 20$	2.241 9	2.463 8	<b>2.137 4</b>	3.091 4	2.792 1	2.560 6
$20 \leq VIX < 25$	<b>3.784 5</b>	3.810 6	4.639 7	6.119 6	4.440 8	3.646 7
$25 \leq VIX < 30$	6.306 7	<b>5.760 1</b>	7.685 8	10.284 4	7.100 6	7.558 4
$30 \leq VIX \leq 35$	<b>9.482 9</b>	9.721 9	10.526 6	11.821 2	11.998 7	13.889 2

注: 本表报告了使用表 4 报告的估计参数对 2016 年 1 月 6 日—2019 年 12 月 18 日的周三的期权进行定价的结果.

表 6 报告了对 2007 年 5 月 3 日—2015 年 12 月 31 日期间周四期权的样本外定价结果, 与样本内定价效果相比, 在样本外 BARVJ 模型取得了更大程度的改进. 同样地, 在  $\Delta \geq 0.7$  和  $T \geq$

150 的组别内, BARVJ 模型具有更强的定价优势, 这体现了 BARVJ 模型的期权定价应用中的稳健性. 表 6 的各分组中, BARVJ 模型或 BARV 模型表现最佳, 可见对隔夜高频信息与跳跃行为的捕

① Huang 等<sup>[63]</sup>指出对数形式的波动率模型能更好地拟合高波动时期的资产波动率, 而本研究模型均为线性波动率模型, 也即 BARVJ 模型并未在模型设定上占优.

能较好提升样本外期权定价准确度。

表7报告了对2016年1月6日—2019年12月18日期间周三期权的定价结果。相比表5和表6,各模型的定价误差均有所降低,所有模型的IVRMSE均在5%以内,可能的原因是2016年—2019年间金融市场处于较低波动时期(见图1),标的资产波动率的动态特征更容易被捕捉和预测。此时,BARVJ模型呈现出稳健的期权定价优势。

## 5 结束语

及时反映非交易时段的市场信息对金融资产价格产生的动态影响是有效防范和化解金融风险亟需解决的关键问题。目前,金融资产价格对隔夜信息的反应集中体现在开盘价,需要新的方法来及时精确地度量隔夜信息对金融资产价格的影响。

本研究通过对标的资产隔夜连续波动率、日

内连续波动率与日度跳跃波动率联合建模,提出了新的离散时间期权定价模型 Bisected Affine Realized Volatility and Jump,通过傅里叶逆变换得到解析形式的欧式期权定价公式。本研究使用S&P 500指数与S&P 500 E-mini期货2007年—2022年的1 min高频交易数据和90 816个期权样本,实证检验了BARVJ模型和基准模型集的期权定价效果。结果表明,考虑隔夜高频信息和跳跃行为能够显著降低期权定价误差,与未考虑隔夜高频信息的BPJVM模型相比,BARVJ模型的定价误差减少了7.57%;与未考虑跳跃行为和隔夜高频信息的ARV模型相比,这一比例达到了19.99%。对于期限较长的期权以及金融市场的高波动时期,BARVJ模型对期权定价准确度的改进更加显著。通过考虑标的资产隔夜高频信息和价格跳跃行为,能够及时有效捕捉资产价格的时间变化特征,刻画跳跃对期权定价的影响,提高期权定价的灵敏性。

## 参考文献:

- [1]Lockwood L J, Linn S C. An examination of stock market return volatility during overnight and intraday periods, 1964 – 1989[J]. The Journal of Finance, 1990, 45(2): 591 – 601.
- [2]Linton O, Wu J. A coupled component DCS-EGARCH model for intraday and overnight volatility[J]. Journal of Econometrics, 2020, 217(1): 176 – 201.
- [3]Ahoniemi K, Lanne M. Overnight stock returns and realized volatility[J]. International Journal of Forecasting, 2013, 29(4): 592 – 604.
- [4]Stoll H R, Whaley R E. Stock market structure and volatility[J]. The Review of Financial Studies, 1990, 3(1): 37 – 71.
- [5]Dhaene G, Wu J. Incorporating overnight and intraday returns into multivariate GARCH volatility models[J]. Journal of Econometrics, 2020, 217(2): 471 – 495.
- [6]Amihud Y, Mendelson H. Trading mechanisms and stock returns: An empirical investigation[J]. The Journal of Finance, 1987, 42(3): 533 – 553.
- [7]Amihud Y, Mendelson H. Volatility, efficiency, and trading: Evidence from the Japanese stock market[J]. The Journal of Finance, 1991, 46(5): 1765 – 1789.
- [8]Cao C, Choe H, Hatheway F. What is special about the opening? Evidence from Nasdaq[J]. Seoul Journal of Business, 1997: 3.
- [9]Fama E F. The behavior of stock-market prices[J]. The Journal of Business, 1965, 38(1): 34 – 105.
- [10]French K R, Roll R. Stock return variances: The arrival of information and the reaction of traders[J]. Journal of Financial Economics, 1986, 17(1): 5 – 26.
- [11]Oldfield G S, Rogalski R J. A theory of common stock returns over trading and non-trading periods[J]. The Journal of Finance, 1980, 35(3): 729 – 751.
- [12]Amihud Y, Mendelson H. Liquidity, maturity, and the yields on US treasury securities[J]. The Journal of Finance, 1991, 46(4): 1411 – 1425.

- [13] Tsiakas I. Overnight information and stochastic volatility: A study of European and US stock exchanges [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2008, 32(2): 251–268.
- [14] Taylor N. A note on the importance of overnight information in risk management models [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2007, 31(1): 161–180.
- [15] Jones C S, Shemesh J. Option mispricing around nontrading periods [J]. *The Journal of Finance*, 2018, 73(2): 861–900.
- [16] Boes M J, Drost F C, Werker B J. The impact of overnight periods on option pricing [J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2007, 42(2): 517–533.
- [17] Wang T, Cheng S, Yin F, et al. Overnight volatility, realized volatility, and option pricing [J]. *Journal of Futures Markets*, 2022, 42(7): 1264–1283.
- [18] Andersen T G, Bollerslev T. Deutsche mark-dollar volatility: Intraday activity patterns, macroeconomic announcements, and longer run dependencies [J]. *The Journal of Finance*, 1998, 53(1): 219–265.
- [19] Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps [J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2004, 2(1): 1–37.
- [20] Barndorff-Nielsen O E, Hansen P R, Lunde A, et al. Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise [J]. *Econometrica*, 2008, 76(6): 1481–1536.
- [21] Engle R. New frontiers for ARCH models [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2002, 17(5): 425–446.
- [22] Forsberg L, Bollerslev T. Bridging the gap between the distribution of realized ( ECU ) volatility and ARCH modelling ( of the Euro ): The GARCH-NIG model [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2002, 17(5): 535–548.
- [23] Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Econometric analysis of realized covariation: High frequency based covariance, regression, and correlation in financial economics [J]. *Econometrica*, 2004, 72(3): 885–925.
- [24] Andersen S, Harrison G W, Lau M I, et al. Eliciting risk and time preferences [J]. *Econometrica*, 2008, 76(3): 583–618.
- [25] Hansen P R, Lunde A. A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data [J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2005, 3(4): 525–554.
- [26] Hansen P R, Huang Z, Shek H H. Realized GARCH: A joint model for returns and realized measures of volatility [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2012, 27(6): 877–906.
- [27] Hansen P R, Lunde A, Voev V. Realized beta GARCH: A multivariate GARCH model with realized measures of volatility [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2014, 29(5): 774–799.
- [28] Christoffersen P, Feunou B, Jacobs K, et al. The economic value of realized volatility: Using high-frequency returns for option valuation [J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2014, 49(3): 663–697.
- [29] Christoffersen P, Feunou B, Jeon Y. Option valuation with observable volatility and jump dynamics [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2015, 61: S101–S120.
- [30] Tong C, Hansen P R, Huang Z. Option pricing with state-dependent pricing kernel [J]. *Journal of Futures Markets*, 2022, 42(8): 1409–1433.
- [31] Tong C, Huang Z. Pricing VIX options with realized volatility [J]. *Journal of Futures Markets*, 2021, 41(8): 1180–1200.
- [32] 马 锋, 魏 宇, 黄登仕. 基于符号收益和跳跃变差的高频波动率模型 [J]. *管理科学学报*, 2017, 20(10): 31–43.  
Ma Feng, Wei Yu, Huang Dengshi. Forecasting the realized volatility based on the signed return and signed jump variation [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(10): 31–43. ( in Chinese )
- [33] 罗嘉雯, 陈浪南. 基于贝叶斯因子模型金融高频波动率预测研究 [J]. *管理科学学报*, 2017, 20(8): 13–26.  
Luo Jiawen, Chen Langnan. High-frequency volatility forecast of financial futures based on Bayesian factor model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(8): 13–26. ( in Chinese )
- [34] 陈国进, 刘晓群, 谢沛霖, 等. 已实现跳跃波动与中国股市风险溢价研究——基于股票组合视角 [J]. *管理科学学*

- 报, 2016, 19(6): 98 - 113.
- Chen Guojin, Liu Xiaoqun, Xie Peilin, et al. Realized jump volatility components and portfolio risk premium in Chinese stock market[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(6): 98 - 113. (in Chinese)
- [35] Tang Y, Xiao X, Wahab M I M. The role of oil futures intraday information on predicting US stock market volatility[J]. *Journal of Management Science and Engineering*, 2021, 6(1): 64 - 74.
- [36] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1-2): 125 - 144.
- [37] Amin K I. Jump diffusion option valuation in discrete time[J]. *The Journal of Finance*, 1993, 48(5): 1833 - 1863.
- [38] Naik V. Option valuation and hedging strategies with jumps in the volatility of asset returns[J]. *The Journal of Finance*, 1993, 48(5): 1969 - 1984.
- [39] Bakshi G, Cao C, Chen Z. Empirical performance of alternative option pricing models[J]. *The Journal of Finance*, 1997, 52(5): 2003 - 2049.
- [40] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions[J]. *Econometrica*, 2000, 68(6): 1343 - 1376.
- [41] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing[J]. *Management Science*, 2002, 48(8): 1086 - 1101.
- [42] Kou S G, Wang H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model[J]. *Management Science*, 2004, 50(9): 1178 - 1192.
- [43] Tong C, Huang Z, Wang T. Do VIX futures contribute to the valuation of VIX options? [J]. *Journal of Futures Markets*, 2022, 42(9): 1644 - 1664.
- [44] Tong C, Huang Z. Good volatility, bad volatility, and VIX futures pricing: Evidence from the decomposition of VIX[J]. *The Journal of Derivatives*, 2023, 30(3): 117 - 143.
- [45] 刘志东, 刘雯宇, 阮禹铭. Lévy 过程驱动非高斯 OU 随机波动率下的期权定价[J]. *管理科学学报*, 2019, 22(1): 17 - 43.
- Liu Zhidong, Liu Wenyu, Ruan Yuming. Option pricing in non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes driven by the Lévy processes[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(1): 17 - 43. (in Chinese)
- [46] 陈淼鑫, 武晨. 随机跳跃强度与期权隐含风险溢价[J]. *管理科学学报*, 2018, 21(4): 28 - 42.
- Chen Miaoxin, Wu Chen. Stochastic jump intensity and option implied risk premiums[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(4): 28 - 42. (in Chinese)
- [47] 刘杨树, 郑振龙, 陈蓉. 跳跃风险如何影响期权复制收益? ——基于多维跳跃扩散的模型与证据[J]. *管理科学学报*, 2016, 19(6): 74 - 86.
- Liu Yangshu, Zheng Zhenlong, Chen Rong. How does jump risk affect the Delta hedge gain? Evidence from multi-dimensional jump diffusion model[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(6): 74 - 86. (in Chinese)
- [48] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明. 带杠杆效应的无穷纯跳跃 Levy 过程期权定价[J]. *管理科学学报*, 2014, 17(8): 74 - 94.
- Wu Hengyu, Zhu Fumin, Wen Jinming. Option pricing based on conditional infinite pure jump Levy processes with leverage effect[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, 17(8): 74 - 94. (in Chinese)
- [49] Xu W, Xu W, Li H, et al. A jump-diffusion approach to modelling vulnerable option pricing[J]. *Finance Research Letters*, 2012, 9(1): 48 - 56.
- [50] Cai N, Kou S G. Option pricing under a mixed-exponential jump diffusion model[J]. *Management Science*, 2011, 57(11): 2067 - 2081.
- [51] Feunou B, Tédongap R. A stochastic volatility model with conditional skewness[J]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2012, 30(4): 576 - 591.
- [52] Christoffersen P, Jacobs K, Ornathanalai C. Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S&P500 returns and options[J]. *Journal of Financial Economics*, 2012, 106(3): 447 - 472.
- [53] Pan Z, Wang Y, Liu L. Realized bipower variation, jump components, and option valuation[J]. *Journal of Futures Mar-*

- kets ,2021 ,41( 12) : 1933 – 1958.
- [54]Feunou B ,Okou C. Good volatility ,bad volatility ,and option pricing[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis , 2019 ,54( 2) : 695 – 727.
- [55]Patton A J ,Sheppard K. Good volatility ,bad volatility: Signed jumps and the persistence of volatility[J]. Review of Economics and Statistics ,2015 ,97( 3) : 683 – 697.
- [56]Maheu J M ,McCurdy T H. News arrival , jump dynamics , and volatility components for individual stock returns[J]. The Journal of Finance ,2004 ,59( 2) : 755 – 793.
- [57]Heston S L ,Nandi S. A closed-form GARCH option valuation model[J]. The Review of Financial Studies ,2000 ,13( 3) : 585 – 625.
- [58]Christoffersen P ,Jacobs K. Which GARCH model for option valuation? [J]. Management Science ,2004 ,50( 9) : 1204 – 1221.
- [59]Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study[J]. Journal of Financial Economics ,2002 ,63( 1) : 3 – 50.
- [60]Christoffersen P ,Elkamhi R ,Feunou B , et al. Option valuation with conditional heteroskedasticity and nonnormality [J]. The Review of Financial Studies ,2010 ,23( 5) : 2139 – 2183.
- [61]潘志远 ,刘 莉 ,刘子锐. 国际溢出、国内基本面与期权定价[J]. 管理科学学报 ,2022 ,6( 2) : 22 – 46.  
Pan Zhiyuan , Liu Li , Liu Zirui. International spillover , domestic fundamentals and option pricing[J]. Journal of Management Sciences in China ,2022 ,6( 2) : 22 – 46 . ( in Chinese)
- [62]Renault E. Econometric models of option pricing errors [J]. Econometric Society Monographs ,1997 ,28: 223 – 278.
- [63]Huang Z , Wang T , Hansen P R. Option pricing with the realized GARCH model: An analytical approximation approach [J]. Journal of Futures Markets ,2017 ,37( 4) : 328 – 358.

## Option pricing model based on overnight high-frequency information and jump variation

LIANG Fang<sup>1</sup> , DU Ling-shan<sup>2</sup> , HUANG Zhuo<sup>3\*</sup>

1. International School of Business & Finance , Sun Yat-sen University , Zhuhai 519082 , China;
2. Guanghua School of Management , Peking University , Beijing 100871 , China;
3. National School of Development , China Center for Economic Research , Peking University , Beijing 100871 , China

**Abstract:** This paper proposes a new discrete-time option-pricing model , the Bisected Affine Realized Volatility and Jump ( BARVJ) model , by jointly modeling overnight volatility , intraday volatility , and jump variation of the underlying asset , and derives a closed-form pricing formula for European options using the Fourier inversion. The pricing performance of the BARVJ model and the benchmarks are examined empirically. By considering overnight high-frequency information and jump variation , the BARVJ model achieves an improvement of 19.99% in pricing accuracy. The BARVJ model performs even better for options with longer maturity and during highly volatile times.

**Key words:** Bisected Affine Realized Volatility and Jump; overnight implied prices; jump variation; closed-form option-pricing formula